

**W.I. Fushchych  
Scientific Works**

**Volume 1  
1959–1978**

*Editor*  
*Vyacheslav Boyko*

**Kyiv 2000**



# О применении модифицированного метода возмущений к интерпретации нуклон-нуклонных рассеяний

Ю.М. ЛОМСАДЗЕ, В.И. ЛЕНДЬЕЛ, И.Ю. КРИВСКИЙ, В.И. ФУЩИЧ,  
И.В. ХИМИЧ, Л.П. ЛУКИН, Б.М. ЭРНСТ

In the first non-vanishing approximation of the modified method on the basis of the assumption of the existence of scalar  $\pi$ -mesons and the violation of the nuclear force charge-independence in the high energy region, the differential effective cross-sections are obtained for all types of  $N$ - $N$ -scatterings. The calculated cross-sections in the energy interval 100–600 MeV agree enough satisfactorily with the experimental dates. The various new possibilities in the modified perturbation method are discussed.

В первом исчезающем приближении модифицированного метода возмущений в рамках предположений о существовании скалярных  $\pi$ -мезонов и нарушении зарядовой независимости ядерных сил при больших энергиях получены дифференциальные эффективные сечения для всех видов  $N$ - $N$ -рассеяний. Рассчитанные сечения в интервале энергий 100–600 Мэв достаточно удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Обсуждаются различные новые возможности в модифицированном методе возмущений.

## I.

В одном из предыдущих докладов [1] сообщалось о том, что с привлечением двух общих предположений — о существовании в природе скалярных  $\pi$ -мезонов и о нарушении зарядовой независимости ядерных сил при больших энергиях — можно получить весьма удовлетворительное согласие теоретических сечений (как полных, так и дифференциальных) с экспериментальными в довольно широком интервале энергий 100–600 Мэв для  $n$ - $p$ - и  $p$ - $p$ - и, следовательно,  $n$ - $n$ -рассеяний. Однако эти результаты получены в рамках обычного метода возмущений, который считается неприменимым к сильно связанным нуклонному и  $\pi$ -мезонному полям. С целью некоторого обоснования корректности первого приближения обычного метода возмущений в применении к  $N$ - $N$ -рассеяниям, ниже получены сечения указанных процессов в рамках первого приближения так называемого модифицированного метода возмущений [12].

Как известно, в этом методе проводится особое суммирование по всем простейшим собственно-энергетическим частям, возникающим от всех вариантов сильных взаимодействий. В частности, для интересующих нас процессов  $N$ - $N$ -рассеяний, первое приближение модифицированного метода получается как результат такого особого суммирования по всем простейшим замкнутым барионным петлям, вставленным во внутренние  $\pi$ -мезонные линии фейнмановских диаграмм второго порядка.

В основу расчета кладется гамильтониан взаимодействия барионного и  $\pi$ -мезонного полей, принятый в статье [3], но измененный и дополненный в соответствии со статьей [1]:

$$H = ig \left\{ \bar{N} \gamma_5 \tau_i \pi_i N + \bar{\Lambda} \gamma_5 \pi_i \Sigma_i + \bar{\Sigma}_i \pi_i \gamma_5 \Lambda + i \left[ \bar{\Sigma} \gamma_5 \Sigma \right]_i \pi_i + \bar{\Xi} \gamma_5 \tau_i \pi_i \Xi \right\} + \\ + g' \left\{ \bar{N} \tau_i \pi'_i N + \bar{\Lambda} \pi'_i \Sigma_i + \bar{\Sigma}_i \pi'_i \Lambda + i \left[ \bar{\Sigma} \Sigma \right]_i \pi'_i + \bar{\Xi} \tau_i \pi'_i \Xi \right\}. \quad (1)$$

Здесь в основном использованы обозначения статей [3] и [1] с некоторыми очевидными изменениями.

Поскольку расчеты даже первого неисчезающего приближения модифицированного метода возмущений весьма громоздки, в качестве первого шага мы пренебрегли разностью масс между гиперонами, ответственными за одну и ту же замкнутую гиперонную петлю. При этом условии дифференциальные сечения для всех типов  $N$ - $N$ -рассеяний представляются в виде ( $h = c = 1$ ):

$$d\sigma = d\sigma_{PS} + d\sigma_S + d\sigma_{S-PS}, \quad (2)$$

где для  $n$ - $p$ -рассеяния

$$d\sigma_{PS} = 4g^4 Q \left\{ \left[ \frac{A(x)}{M(x)} \right]^2 + \left[ \frac{A(2-x)}{M'(2-x)} \right]^2 - \frac{A(x)A(2-x)}{M(x)M'(2-x)} \right\} d\Omega, \\ d\sigma_S = g'^4 Q \left\{ \left[ \frac{B(x)}{N(x)} \right]^2 + 4 \left[ \frac{B(2-x)}{N(2-x)} \right]^2 + \frac{2B_1(x)}{N(x)N(2-x)} \right\} d\Omega, \quad (3) \\ d\sigma_{S-PS} = 2(gg')^2 Q \left\{ \frac{2C(x)}{M(x)N(2-x)} + \frac{C(2-x)}{M'(2-x)N(x)} \right\} d\Omega,$$

а для  $p$ - $p$ -рассеяния

$$d\sigma_{PS} = 4g^4 Q \left\{ \left[ \frac{A(x)}{M(x)} \right]^2 + \left[ \frac{A(2-x)}{M(2-x)} \right]^2 + \frac{A(x)A(2-x)}{M(x)M(2-x)} \right\} d\Omega, \\ d\sigma_S = g'^4 Q \left\{ \left[ \frac{B(x)}{N(x)} \right]^2 + \left[ \frac{B(2-x)}{N(2-x)} \right]^2 - \frac{B_1(x)}{N(x)N(2-x)} \right\} d\Omega, \quad (4) \\ d\sigma_{S-PS} = -2(gg')^2 Q \left\{ \frac{C(x)}{M(x)N(2-x)} + \frac{C(2-x)}{M(2-x)N(x)} \right\} d\Omega.$$

В (3) и (4) использованы обозначения

$$Q = \frac{1}{2(8\pi m)(2+P)}, \quad A(x) = \frac{x}{x + \mu^2/P}, \\ B(x) = \frac{4/P + x}{x + \mu^2/P}, \quad B_1(x) = \frac{8(1+2/P)/P - x(2-x)}{(x + \mu^2/P)(2-x + \mu^2/P)}, \quad (5) \\ C(x) = \frac{x(2-x + 4/P)}{(x + \mu^2/P)(2-x + \mu^2/P)}, \quad x = 1 - \cos \Theta,$$

где  $\Theta$  — угол рассеяния в с.ц.и., а  $\mu$  (масса покоя  $\pi$ -мезона) и  $P$  (кинетическая энергия падающего нуклона в л.с.) измерены в единицах массы покоя нуклона  $m$ .

Далее:

$$\begin{aligned}
 M(x) &= 1 + 2g^2 \sum_{i=1}^4 I_{ps}(x, m_i), & M'(x) &= 1 + g^2 \sum_{i=1}^4 I_{ps}(x, m_i), \\
 N(x) &= 1 + g'^2 \sum_{i=1}^4 I_s(x, m_i), \\
 I_{ps}(x, m_i) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ 1 + \frac{ax - b/P}{x + \mu^2/P} - \frac{x\sqrt{1 + 4/xP}}{x + \mu^2/P} \ln \frac{\sqrt{1 + 4/xP} + 1}{\sqrt{1 + 4/xP} - 1} \right\}, \\
 I_s(x, m_i) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left\{ 1 - \frac{4}{\mu^2} + \frac{a'x + b'/P}{x + \mu^2/P} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{x(1 + 4/xP)^{3/2}}{x + \mu^2/P} \ln \frac{\sqrt{1 + 4/xP} + 1}{\sqrt{1 + 4/xP} - 1} \right\}, \\
 a &= \frac{2(2/\mu^2 - 1)}{\sqrt{4^2\mu^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4/\mu^2 - 1}}, & b &= \frac{2a}{2/\mu^2 - 1}, \\
 a' &= 1 \left( -\frac{4}{\mu^2} - \frac{\mu^2}{2} \right) \frac{4/\mu^2}{\sqrt{4/\mu^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4/\mu^2 - 1}}, \\
 b' &= 12\sqrt{\frac{4}{\mu^2} - 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{4/\mu^2 - 1}}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

В формулах (6) индекс  $i$  нумерует комбинации барионных пар, связанных по гамильтониану (1) с  $\pi$ -мезонным полем ( $m_i$  — средняя масса  $i$ -овой барионной, в частности нуклонной, пары), а  $\mu$  и  $P$  измерены на этот раз в единицах средней массы соответствующей барионной пары.

## II.

Численные расчеты показывают, что вклад модификации в  $S(S)$ -вариантах при константе  $g' \approx 1$  (см. [11]) оказывается несущественным. При константах

$$g^2 = 58, 3; \quad g'^2 = 0, 95, \tag{7}$$

использованных нами ранее [1], эффективные сечения  $n$ - $p$ - и  $p$ - $p$ -рассеяний, рассчитанные по формулам (2)–(4), качественно согласуясь с экспериментальными данными, оказываются вместе с тем примерно в два раза большими их. Нет, однако, никаких априорных оснований пользоваться в рамках модифицированного метода теми же константами, что и в обычном методе возмущений. Исходя из этого, мы несколько изменили константы (7), приняв их равными

$$g^2 = 43, \quad g'^2 = 0, 7. \tag{8}$$

Заметим, кстати, что отношение новых констант (8) совпадает с отношением прежних констант (7), вследствие чего все выводы о непротиворечивости наших основных предположений с экспериментом (см. [1]), будучи основанными на отношении констант  $g$  и  $g'$ , остаются в силе.

Дифференциальные сечения, полученные с использованием новых констант (8), хорошо согласуются с экспериментом примерно в той же области энергий, что и сечения, полученные в работе [1], т.е. от 100 до 600 Мэв. Приведенная ниже таблица 1 при сравнении ее с рис. 1 работы [1] иллюстрирует вышесказанное:

Таблица 1

$x$	0	0,1	0,2	0,6	1	1,4	1,8	1,9	2,0
$\frac{d\sigma}{d\Omega}, mb$	8,12	3,58	2,83	2,19	2,13	2,73	4,87	7,21	21,1

Дифференциальное сечение  $d\sigma/d\Omega$   $n$ - $p$ -рассеяния для кинетической энергии падающего нейтрона 300 Мэв в л.с. как функция угла рассеяния  $\Theta$  в с.ц.и. ( $x = 1 - \cos \Theta$ ).

Необходимо заметить, что с возрастанием энергии знаменатели в выражениях (3)–(4) будут приближаться к нулю, а сечения — к бесконечности. Это аналог известного логарифмического полюса в электродинамике, возникающего при суммировании простейших замкнутых электронно-позитронных петель. Но если в электродинамике этот полюс появляется при колоссальных энергиях, не представляющих в настоящее время практического интереса, то в  $PS(PS)$ -вариантах, вследствие относительно большой величины константы связи  $g$ , он появляется уже при энергиях порядка 1 Бэв. Поскольку это обстоятельство приводит к физически неприемлемым результатам, оно должно рассматриваться как установление границы применимости модифицированного метода в прежней его формулировке, использованной нами выше.

В этой связи особый интерес представляют результаты, полученные недавно Н.Н. Боголюбовым, А.А. Логуновым и Д.В. Ширковым [4] и касающиеся проблемы устранения подобного рода полюсов. В соответствии с этими результатами к сечениям (2) должны быть добавлены определенные выражения, полностью компенсирующие эти полюса. В настоящее время нами проводятся расчеты, учитывающие вклады от этих дополнительных выражений.

Укажем попутно на любопытную возможность, имеющуюся и модифицированном методе возмущений. Если предположить, что, например, константа  $g$   $PS(PS)$ -варианта достаточно велика и единицей в знаменателях (3)–(4), в которые входит эта константа, можно пренебречь, то эти выражения вообще перестанут зависеть от константы  $g$ . В этом случае, очевидно, роль безразмерного параметра в модифицированном методе будет играть величина порядка  $(\frac{1}{4})^2$ , где 4 — число комбинаций барионных пар, связанных с  $\pi$ -мезонным полем.

Поскольку метод, в котором разложение ведется по такого типа безразмерному параметру, весьма привлекателен как с физической, так и с математической точек зрения, интересно было бы проследить разумность введения такой большой константы  $g$ . При этом, однако, становится весьма существенным вопрос об учете вклада еще не открытых, но, по-видимому, несомненно существующих в природе частиц барионного типа, сильно связанных с  $\pi$ -мезонным полем. Весьма грубая, фактически полуфеноменологическая оценка вклада этих гипотетических частиц может быть произведена с помощью введения в знаменатели (3)–(4) некоторого, для простоты постоянного, параметра  $\lambda$ .

Предварительные расчеты, проведенные нами, показывают, что при  $\lambda \approx 4$  для всех видов  $N$ - $N$ -рассеяний в весьма широком интервале от  $\approx 15$  до  $\approx 600$  Мэв

и, по-видимому, выше получаются отнюдь не абсурдные результаты. Эта возможность, однако, требует более обстоятельного анализа, в частности, учета дополнительных членов, на существование которых указано в уже цитировавшейся работе [4].

1. Ломсадзе Ю.М., Лендзел В.И., Кривский И.Ю., Статья в этом же сборнике, С. 195.
2. Ломсадзе Ю.М., Статья в этом же сборнике, С. 182.
3. Salam A., *Nucl. Phys.*, 1956, **2**, 173.  
Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, 1957, **106**, 1298.
4. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Ширков Д.В., Метод дисперсионных соотношений и теория возмущений, Препринт ОИЯИ, 1959.

# До проблеми радіаційного розпаду $\pi^-$ -мезона

I.Ю. КРИВСЬКИЙ, Ю.М. ЛОМСАДЗЕ, В.І. ФУЩИЧ, І.В. ХІМІЧ

From the viewpoint of the relativistic invariance of quantum field theory and on the basis of universal Fermi interactions, employing the method of renormalising, the authors obtained a finite expression for the probability of  $\pi \rightarrow e + \nu + \gamma$  decay in the first non-vanishing approximation of the perturbation method. The result of the ratio of the probability of  $\pi \rightarrow e + \nu + \gamma$  and  $\pi \rightarrow \mu + \gamma$  decays obtained in this way is  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$ , which agrees quite satisfactorily with the experiment.

В рамках релятивістськи інваріантної теорії квантованих полів на підставі універсальної Фермі-взаємодії за допомогою методу перенормувань одержано скінченний вираз для імовірності розпаду  $\pi \rightarrow e + \nu + \gamma$  в першому незникаючому наближенні методу збурень. Одержане на підставі цього результату відношення ймовірностей розпадів  $\pi \rightarrow e + \nu + \gamma$  та  $\pi \rightarrow \mu + \nu$ , рівне  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$ , цілком задовільно узгоджується з експериментом.

**1.** Найновіші експерименти приводять до таких даних для відношень імовірностей різних розпадів  $\pi^-$ -мезона:

$$\rho = \frac{W(\pi \rightarrow e + \nu)}{W(\pi \rightarrow \mu + \nu)} \sim 10^{-4} \quad (\text{див. [1, 2]}), \quad (1)$$

$$\rho_\gamma = \frac{W(\pi \rightarrow e + \nu + \gamma)}{W(\pi \rightarrow \mu + \nu)} < 2 \cdot 10^{-6} \quad (\text{див. [3]}), \quad (2)$$

які свідчать про дуже малі імовірності розпадів

$$\pi \rightarrow e + \nu, \quad (3)$$

$$\pi \rightarrow e + \nu + \gamma. \quad (4)$$

З другого боку, з точки зору теорії квантованих полів розпади (3) і (4) повинні існувати за рахунок безумовно існуючого зв'язку  $\pi$ -мезонного та нуклонного (а також, звичайно, гіперонного) полів і загальноприйнятої в даний час універсальної  $\beta$ -розпадної взаємодії Гелл-Манна–Фейнмана [4]. Оскільки при розрахунках імовірностей цих розпадів за методом збурень виникають розбіжні вирази, може здатися, що сучасна теорія квантованих полів явно суперечить експериментальним даним (1) і (2).

Стандартний шлях обходу цієї трудності з нескінченностями полягав до цього часу або в розгляді виключно відношень теоретичних імовірностей розпадів, при якому можна надіятися на випадкове скорочення цих нескінченностей [5, 6], або в "обрізуванні" розбіжних інтегралів по віртуальних імпульсах [7]. При цьому, однак, треба мати на увазі, що перший підхід має обмежену цінність, оскільки

експериментально вимірюються не тільки відношення імовірностей розпадів, а й їх абсолютні значення, а другий підхід взагалі повинен бути визнаним принципово не задовільним внаслідок порушення ним релятивістської інваріантності теорії та, більше того, його невиправданої довільності.

Але існує також і інша можливість подолання цієї труднощі. Як показано у [8], всі нескінченності, що виникають при розрахунках розпаду (3) в наближенні, першому по константі  $\beta$ -зв'язку і як завгодно високому по константах сильних зв'язків, можуть бути точно обернені в нуль за допомогою релятивістськи інваріантної процедури перенормування константи  $g'$  прямого зв'язку  $\pi$ -мезонного та електронно-нейтрінного полів. Внаслідок цього розпад (3) в такому наближенні може відбуватися лише за рахунок прямого зв'язку  $\pi$ -мезонного та електронно-нейтрінного полів, і належним вибором  $g'$  його імовірність може бути приведена у відповідність з експериментальними даними (1).

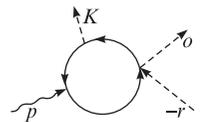
Щодо розпаду (4), то після проведення перенормування (або узагальненої регуляризації розбіжних інтегралів) імовірність цього розпаду лише приводиться до скінченного результату [8]. Мета даної роботи — показати, що принаймні в першому незникаючому наближенні методу збурень цей скінчений результат, одержаний — підкреслимо ще раз — строго релятивістськи інваріантним шляхом, не суперечить експериментальним даним (2).

**2.** Гамільтоніан взаємодії системи квантованих полів, що приймають участь у розпаді (4), береться у загальноприйнятому вигляді

$$H =: ig\bar{\Psi}\gamma_5\tau_i\Psi\varphi_i + \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{\Psi}_p\gamma_\mu(1 + F\gamma_5)\Psi_n\psi_e\gamma_\mu(1 + \gamma_s)\psi_\nu + h.c.] : + \quad (5)$$

+ зв'язок з електромагнітним полем

Для оцінки порядку величини  $W(\pi \rightarrow e + \nu + \gamma)$  розглянемо одну з трьох можливих діаграм першого незникаючого наближення методу збурень, а саме діаграму (I), де  $p, k, q$  та  $r$  — чотиримірні імпульси  $\pi$ -мезона, фотона, електрона та антинейтріно, відповідно (див. рис.).



Після усунення розбіжностей (див. [8]) імовірність розпаду (4) для  $\pi$ -мезона, що знаходиться в стані спокою, представляється у вигляді ( $h = c = 1$ )

$$W(\pi \rightarrow e + \nu + \gamma) = \frac{g^2 e^2}{4\pi 4\pi} G^2 \frac{1}{\mu M^2 (2\pi)^7} \int \int \int d\Omega_k d\Omega_r dk_0 \times \quad (6)$$

$$\times \frac{k_0 r_0}{\mu - k_0 [1 - \cos(\mathbf{k}\mathbf{r})]} \left\{ q_\mu r_\nu (X_{\alpha\mu} X_{\alpha\nu} - Y_{\alpha\mu} Y_{\alpha\nu}) - \right.$$

$$\left. - \frac{(\mathbf{q}\mathbf{r})}{2} (X_{\mu\nu}^2 - Y_{\mu\nu}^2) + X_{\delta\mu} Y_{\delta\nu} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha r_\beta \right\},$$

де чотиримірний скалярний добуток двох векторів  $a, b$  визначено так:  $(ab) = a_\mu b_\mu = (\mathbf{a}\mathbf{b}) - a_0 b_0$ ;  $\mathbf{q}, \mathbf{r}$  та  $q_0$  виражаються через  $k_0 = |\mathbf{k}|$  із співвідношень  $\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = 0, \mu - k_0 - q_0 - r_0 = 0, r_0 = |\mathbf{r}|, q_0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ ;  $M, \mu, m$  — маси спокою нуклона,  $\pi$ -мезона, електрона відповідно;  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  — одиничний повністю антисиметричний тензор четвертого рангу і для  $(\frac{\mu}{M})^2 \ll 1$

$$X_{\mu\nu} = \frac{F}{3} [p_\mu (3k_\nu - 2p_\nu) + k_\mu p_\nu - (kp)\delta_{\mu\nu}], \quad Y_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_\alpha p_\beta. \quad (7)$$

3. Чисельна оцінка виразу (6) для констант  $\frac{g^2}{4\pi} = 15$ ,  $\frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ ,  $G^2 = 2 \cdot 10^{-65} \text{см}^2$  та  $F = 1$  дає

$$W(\pi \rightarrow e + \nu + \gamma) = \frac{1}{\tau(\pi \rightarrow e + \nu + \gamma)} \sim 10 \text{ сек}^{-1}. \quad (8)$$

Якщо врахувати, що експериментальне значення  $\tau(\pi \rightarrow \mu + \nu) \approx 2,5 \cdot 10^{-8}$  сек., то відношення  $\rho_\alpha$ , дорівнюватиме  $\sim 3 \cdot 10^{-7}$ , що задовільно узгоджується з експериментальними даними (2)\*.

Зауважимо, що вклад у імовірність розпаду (4) від псевдовекторного  $\beta$ -розпадного варіанта приблизно на порядок перевищує вклад від векторного варіанта. Цей результат збігається з твердженням, наведеним в роботі [6], про подавлення в розпаді (4) векторного  $\beta$ -розпадного варіанта, хоч величина цього подавлення в нашому випадку на порядок менша.

Зауважимо також, що коли замість перенормування (або узагальненої регуляризації) провести “обрізування” логарифмічне розбіжного інтеграла у виразі для  $W(\pi \rightarrow e + \nu + \gamma)$ , одержаному по діаграмі (I), на деякому імпульсі  $\Lambda$ , як це звичайно і робиться [7], то для одержання нашої чисельної оцінки (8) таке “обрізування” треба провадити на імпульсі, що задовольняє умову:  $\ln(\Lambda/M) \sim 10^{-3}$ . Оскільки автор статті [7] вибрав  $\ln(\Lambda/M) \sim 1$ , то не дивно, чому він не одержав узгодження з експериментом. Цей приклад показує, наскільки треба бути обережним при оцінці результатів, одержаних за допомогою процедури “обрізування” розбіжних інтегралів, яка порушує релятивістську інваріантність теорії.

1. Tazzini T., Fidecaro G., Mevviron A., Paula H., Tollestrup A., *Phys. Rev. Lett.*, 1958, **1**, 247.
2. Impeduglia G., Plano R., Prodel A., Samios N., Schwarz M., Steinberger J., *Phys. Rev. Lett.*, 1958, **1**, 249.
3. Труды VII Рочестерской конференции по физике высоких энергий, 1958.
4. Feynmann R., Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 193.
5. Treinmann C., Wyld H., *Phys. Rev.*, 1956, **101**, 1552.
6. Вакс В.Г., Йоффе Б.Л., *ЖЭТФ*, 1958, **35**, 221.
7. Кобзарев И.Ю., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 551.
8. Ломсадзе Ю.М., Проблемы современной теории элементарных частиц, Труды Всесоюзной межвузовской конференции в Ужгороде, 2–6 октября 1958 г., 1959, № 2.

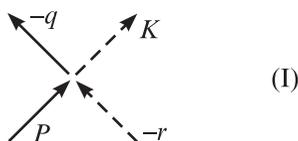
\*В чисельну оцінку для  $W(\pi \rightarrow e + \nu + \gamma)$ , наведену в статті [8], вкралася помилка, що привела до величини  $\rho_\alpha$ , на два порядки більшої від експериментальної.

# О двухнейтринной аннигиляции электрона с позитроном

И. КРИВСКИЙ, Ю. ЛОМСАДЗЕ, В. ФУЩИЧ, И. ХИМИЧ

1. Как известно, одним из следствий общепринятого в настоящее время универсального взаимодействия Гелл-Манна–Фейнмана [1] является возможность процесса

$$e^- + e^+ \rightarrow \nu + \bar{\nu}. \quad (1)$$



Рассчитанное обычным путем в первом исчезающем приближении метода возмущений (диаграмма (I)) дифференциальное эффективное сечение этого процесса в системе центра инерции имеет вид ( $\hbar = c = 1$ ):

$$\frac{d\sigma_\nu}{d\Omega} = \left(\frac{G}{2\pi}\right)^2 \frac{P}{4\sqrt{P^2 - m^2}} \left\{ 4P^2 - m^2 + \right. \\ \left. + 6P\sqrt{P^2 - m^2} \cos \Theta + 2(P^2 - m^2) \cos^2 \Theta \right\}, \quad (2)$$

где константа универсального взаимодействия  $G^2 \approx 2 \cdot 10^{-65} \text{см}^4$ ,  $P$  — полная энергия электрона в с.ц.и.,  $m$  — масса покоя электрона и  $\Theta$  — угол между начальным электроном и конечным нейтрино в той же системе.

Полное сечение процесса (1) представляется в виде

$$\sigma_\nu = \frac{G^2}{12\pi} \frac{P}{\sqrt{P^2 + m^2}} (14P^2 - 5m^2). \quad (3)$$

Заметим, что сечение процесса

$$\mu^- + \mu^+ \rightarrow \nu + \bar{\nu}, \quad (4)$$

также вытекающего из схемы Гелл-Манна–Фейнмана, получается из выражений (2) и (3) простой заменой массы электрона на массу  $\mu$ -мезона.

2. Экспериментальное обнаружение процесса (1) (или (4)) могло бы явиться прямым доказательством схемы универсального взаимодействия. Разумеется, сечение процесса (1) неизмеримо меньше, во всяком случае при обычных энергиях, сечения  $\sigma_\gamma$  двухфотонной аннигиляции электрона с позитроном (при  $P \sim 13$  Мэв,  $\sigma_\nu/\sigma_\gamma \sim 10^{-15}$ ).

Однако, как видно из (3), с ростом  $P$  при больших  $P$  сечение  $\sigma_\nu$  растет как  $P^2$ , в то время как сечение  $\sigma_\gamma$ , падает как  $P^{-2} \ln P$  (последнее следует из результатов статей [2, 3]). Поэтому при энергиях порядка десятков Бэв оба процесса начнут конкурировать. Это обстоятельство при учете бурных темпов развития техники эксперимента в настоящее время дает основание рассчитывать на возможность постановки экспериментов по обнаружению процесса (1) (или (4)) в недалеком будущем.

В заключение, пользуясь аргументацией статьи [4] (см. также [5]) для процесса тормозного испускания нейтринной пары, отметим, что процесс (1) может, по-видимому, приводить к макроскопическим эффектам в больших телах, находящихся при высоких температурах (например, в звездах). Благоприятствующим фактором здесь являлся то обстоятельство, что сечение процесса (1) по порядку величины в  $(137)^2$  раз больше сечения тормозного излучения нейтринной пары на единичном электрическом заряде.

1. Feymann R., Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 193.
2. Dirac P., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 1930, **26**, 361.
3. Jamm I., *Zs. f. Phys.*, 1930, **62**, 545.
4. Понтекорво Б., *ЖЭТФ*, 1959, **36**, 1615.
5. Гандельман Г.М., Пинаев В.С., *ЖЭТФ*, 1959, **37**, 1072.

# Аналитические свойства амплитуд рождения в одночастичном приближении как функции двух переменных

В.И. ФУЩИЧ

1. Исследованию аналитических свойств амплитуд рождения как по теории возмущений, так и на основе аксиом теории поля посвящено в последнее время довольно много работ [1–4]. Это связано, во-первых, с попыткой учета высших вкладов в условие унитарности, во-вторых, с различными приближенными методами (метод Чу и Лоу, одночастичные приближения), которые основываются на аналитических свойствах амплитуд рождения.

Зная аналитические свойства амплитуд рождения, можно судить о возможности применения метода Чу и Лоу [5]. Этот метод, как известно, основан на экстраполяции функции  $f(s, t)$ , которая определенным образом связана с вкладом в амплитуду рождения от диаграммы рис. 1 [5], заданной в физической области относительно переменной  $t$  ( $t \leq 0$ ) при фиксированном  $s$ , до точки  $t = \mu^2$ , где  $\mu$  — масса  $\pi$ -мезона, если рассматривается процесс  $\pi + n \rightarrow n + \pi + \pi$ .

Очевидно, что для допустимости такой экстраполяционной процедуры функция  $f(s, t)$  должна быть аналитичной в области  $t \leq \mu^2$ .

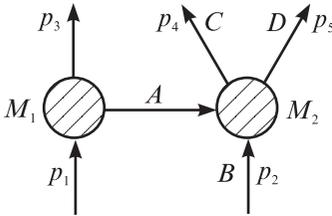


Рис. 1.

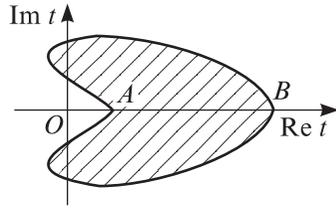


Рис. 2.

В настоящей заметке исследуются аналитические свойства амплитуды простого рождения как функции двух переменных ( $t$  и  $t_{24}$ ) в одночастичном приближении, т.е. вклада в амплитуду рождения от диаграммы рис. 1; обсуждается вопрос о применимости метода Чу и Лоу для процесса  $\pi + n \rightarrow n + \pi + \pi$ . Исследование проводится с помощью интегрального представления Йоста–Лемана–Дайсона.

2. Вклад в амплитуду рождения от диаграммы рис. 1 запишется следующим образом:

$$T^{(5)} = V(p_1^2, p_3^2, t) T^{(4)}(p_2^2, p_4^2, p_5^2, t, t_{24}, s_{45}) \frac{1}{t - \mu^2}, \tag{1}$$

$$\text{где } s_{45} = (p_4 + p_5)^2 \equiv s, t_{24} = (p_2 - p_4)^2, t_{13} = (p_1 - p_3)^2 \equiv t.$$

Из (1) видно, что областью аналитичности  $T^5$ , например, относительно переменной  $t$ , будет пересечение областей аналитичности функций  $V(t)$  и  $T^4(t)$ . Поэтому для полноты изложения придется остановиться на аналитических свойствах вершинной функции  $V(t)$ . В дальнейшем будем предполагать, что  $p_1^2 = p_3^2 = m^2$  — масса нуклона, а все другие частицы — мезоны.

Хорошо известно, что, исходя из аксиом теории поля (лоренцвариантности, причинности и спектральности), удастся доказать дисперсионные соотношения только для  $\mu > (\sqrt{2} - 1)m$ , т.е. для нефизических масс. Это означает, что в комплексной окрестности точки  $t = 4\mu^2$  функция  $V(t)$  может иметь особенности. Эти особенности были исследованы Эмме [6] с помощью так называемого “прямого представления” вершинной функции, т.е.

$$V(z_1, 4z_2, t) = \int_0^1 d\xi \int_{\xi-1}^{\xi+1} d\eta \int_{k_1}^{\infty} dk \times \quad (2)$$

$$\times \frac{\rho(k, \xi, \eta, 4z_2)}{[2k^2 + 2(1 + \xi^2 - \eta^2)z_2^2 - (z_1 + t) + \eta(z_1 - t)]^2 - \xi^2 \lambda(z_1, 4z_2, t)},$$

где

$$k_1 = \max \left\{ 0; a - z_2 [(1 + \eta)^2 - \xi^2]^{1/2}; c - z_2 [(1 - \eta)^2 - \xi^2]^{1/2} \right\}. \quad (3)$$

В нашем частном случае  $a = b = m + \mu$ ,  $c = 2\mu$ ,  $2z_2 = m$ .

Приравняв знаменатель выражения (2) к нулю, получим множество точек в плоскости  $t$ , в которых  $V(t)$  может иметь особенности. Это множество будет следующим:

$$\operatorname{Re} t = 2z_2 \frac{(1 + \eta) [\gamma^2 - (1 - \eta)^2 - \xi^2] - 4\xi^2}{(1 + \eta)^2 - \xi^2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{Im} t = -(\operatorname{Re} t)^2 + \frac{\{\operatorname{Re} t [(1 + \eta)^2 - \xi^2] + 8\xi^2 z_2\}^2}{(1 + \eta)^2 [(1 + \eta)^2 - \xi^2]}, \quad (5)$$

где  $\gamma \geq \frac{k_1}{z_2}$ .

Приведем качественную картину области аналитичности. Координаты точек  $(\operatorname{Re} t)_A = \frac{4m\mu^2}{2m - \mu}$  и  $(\operatorname{Re} t)_B = \frac{m^2(2m + \mu)}{2\mu}$  (см. рис. 2).

Здесь важно отметить, что  $V(t)$  аналитична вдоль отрицательной части действительной оси, включая точку  $t = 2\mu^2$ . Однако появление комплексных особенностей вблизи точки  $t = \mu^2$  может отрицательно повлиять на практическое осуществление экстраполяционной процедуры Чу–Лоу.

**3.** Исследуем теперь аналитические свойства функции  $T^4$ . Амплитуду процесса  $A + B \rightarrow C + D$  можно записать в виде

$$T^{(4)} = - \int dx \exp \left[ i \frac{p_1 - p_3 - p_2}{2} x \right] \langle p_4 p_5 \text{ out} | R'(A) \left( \frac{x}{2} \right) A \left( -\frac{x}{2} \right) 0 \rangle. \quad (6)$$

Следует особо подчеркнуть, что выражение (6) определяет  $T^4$  не только для тех векторов  $p_1 - p_3 \equiv k$  и  $p_2$ , которые лежат на массовой оболочке, но и для тех

векторов, для которых интеграл (6) существует. Это обстоятельство дает возможность рассматривать  $(p_1 - p_3)^2 = t$  как независимую комплексную переменную.

С помощью аналогичных рассуждений, как и в [7] для случая упругого рассеяния, имеем:

$$T^{(4)} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{du d\kappa^2 \varphi(u, \kappa^2, p_4, p_5)}{\left[\frac{1}{2}(k - p_2) - u\right]^2 - \kappa^2}, \quad (7)$$

где  $\varphi$  — весовая функция, обращающаяся в нуль вне области  $0 \leq u \leq \frac{s^{1/2}}{2}$ ;  
 $-\frac{s^{1/2}}{2} + u \leq u_0 \leq \frac{s^{1/2}}{2} - u$ ;

$$\kappa \geq \max \left[ 0; m_1 - \sqrt{\left(\frac{s^{1/2}}{2} - u_0\right)^2 - u^2}; m_2 - \sqrt{\left(\frac{s^{1/2}}{2} - u_0\right)^2 - u^2} \right]. \quad (8)$$

Выбрав систему центра масс  $\vec{p}_4 + \vec{p}_5 = 0$  и вводя полярные координаты

$$\vec{p}_4 = |\vec{p}_4| (1, 0, 0), \quad \vec{k} = K(\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \vec{u} = u(\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta),$$

перепишем выражение (7) в виде:

$$T = -\frac{1}{4\pi K(s, t)} \int du_0 \int u du \int d\kappa^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \frac{\varphi(u_0, u^2, \cos \alpha \sin \beta, \kappa^2, s)}{X(s, t) - \cos(\theta - \alpha)}, \quad (9)$$

где

$$X(s, t) = \frac{K^2(s, t) + u^2 + \kappa^2 - \left(u_0 + \frac{\mu^2 - t}{2s^{1/2}}\right)^2}{2K(s, t)u \sin \beta}, \quad (10)$$

$$K^2 = \frac{(s + \mu^2 - t)^2 - 4\mu^2 s}{4s}. \quad (11)$$

Поскольку вся зависимость от  $t$  и  $\cos \theta$  ( $s$  — фиксировано) выделена в знаменателе, то  $T^{(4)}$  может иметь особенности за счет нулей знаменателя выражения (9), а также при тех  $t$ , для которых  $K(s, t) = 0$ , т.е. при

$$t = \left(s^{1/2} \pm \mu\right)^2. \quad (12)$$

Для определения области аналитичности  $T^{(4)}$  рассмотрим такие случаи:

- 1)  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ ,  $t$  — комплексное;
- 2)  $-\infty \leq t < m^2$ ,  $\cos \theta$  — комплексное;
- 3)  $t$  и  $\cos \theta$  — комплексные.

1) В этом случае знаменатель выражения (9) может обращаться в нуль, когда

$$-1 \leq X(s, t) \leq 1. \quad (13)$$

Чтобы найти границу области аналитичности относительно переменной  $t$ , необходимо из (10) выразить  $t$  как функцию  $X, u_0, u, \kappa^2, \sin \beta$  и найти минимальное  $t$ , при котором знаменатель может еще обращаться в нуль, причем следует учесть условия (8) и (13). В работе Дремина [8] было проведено такое детальное исследование для мнимой части амплитуды мезон-нуклонного упругого рассеяния на нулевой угол. Так как знаменатель выражения (9) совпадает с одним из знаменателей работы [8] [см. формулу (5)], то мы приведем здесь только окончательный результат — вид границы области аналитичности (в единицах  $\mu$ ) с учетом, что в нашем случае  $m_1 = m_2 = 2\mu$ , и при условии (12).

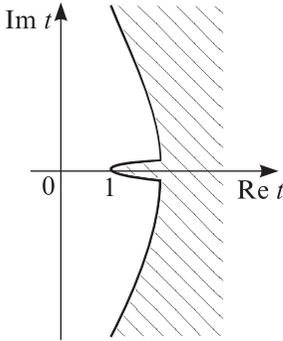


Рис. 3.

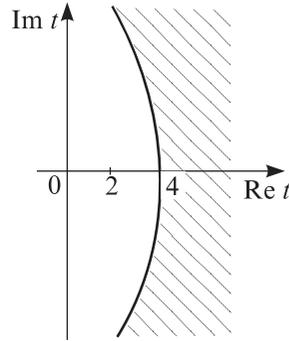


Рис. 4.

Из приведенных рисунков 3 и 4<sup>1</sup> вытекает, что при  $s \geq 9\mu^2$  между физической областью переменной  $t$  ( $t \leq 0$ ) и полюсом в точке  $t = \mu^2 T^{(5)}$  не имеет других особенностей на действительной оси, а это означает, что и функция  $f(s, t)$  не будет иметь особенностей в этой же области.

2) Если  $t$  фиксировано в вышеуказанной области, то  $T^{(4)}$  как функция<sup>2</sup>  $\cos \theta$  аналитична в эллипсе с полуосями  $x_0(s, t)$ ,  $\sqrt{x_0^2(s, t) - 1}$ , где

$$x_0(s, t) = \left\{ 1 + \frac{(m_1^2 - t)(m_2^2 - \mu^2)}{K^2(s, t) [s - (m_1 - m_2)^2]} \right\}. \quad (14)$$

Областью аналитичности  $T^{(4)}$  в трехмерном пространстве переменных  $\text{Re } t$ ,  $\text{Re } \cos \theta$  и  $\text{Im } \cos \theta$  будет область, приведенная на рис. 5. Уравнением верхней части поверхности ( $0 \leq \text{Re } t \leq m_1^2$ ), приведенной на рис. 5, является поверхность эллипсоида

$$\frac{(\text{Re } \cos \theta)^2}{\tilde{x}_0^2} + \frac{(\text{Im } \cos \theta)^2}{\tilde{x}_0^2 - 1} + \frac{\text{Re } t}{m_1^4} = 1, \quad (15)$$

а уравнением нижней части ( $-\infty \leq \text{Re } t \leq 0$ ) — уравнение поверхности эллипсоида

$$\frac{(\text{Re } \cos \theta)^2}{\tilde{x}_0^2} + \frac{(\text{Im } \cos \theta)^2}{\tilde{x}_0^2 - 1} + \frac{(\text{Re } t)^2}{\infty} = 1, \quad (16)$$

<sup>1</sup>На рис. 3 незаштрихованная область — область аналитичности  $T^{(4)}$  при  $s = 4\mu^2$  вблизи точки  $t = \mu^2$ , на рис. 4 — вид области аналитичности  $T^{(4)}$  при  $s \geq 9\mu^2$  вблизи точки  $t = \mu^2$ .

<sup>2</sup> $\cos \theta$  — линейная функция  $t_{24}$ .

где

$$\tilde{x}_0 = \left\{ 1 + \frac{m_1^2(m_2^2 - \mu^2)}{K^2(s, 0)[s - (m_1 - m_2)^2]} \right\}. \quad (17)$$

Следует заметить, что все эти рассуждения справедливы при таких  $s$ , при которых  $K^2(s, t) > 0$  и  $s > (m_1 - m_2)^2$ .

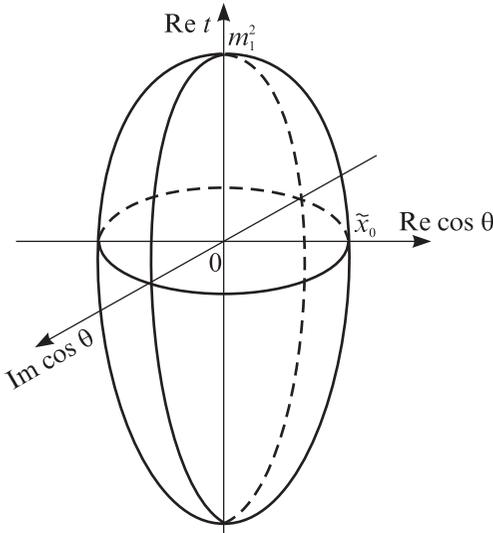


Рис. 5

3) Чтобы избавиться от неоднозначности в знаменателе выражения (9)  $\sqrt{K^2}$ , установим область аналитичности не для самой функции  $T^{(4)}$ , а для некоторой комбинации ее, а именно:

$$\tilde{T}^{(4)} = T^{(4)}[s, \cos(\theta - \pi), t] - T^{(4)}[s, \cos \theta, t]. \quad (18)$$

После несложных выкладок получаем, что  $T^{(4)}$  будет аналитической функцией комплексных переменных  $t$  и  $\cos \theta$  для множества тех точек, для которых имеют место условия:

$$\begin{aligned} & (\text{Re } \cos \theta)^4 - 6(\text{Re } \cos \theta)^2(\text{Im } \cos \theta)^2 + (\text{Im } \cos \theta)^2 + (\text{Re } X^2)^2 - (\text{Im } X^2)^2 - \\ & - 2 \text{Re } X^2 \{ [(\text{Re } \cos \theta)^2 - (\text{Im } \cos \theta)^2] \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha \} + \\ & + 4 \text{Im } X^2 \text{Re } \cos \theta \text{Im } \cos \theta \cos 2\alpha - 2 [(\text{Re } \cos \theta)^2 - (\text{Im } \cos \theta)^2] \sin^2 \alpha \neq 0, \quad (19) \\ & (\text{Re } X^2)(\text{Im } X)^2 - 2(\text{Re } \cos \theta)(\text{Im } \cos \theta) \text{Re } X^2 \cos 2\alpha - \\ & - \text{Im } X^2 \{ [(\text{Re } \cos \theta)^2 - (\text{Im } \cos \theta)^2] \cos 2\alpha + \sin^2 \alpha \} - \\ & - 2(\text{Re } \cos \theta)(\text{Im } \cos \theta) \sin^2 \alpha \neq 0. \end{aligned}$$

4. Для полного ответа на вопрос о применимости метода Чу и Лоу необходимо было бы исследовать аналитические свойства амплитуд рождения в высших приближениях (двухчастичном, трехчастичном и т.д.), но поскольку такая задача

связана с принципиальными трудностями, то обычно ограничиваются только диаграммами в одночастичном приближении, т.е. полагают, что особенности, которые могут возникнуть при учете высших приближений, лежат намного выше, чем полюс в точке  $t = \mu^2$  функции  $T^{(5)}$ . Такое приближение, по-видимому, применимо, как это указано в [5], при малых передачах импульса (порядка  $\mu$ ). Однако, если ограничиться только диаграммой рис. 1, то особенности  $T^{(5)}$ , которые могут возникнуть за счет вершин  $M_1$  и  $M_2$ , лежат выше полюса в точке  $t = \mu^2$  для процесса  $\pi + n \rightarrow n + \pi + \pi$  при  $s \geq 9\mu^2$  и  $t_{24} \leq 0$  (физическая область), можно заключить, что и функция  $f(s, t)$  при  $s \geq 9\mu^2$  будет аналитична в области  $t \leq 2\mu^2$ , т.е. метод Чу и Лоу применим для вышеуказанного процесса.

Полученные области аналитичности функции  $T^{(5)}$  относительно переменных  $t$  и  $t_{24}$  значительно больше областей аналитичности, которые были получены Асколи [3], что естественно, поскольку нами рассмотрено только одночастичное приближение полной амплитуды рождения.

Эти результаты могут быть обобщены на случай, когда из вершины  $M_2$  выходит  $n$  линий.

1. Tarsky J., *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 1.
2. Ascoli R., Minguzzi A., *Phys. Rev.*, 1960, **118**, 1435.
3. Ascoli R., *Nuovo Cim.*, 1960, **18**, 754.
4. Kim Y.S., *Phys. Rev.*, 1961, **124**, 1632.
5. Chew G.F., Low F.E., *Phys. Rev.*, 1959, 1640.
6. Oehme R., *Phys. Rev.*, 1960, **117**, 1151.
7. Lehman H., *Nuovo Cim.*, 1958, **10**, 579.
8. Дремин И.М., *ЖЭТФ*, 1961, **41**, 821.

# Аналітичні властивості узагальнених петльових діаграм

В.І. ФУЩИЧ

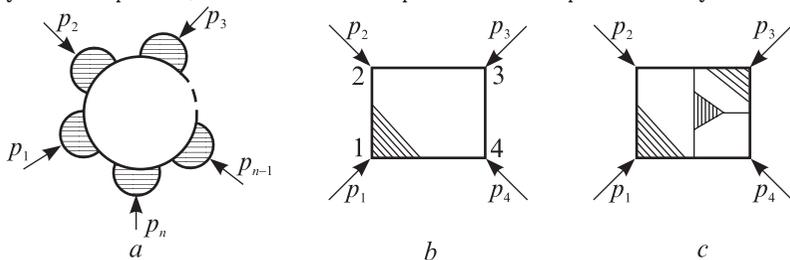
A method is proposed for finding the singularity surface for diagrams of fig. 1 type. An equation is obtained for the singularity surface for diagrams of type *b* in any order of the theory of perturbations. The equation of the singularity surface is obtained, using the integral representation for the vertex of functions [2] and [3], as well as Landau's condition.

Пропонується метод знаходження поверхні сингулярності для діаграм, що наведені на рисунку. Отримано рівняння поверхні сингулярності для діаграм типу *b* в довільному порядку теорії збурень. Рівняння поверхні сингулярності ми отримали, використовуючи інтегральне представлення для вершинної функції [2] і [3], а також умову Ландау.

Для знаходження сингулярностей внеску в амплітуду розсіювання або породження від довільної діаграми Фейнмана доводиться розв'язувати рівняння Ландау. Така задача досить легко розв'язується для простих діаграм. Однак для діаграм з великим числом внутрішніх ліній рівняння Ландау практично не можна розв'язати. Тому постає питання: як одержати рівняння поверхні сингулярності діаграми Фейнмана в довільному порядку теорії збурень?

У зв'язку з цим слід відмітити роботу [1], де одержано параметричні рівняння поверхні сингулярності для власних особливостей діаграми, виходячи з рівнянь Ландау.

В даній статті пропонується метод, за допомогою якого можна одержати рівняння поверхні сингулярності для узагальнених петльових діаграм (рисунок) в довільному порядку теорії збурень. Відмітимо, що область аналітичності, яку можна одержати з цього рівняння, буде меншою, ніж область аналітичності, яку можна було б одержати, якщо дослідити рівняння поверхні Ландау.



Для простоти розглянемо діаграму *b*. Всі міркування, приведені для цієї діаграми, як буде видно нижче, легко переносяться на діаграми з числом зовнішніх ліній більше ніж чотири, тобто на діаграми типа *a*.

Припустимо, що всі частинки — бозони, і в кожному вузлі діаграми сходяться три лінії. Вклад в амплітуду розсіювання від діаграми  $b$  запишемо в такому вигляді:

$$T^{(4)} = \int dq_1 \prod_{i=1}^4 \frac{V_1(M_1^2, q_1^2, q_4^2)}{q_i^2 - m_i^2}, \quad (1)$$

де  $V_1(M_1^2, q_1^2, q_4^2)$  — вершинна функція, яка зіставляється з вершиною 1;  $M_i^2 = p_i^2$ . Далі використаємо інтегральне зображення для  $V_1(M_1^2, q_1^2, q_4^2)$  яке було одержано в роботах [2] і [3]. Тоді вираз (1) переписеться так:

$$T^{(4)} = \int_0^1 d\beta \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta \varphi(\beta, \eta) \int dq_1 \frac{1}{[\beta q_1^2 + (1 - \beta)q_4^2 - \eta] \prod_{i=1}^4 (q_i^2 - m_i^2)}, \quad (2)$$

$\varphi(\beta, \eta)$  — довільна, взагалі кажучи, узагальнена функція,  $\eta_0 > 0$ ; точне значення  $\eta_0$  наведене в роботі [3]. Інтегруючи по  $q_1$ , одержимо

$$T^{(4)} = \int_0^1 d\beta \int_{\eta_0}^{\infty} d\eta \varphi(\beta, \eta) \int_0^1 d\alpha_1 \dots \int_0^1 d\alpha_5 \frac{\delta\left(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i\right)}{\{D\}^3}, \quad (3)$$

де

$$D = a - b,$$

$$a = -\alpha_1 \eta + \alpha_1(1 - \beta)M_2^2 - m_1^2 \alpha_2 + \alpha_3(M_2^2 - m_2^2) + \alpha_4(u - 2m_3^2) + \alpha_5(M_1^2 - m_4^2), \quad (4)$$

$$b = \alpha_1^2(1 - \beta)^2 M_1^2 + \alpha_3^2 M_2^2 + \alpha_4^2 u + \alpha_5^2 M_1^2 - \alpha_1(1 - \beta)[\alpha_3(s - 2m^2) - \alpha_4 u - 2M_1^2 \alpha_5] + \alpha_3[\alpha_4(u + M_2^2 - M_3^2) - \alpha_5(s - 2m^2)] + \alpha_4 \alpha_5 u.$$

Рівняння типу Ландау для  $T^{(4)}$  —

$$D = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^5 \alpha_i = 0. \quad (6)$$

Для знаходження явного вигляду рівняння поверхні сингулярності необхідно розв'язати лінійну неоднорідну систему п'яти рівнянь (6) і розв'язок підставити в (5). Одержане рівняння для  $s, t, u$  і буде рівнянням поверхні сингулярності. У випадку, коли зовнішні і внутрішні маси дорівнюють ( $m$ ), рівняння поверхні сингулярності має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - \beta)(u - 2m^2)s + (m^2\beta - \eta) + [m^2(1 - \beta + 2\lambda) - 2\lambda\eta]t &= \\ = m^2[m^2(3\beta - 2) - \eta], \end{aligned} \quad (7)$$

$0 \leq \beta < 1$ ,  $\eta \geq \eta_0$ ,  $\lambda$  — довільний параметр, який з'явився тому, що детермінант системи (6) дорівнює нулю.

Очевидно, що аналогічний метод можна застосувати і для діаграм типу  $c$ , але при цьому потрібно використати більш складне інтегральне зображення для вершинної функції [2, 3] (формули (16.6) і (11) відповідно).

На закінчення наведемо без доведення таке твердження: вклад в амплітуду породження від діаграми типу  $a$  не має власних особливостей, якщо число зовнішніх ліній  $n \geq 6$ , тобто для вивчення аналітичних властивостей діаграм  $a$  досить вивчити її редуковані діаграми, які одержуються з неї викресленням однієї з внутрішніх ліній  $q_i$ . Це твердження можна довести методом Брауна [4].

1. Логунов А.А., Тодоров И.Т., Черников Н.А., *Годишник на Софийския университет*, 1962, **55**, 117.
2. Nakanishi N., *Suppl. Progr. Theor. Phys.*, 1961, **18**, 1.
3. Лю И-чень, Тодоров И.Т., *ДАН СССР*, 1963, **148**, 806.
4. Brown L.M., *Nuovo Cim.*, 1961, **22**, 178.

# Про полюси амплітуди народження для процесу $\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi$

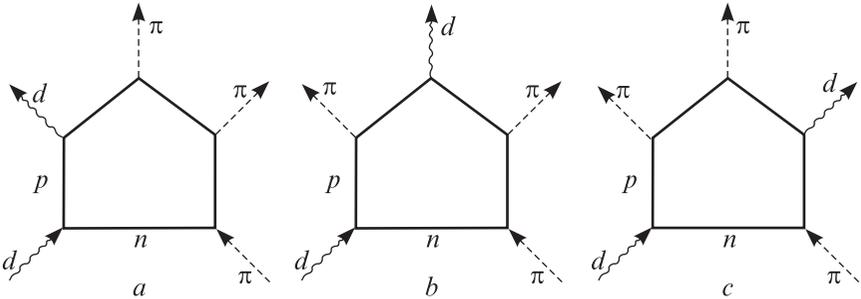
В.І. ФУЩИЧ

The author studies the contribution poles in the generation amplitude from the diagrams of the drawing, as well as from diagrams obtained from the diagrams of the drawing by transposing the external meson lines, for the process  $\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi$  in respect to the invariant  $t_{13}$ . Values are found for other invariants ( $s_{12}$ ,  $s_{34}$ ,  $s_{45}$  and  $t_{25}$ ) with which the poles lie close to the physical region.

Исследуются полюса вклада в амплитуду рождения от диаграмм рисунка, а также от диаграмм, которые получаются из диаграмм рисунка перестановкой внешних мезонных линий, для процесса  $\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi$  относительно инварианта  $t_{13}$ . Найлены значения других инвариантов ( $s_{12}$ ,  $s_{34}$ ,  $s_{45}$  и  $t_{25}$ ), при которых полюса лежат вблизи физической области.

З робіт Ландау і Каткосського [1, 2] випливає, що вклад в амплітуду народження від діаграм, зображених на рисунку, має прості полюси відносно одного з інваріантів (наприклад,  $t_{13}$ ), від яких залежить амплітуда, коли жодний з параметрів Фейнмана не дорівнює нулю.

Оскільки амплітуда має полюси, то природно припустити, що їх можна експериментально виявити. Так, наприклад, вони можуть впливати на величину експериментально вимірюваного перерізу процесів народження (звичайно, при цьому припускається, що “справжня” амплітуда відповідних процесів має такі ж особливості, як і амплітуда в теорії збурень). Іден [3] запропонував дослідити з цією метою процес  $\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi$ . Такий вибір пов’язаний з тим, що амплітуда такого процесу не має полюсів типу Чу–Лоу [4] (в точці  $t = \mu^2$ ) і цим самим полегшує інтерпретацію експериментальних даних.



Щоб експериментально виявити вплив полюсів на величину перерізів вищезазначеного процесу, необхідно детально дослідити їх положення (в площині  $t$ ) і вказати, при накладанні яких умов на інші інваріанти можна чекати експериментального ефекту. Далі ми проведемо таке дослідження. Кук і Тарський [5] знайшли положення полюса відносно одного інваріанта для діаграми  $a$  (не враховуючи діаграм, які одержуються з діаграми  $a$  перестановкою мезонних ліній) при конкретних значеннях інших інваріантів.

**1.** Як відомо, амплітуда простого процесу народження залежить від п'яти незалежних інваріантів. Виберемо такі незалежні інваріанти:

$$\begin{aligned} s_{12} &= (p_1 + p_2)^2, & s_{34} &= (p_3 + p_4)^2, & s_{45} &= (p_4 + p_5)^2, \\ t_{25} &= (p_2 - p_5)^2, & t_{13} &\equiv t = (p_1 - p_3)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $p_1, p_3$  — імпульси дейтрона,  $p_2, p_4$  та  $p_5$  — імпульси мезонів. Крім цих інваріантів зручно ввести ще п'ять інваріантів:  $s_{35} = (p_3 + p_5)^2$ ,  $t_{15} = (p_1 - p_5)^2$ ,  $t_{23} = (p_2 - p_3)^2$ ,  $t_{14} = (p_1 - p_4)^2$  та  $t_{24} = (p_2 - p_4)^2$ . Між цими і незалежними інваріантами можна встановити такі співвідношення:

$$\begin{aligned} s_{35} &= s_{12} - s_{34} - s_{45} + M^2 + 2\mu^2, & t_{15} &= s_{34} - s_{12} - t_{25} + M^2 + 2\mu^2, \\ t_{14} &= t_{25} - t - s_{34} + 2M^2 + \mu^2, & t_{23} &= s_{45} - s_{12} - t + 2M^2 + \mu^2, \\ t_{24} &= t - t_{25} - s_{45} + 3\mu^2, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $M$  — маса дейтрона,  $\mu$  — маса  $\pi$ -мезона.

Будемо досліджувати положення полюсів відносно змінної  $t$ . Зрозуміло, що полюс лежить поза фізичною областю зміни інваріанта  $t$ , а саме, поза відрізком  $[t^-, t^+]$  (випадок, коли полюс лежить всередині цього відрізка, означає, що він знаходиться не на фізичному листі), де

$$t^- = 2(M^2 - p_{10}p_{30}) - \sqrt{(p_{10}^2 - M^2)(p_{30}^2 - M^2)},$$

$$t^+ = 2(M^2 - p_{10}p_{30}) + \sqrt{(p_{10}^2 - M^2)(p_{30}^2 - M^2)},$$

$$p_{10} = \frac{s_{12} + M^2 - \mu^2}{2\sqrt{s_{12}}}, \quad p_{30} = \frac{s_{12} - s_{45} + M^2}{2\sqrt{s_{12}}}, \quad (3)$$

$$p_{20} = \frac{s_{12} - M^2 + \mu^2}{2\sqrt{s_{12}}}, \quad p_{50} = \frac{s_{12} - s_{34} + \mu^2}{2\sqrt{s_{12}}}. \quad (4)$$

Отже, полюс може впливати на величину перерізу, якщо він лежить на дійсній осі ( $\text{Re } t$ ) і поблизу відрізка  $[t^-, t^+]$ .

**2.** Умови Ландау [1] для вищенаведених діаграм мають такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^5 \alpha_i q_i = 0, \quad (5)$$

де  $q_i$  — імпульс, взятий на масовій оболонці  $q_i^2 = m^2$  ( $m$  — маса нуклона), який зіставляється внутрішній лінії діаграми. Використовуючи зв'язок між зовнішніми та внутрішніми імпульсами діаграм, одержимо рівняння для знаходження положення полюсів вкладу в амплітуду народження від діаграм, зображених на рисунку, а також від діаграм, які одержуються з діаграм рисунка перестановкою мезонних ліній:

$$\begin{aligned} D_{1i}(s_{12}, s_{34}, s_{45}, t_{25}, t) &= 0, & D_{2i}(s_{12}, \dots, t) &= 0, \\ D_{3i}(s_{12}, \dots, t) &= 0, & i &= 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (6)$$

Явні вирази для  $D_{1i}$ ,  $D_{2i}$ ,  $D_{3i}$  наведені в додатку.

Тепер знайдемо положення полюсів, зумовлених вкладом в амплітуду від діаграм  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; ці полюси будуть в точках

$$\begin{aligned} t_{11}^k &= 2m^2 + \frac{A_{11}^{12} \pm \sqrt{A_{11}^{11} A_{11}^{22}}}{D_{11}^{1,2}}, \\ t_{21}^k &= 2m^2 - 3\mu^2 + t_{25} + s_{45} + \frac{A_{21}^{12} \pm \sqrt{A_{21}^{11} A_{21}^{22}}}{D_{21}^{1,2}}, \\ t_{31}^k &= 2M^2 - 2m^2 + \mu^2 + s_{45} - s_{12} + \frac{A_{31}^{12} \pm \sqrt{A_{31}^{11} A_{31}^{22}}}{D_{31}^{1,2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Явні вирази для  $A_{11}^{11}, \dots, A_{31}^{22}$ , та  $D_{11}^{1,2}, \dots, D_{31}^{1,2}$  наведені в додатку (див. формули (Д6)–(Д8)).

З (7) випливає, що корені рівнянь для  $D_{11}$ ,  $D_{21}$ ,  $D_{31}$  будуть дійсні, якщо

$$A_{11}^{11} A_{11}^{22} \geq 0, \quad A_{21}^{11} A_{21}^{22} \geq 0, \quad A_{31}^{11} A_{31}^{22} \geq 0. \quad (8)$$

Крім цього з (7) видно, що при збільшенні  $s_{12}$  полюси віддаляються від фізичної області. Отже, полюси амплітуди народження будуть розташовані поблизу (на відстані порядку  $m^2$ ) фізичної області (відносно  $t$ ) при малих значеннях  $s_{12}$ , а саме, коли  $s_{12} \sim 10m^2$ .

$s_{12}$	$s_{34}$	$s_{45}$	$t_{25}$	$t^-$	$t^+$	$t_{11}^k$	$t_{21}^k$	$t_{31}^k$
9,2	5	0,2	-0,2	-2,610	-0,0454	4,08	3,94	-7,395
						4,55	8,01	-5,212
9,4	5	0,3	-0,2	-2,730	-0,0140	4,06	4,06	-8,158
						4,62	8,04	-5,304
9,6	5	0,4	-0,3	-2,715	-0,030	4,10	4,08	-8,695
						4,91	7,74	-5,520
10	5	0,5	-0,3	-2,696	-0,052	4,09	4,21	-9,828
						4,95	7,90	-6,131

В таблиці наведені значення  $t_{11}^k$ ,  $t_{21}^k$ ,  $t_{31}^k$  (в одиницях мас нуклона) при  $s_{12} \sim 10$ , а всі інші інваріанти фіксовані у фізичній області, тобто виконуються умови

$$s_{34} > (M + \mu)^2, \quad s_{45} > 4\mu^2, \quad t_{25} < 0. \quad (9)$$

Верхні цифри у стовпцях 7–9 таблиці відповідають значенням  $t_{11}^k$ ,  $t_{21}^k$  і  $t_{31}^k$  із знаком плюс перед коренем в (7), а нижні — із знаком мінус перед коренем в (7).

Таким чином, крива залежності експериментально вимірюваного перерізу  $\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi$  від  $\cos \theta = \frac{\bar{p}_1 \bar{p}_3}{|\bar{p}_1| |\bar{p}_3|}$  ( $\cos \theta$  — лінійна функція  $t$ ) повинна зростати, якщо  $\theta \rightarrow 180^\circ$  (або  $0^\circ$ ) і інші інваріанти такі:  $s_{12} \sim 10$ ,  $s_{45} \sim 0,4$ ,  $s_{34} \sim 5$ ,  $t_{25} \sim -0,2$ .

### Додаток

Наведемо явні вирази  $D_{1i}$ ,  $D_{2i}$ ,  $D_{3i}$ :

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - t & 2m^2 - t_{25} & 2m^2 - \mu^2 & M^2 - 2m^2 \\ 2m^2 - t & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - s_{45} & M^2 - 2m^2 \\ 2m^2 - t_{25} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & s_{34} - 2m^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - s_{45} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & s_{12} - 2m^2 \\ M^2 - \mu^2 & M^2 - 2m^2 & s_{34} - 2m^2 & s_{12} - 2m^2 & 2m^2 \end{vmatrix}, \quad (D1)$$

$$\begin{aligned}
 D_{12} &= D_{11}(t_{25} \rightarrow t_{21}, s_{34} \rightarrow s_{35}), \\
 D_{13} &= D_{11}(s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}), \\
 D_{14} &= D_{11}(t_{25} \rightarrow t_{24}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}, s_{34} \rightarrow s_{35}), \\
 D_{15} &= D_{11}(t_{25} \rightarrow s_{45}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{25}, s_{34} \rightarrow t_{23}), \\
 D_{16} &= D_{11}(t_{25} \rightarrow t_{45}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}, s_{34} \rightarrow t_{23}), \\
 D_{21} &= \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - t_{24} & 2m^2 - \mu^2 & t_{15} - 2m^2 & M^2 - 2m^2 \\ 2m^2 - t_{24} & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & M^2 - 2m^2 & s_{35} - 2m^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & s_{34} - 2m^2 & s_{12} - 2m^2 \\ t_{15} - 2m^2 & M^2 - 2m^2 & s_{34} - 2m^2 & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 \\ M^2 - 2m^2 & s_{35} - 2m^2 & s_{12} - 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 \end{vmatrix}, \quad (D2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{22} &= D_{21}(t_{24} \rightarrow t_{25}, t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow s_{35}, s_{35} \rightarrow s_{34}), \\
 D_{23} &= D_{21}(s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow t_{14}), \\
 D_{24} &= D_{21}(t_{24} \rightarrow t_{25}, t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow s_{15}, s_{35} \rightarrow s_{34}), \\
 D_{25} &= D_{21}(t_{24} \rightarrow s_{45}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{35} \rightarrow t_{23}), \\
 D_{26} &= D_{21}(t_{24} \rightarrow s_{45}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{34} \rightarrow s_{35}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{35} \rightarrow t_{23}), \\
 D_{31} &= \begin{vmatrix} 2m^2 & t_{23} - 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & t_{15} - 2m^2 & M^2 - 2m^2 \\ t_{23} - 2m^2 & 2m^2 & M^2 - 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - s_{45} \\ 2m^2 - \mu^2 & M^2 - 2m^2 & 2m^2 & s_{34} - 2m^2 & s_{12} - 2m^2 \\ t_{15} - 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & s_{34} - 2m^2 & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 \\ M^2 - 2m^2 & 2m^2 - s_{45} & s_{12} - 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 \end{vmatrix}, \quad (D3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{32} &= D_{31}(t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow s_{35}), \\
 D_{33} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{34}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{34} \rightarrow s_{35}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}), \\
 D_{34} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{34}, s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}), \\
 D_{35} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{35}, t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}), \\
 D_{36} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{35}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}),
 \end{aligned}$$

Стрілки означають відповідну заміну.

Зазначимо, що всі детермінанти симетричні і, крім того, змінна  $t$  входить у детермінанти  $D_{11}$ ,  $D_{21}$ ,  $D_{31}$  (враховуючи співвідношення (2)) у лівий верхній кут. Саме це і дає можливість досить просто знайти корені рівняння (6) при  $i = 1$ , якщо використати таку детермінантну тотожність [6] (див. додаток):

$$D_{11}^{1,2} D_{11} = A_{11}^{11} A_{11}^{22} - (A_{11}^{12})^2, \quad (D4)$$

де

$$D_{11} = a_{11}(2m^2 - t)^2 + b_{11}(2m^2 - t) + c_{11},$$

$D_{11}^{1,2}$  — детермінант, який одержується з (D1), якщо викреслити в цьому детермінанті перші два рядки і перші два стовпці;  $(-1)^{i+j} A_{11}^{ij}$  — детермінант, який одержується з (D1), якщо в ньому викреслити  $i$ -й рядок та  $j$ -й стовпчик.

З (Д4) випливає, що

$$a_{11} = -D_{11}^{1,2}, \quad b_{11} = -2A_{11}^{12} \quad (t = 2m^2), \quad b_{11}^2 - 4a_{11}c_{11} = 4A_{11}^{11}A_{11}^{22}. \quad (\text{Д5})$$

Аналогічні співвідношення можна записати для  $D_{21}$  та  $D_{31}$ .

Використовуючи співвідношення (Д4), (Д5), можна одержати такі вирази для  $A_{11}^{11}, \dots, A_{31}^{22}$  та  $D_{11}^{1,2}, D_{21}^{1,2}, D_{31}^{1,2}$ :

$$\begin{aligned} A_{11}^{11} &= s_{45}(s_{34} - 4m^2)[4m^2(s_{12} - s_{34}) + s_{34}s_{45}]; \\ A_{11}^{22} &= (s_{12} - 4m^2)t_{25}[s_{12}t_{25} - 4m^2(s_{12} - s_{34})]; \\ A_{11}^{12} &= 2m^2(s_{12} - s_{34})[2m^2(s_{34} - 4m^2) - (s_{12} - 4m^2)(2m^2 - t_{25})] + \\ &\quad + s_{45}[t_{25}(s_{12} - 4m^2)(s_{34} - 4m^2) + 2m^2(s_{34} - 4m^2)(s_{34} + t_{25} - s_{12})]; \end{aligned} \quad (\text{Д6})$$

$$\begin{aligned} A_{21}^{11} &= (s_{34} - 4m^2)(s_{35} - 4m^2)[2m^2(s_{34} - 2s_{12} + 2s_{35} - 4m^2) + \\ &\quad + (s_{34} - 4m^2)(s_{35} - 2m^2)]; \\ A_{21}^{22} &= (s_{12} - 4m^2)(t_{15} - 4m^2)[2m^2(s_{12} - 2s_{34} + 2t_{15} - 4m^2) + \\ &\quad + (t_{15} - 2m^2)(s_{12} - 2m^2)]; \end{aligned} \quad (\text{Д7})$$

$$\begin{aligned} A_{21}^{12} &= (4m^2 - t_{15})[(s_{12} - 2m^2)(s_{34} - 4m^2)(4m^2 - s_{35}) + \\ &\quad + 2m^2(s_{12} - 4m^2)(s_{12} - s_{34} - s_{35} + 4m^2)] + 2m^2(s_{34} - s_{12}) \times \\ &\quad \times [2m^2(s_{12} - 4m^2) - (s_{35} - 2m^2)(s_{34} - 4m^2)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{31}^{11} &= s_{45}(s_{34} - 4m^2)[(s_{45} - 2m^2)(s_{34} - 4m^2) + \\ &\quad + 2m^2(2s_{12} + 2s_{45} - s_{34} - 4m^2)]; \\ A_{31}^{22} &= A_{21}^{22}; \\ A_{31}^{12} &= (4m^2 - t_{15})[s_{45}(s_{34} - 4m^2)(s_{12} - 2m^2) + 2m^2(s_{12} - 4m^2) \times \\ &\quad \times (s_{12} + s_{45} - s_{34})] - 2m^2(s_{12} - s_{34})(2m^2(s_{12} - 4m^2) + \\ &\quad + (s_{34} - 4m^2)(s_{45} - 2m^2)]; \end{aligned} \quad (\text{Д8})$$

$$D_{11}^{1,2} = D_{21}^{1,2} = D_{31}^{1,2} = -2m^2(s_{12} - s_{34})^2.$$

При обчисленні  $t_{11}^k, t_{21}^k, t_{31}^k$  ми прийняли, що

$$M = 2m, \quad \text{а} \quad 2m^2 + \mu \cong 2m^2.$$

1. Landau L.D., *Nucl. Phys.*, 1959, **13**, 181.
2. Cutkasky L.F., *J. Math. Phys.*, 1960, **1**, 429.
3. Eden R.J., Proceedings of the 1960 Annual International Conference on High-Energy Physics at Rochester, P. 219.
4. Chew G.F., Low F.E., *Phys. Rev.*, 1959, **113**, 1640.
5. Cook L.F., Tarski J., *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 1.
6. Tarski J., *J. Math. Phys.*, 1960, **1**, 149.

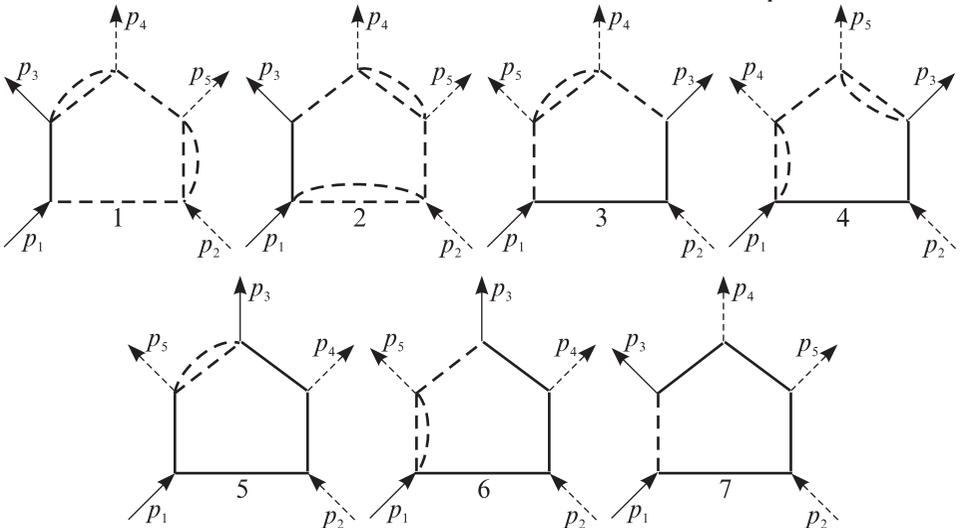
# Аналітичні властивості амплітуд народження і метод Чу–Лоу

В.І. ФУЩИЧ

The author investigated the analytical properties of the contribution to the production amplitude from the diagrams of fig. 1 for the processes  $\pi + N \rightarrow N + 2\pi$  (taking into account all possible permutations of external lines). The conditions are presented under which the contribution to the production amplitude from these diagrams are analytical in the region bounded by an extrapolation ellipse. The “threshold” and “triangular” properties of the type 7 diagram are discussed in detail.

Исследуются аналитические свойства вклада в амплитуду рождения от диаграмм рисунка для процесса  $\pi + N \rightarrow N + 2\pi$  (с учетом всех возможных перестановок внешних линий). Выписаны условия, при которых вклад в амплитуду рождения от этих диаграмм аналитичен в области, ограниченной эллипсом экстраполяции. Детально рассмотрены “пороговые” и “треугольные” особенности диаграмм типа 7.

В роботі [1] був запропонований метод, за допомогою якого можна знайти, наприклад, повний переріз процесу  $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$  (відомо, що безпосередньо виміряти переріз такого процесу в даний час неможливо), знаючи деяку функцію  $f[t(z)]$  від повного перерізу непружного процесу  $\pi + N \rightarrow N + \pi + \pi$ . Цей метод базується на екстраполяції функції  $f[t(z)]$ , яка задається у фізичній області  $z \in [-1, 1]$ , на точки, які знаходяться за межами цього відрізка, до точки  $t(z) = \mu^2$ , де  $\mu$  — маса  $\pi$ -мезона. Зрозуміло, що така процедура може бути строго обґрунтована лише в тому випадку, якщо амплітуда народження (або деяка її комбінація) аналітична в області, обмеженій еліпсом з фокусами  $\pm 1$ , і якщо при цьому точка  $t(z) = \mu^2$  належить цій області. Далі цей еліпс називатимемо еліпсом екстраполяції.



Виходячи з аксіом теорії поля, не вдається довести аналітичність амплітуди народження [2] у вищезгаданій області. Тому цікаво дослідити аналітичні властивості амплітуди народження як функції  $t$  для діаграм рисунка. Діаграми цього типу при деяких обмеженнях на маси [3] мажорують всі інші діаграми, якщо інваріанти, від яких залежить внесок в амплітуду народження, дійсні. Природно вважати, що ці діаграми дадуть найближчі особливості не тільки при дійсних  $t$ , але й при комплексних. В роботі виписані умови, при яких внесок в амплітуду народження від діаграм рисунка аналітичний в області, обмеженій еліпсом екстраполяції (враховуються всі діаграми, які можна одержати перестановкою зовнішніх ліній). Детально розглядаються “порогові” і “трикутні” особливості діаграми 7.

**1.** На рисунку зображені діаграми процесу народження псевдоскалярного  $\pi$ -мезона в реакції  $N + \pi \rightarrow N + 2\pi$  (всі інші діаграми даного процесу відрізнятимуться від діаграм, наведених на рисунку, тільки перестановкою зовнішніх ліній). Амплітуда такого процесу залежить від п'яти незалежних інваріантів:

$$\begin{aligned} s_{12} &= (p_1 + p_2)^2, & s_{34} &= (p_3 + p_4)^2, & s_{45} &= (p_4 + p_5)^2, \\ t_{25} &= (p_2 - p_5)^2, & t_{13} &\equiv t = (p_1 - p_3)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $p_1, p_3$  — імпульси нуклона,  $p_2, p_4, p_5$  — імпульси мезонів. Крім цих інваріантів зручно ввести ще п'ять інваріантів:  $s_{35}, t_{15}, t_{23}, t_{14}, t_{24}$ .

Між цими і незалежними інваріантами можна встановити такі співвідношення:

$$\begin{aligned} s_{35} &= s_{12} - s_{34} - s_{45} + m^2 + 2\mu^2, & t_{15} &= s_{34} - s_{12} - t_{25} + m^2 + 2\mu^2, \\ t_{14} &= t_{25} - t - s_{34} + 2m^2 + \mu^2, & t_{23} &= s_{45} - s_{12} - t + 2m^2 + \mu^2, \\ t_{24} &= t - t_{25} - s_{45} + 3\mu^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Як відомо, умови Ландау [4] для вищенаведених діаграм мають вигляд

$$\sum_{i=1}^5 \alpha_i q_i = 0, \quad (3)$$

де  $q_i$  — внутрішній імпульс, який зіставляється внутрішній лінії діаграми, взятий на масовій оболонці  $q_i^2 = m^2$  ( $\mu^2$  або  $4\mu^2$ ). Використовуючи зв'язок між зовнішніми та внутрішніми імпульсами діаграми, одержимо такі рівняння для знаходження особливостей внеску в амплітуду народження від діаграм рисунка, а також від діаграм з переставленими зовнішніми лініями:

$$\begin{aligned} D_{1i}(s_{12}, s_{34}, s_{45}, t_{25}, t) &= 0, & D_{2i}(s_{12}, \dots, t) &= 0, \\ D_{3i}(s_{12}, \dots, t) &= 0, & D_{4i}(s_{12}, \dots, t) &= 0, & D_{5i}(s_{12}, \dots, t) &= 0, \\ D_{6i}(s_{12}, \dots, t) &= 0, & D_{7i}(s_{12}, \dots, t) &= 0, & i &= 1, \dots, 6. \end{aligned} \quad (4)$$

Явні вирази для  $D_{1i}, \dots, D_{7i}$  наведені в додатку.

Особливості діаграм рисунка, згідно з даними [5], можна розділити на: а) “порогові” (точки розгалуження), коли три параметри Фейнмана дорівнюють нулю; в) “трикутні” (точки розгалуження), коли два параметри Фейнмана дорівнюють нулю; с) “квадратні” (точки розгалуження), коли один параметр Фейнмана дорівнює нулю; д) “власні” (полюси), коли жодний з параметрів Фейнмана не дорівнює нулю.

2. У випадку народження зв'язок між  $z = \cos \theta = \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_3}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_3|}$  і  $t$  буде задаватись таким співвідношенням:

$$z = \frac{t - 2m^2 + 2p_{10}p_{30}}{\sqrt{(p_{10}^2 - m^2)(p_{30}^2 - m^2)}}, \quad (5)$$

$$p_{10} = \frac{s_{12} + m^2 - \mu^2}{2\sqrt{s_{12}}}, \quad p_{30} = \frac{s_{12} - s_{45} + m^2}{2\sqrt{s_{12}}}.$$

Рівняння еліпса екстраполяції в площині  $z$  має вигляд

$$z = \operatorname{ch}(\beta + i\theta), \quad \beta = \operatorname{arcch} z_\mu, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (6)$$

$$z_\mu = \frac{\mu^2 - 2m^2 + 2p_{10}p_{30}}{\sqrt{(p_{10}^2 - m^2)(p_{30}^2 - m^2)}}. \quad (7)$$

Оскільки між  $z$  і  $t$  існує лінійний зв'язок, то еліпс (6) при перетворенні (5) переходить також в еліпс в площині  $t$ . Точки перетину цього еліпса з дійсною віссю в площині  $t$  такі:

$$\operatorname{Re} t_a = \mu^2, \quad \operatorname{Re} t_b = 4m^2 - \mu^2 - \left(1 + \frac{m^2 - \mu^2}{s_{12}}\right)(s_{12} - s_{45} + m^2). \quad (8)$$

Величина малої півосі еліпса екстраполяції

$$\operatorname{Im} t_c = 2\sqrt{(p_{10}^2 - m^2)(p_{30}^2 - m^2)(z_\mu^2 - 1)}. \quad (9)$$

Для того, щоб екстраполяцію Чу і Лоу [1] можна було обґрунтувати (якщо обмежитись однополюсною діаграмою [6] та діаграмами рисунка), необхідно, щоб корені рівнянь (4) знаходилися за межами еліпса (6) при умові, що

$$s_{12} > (m + 2\mu)^2, \quad s_{45} > 4\mu^2, \quad s_{34} > (m + \mu)^2, \quad t_{25} < 0. \quad (10)$$

Вписати обмеження, що накладаються на коефіцієнти рівнянь (4), при яких корені цих рівнянь (відносно  $t$ ) будуть знаходитися за межами еліпса (6), якщо конкретно не задані значення  $s_{12}$ ,  $s_{45}$ ,  $s_{34}$  та  $t_{25}$  дуже громіздка задача. Тому ми випишемо ці обмеження лише для рівняння  $D_{7i} = 0$ , вважаючи, що діаграма 7 не має “квадратних” і “власних” особливостей.

“Порогові” особливості знаходитимуться за межами еліпса екстраполяції, якщо

$$\begin{aligned} t_{25} - s_{34} - (m \pm \mu)^2 + 2m^2 + \mu^2 &< \operatorname{Re} t_b, \\ s_{45} - s_{12} - (m \pm \mu)^2 + 2m^2 + \mu^2 &< \operatorname{Re} t_b. \end{aligned} \quad (11)$$

“Трикутні” особливості будуть в тих точках, для яких

$$\begin{aligned} A_i^1 t^2 + B_i^1 t + C_i^1 &= 0, & A_i^2 t_{14}^2 t_{14}^2 + B_i^2 t_{14} + C_i^2 &= 0, \\ A_i^3 t_{23}^2 + B_i^3 t_{23} + C_i^3 &= 0, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (12)$$

Явні вирази для  $A$ ,  $B$  і  $C$  наведені в додатку.

Випишемо умови того, що “трикутні” особливості не будуть знаходитись в області, обмеженій (6):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} t^k > \operatorname{Re} t_a, \quad 2m^2 + \mu^2 + t_{25} - s_{34} - \operatorname{Re} t_{14}^k > \operatorname{Re} t_a, \\ 2m^2 + \mu^2 + s_{45} - s_{12} - \operatorname{Re} t_{23}^k > \operatorname{Re} t_a, \end{aligned} \quad (13.1)$$

або

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} t^k < \operatorname{Re} t_b, \quad 2m^2 + \mu^2 + t_{25} - s_{34} - \operatorname{Re} t_{14}^k < \operatorname{Re} t_b, \\ 2m^2 + \mu^2 + s_{45} - s_{12} - \operatorname{Re} t_{23}^k < \operatorname{Re} t_b, \end{aligned} \quad (13.2)$$

або

$$|\operatorname{Im} t^k| > \operatorname{Im} t_c, \quad |\operatorname{Im} t_{14}^k| > \operatorname{Im} t_c, \quad |\operatorname{Im} t_{23}^k| > \operatorname{Im} t_c, \quad (13.3)$$

де  $t^k, t_{14}^k, t_{23}^k$  — корені рівнянь (12).

Таким чином, внесок в амплітуду народження від усіх діаграм типу 7 не буде мати “порогових” і “трикутних” особливостей всередині еліпса (6), якщо мають місце співвідношення (11) і (13).

Для одержання умов того, що “квадратні” та “власні” особливості не знаходяться всередині еліпса екстраполяції, потрібно обчислити детермінанти четвертого і п'ятого порядку (див. додаток (Д.1)) і провести аналогічні міркування, як і у випадку “порогових” і “трикутних” особливостей.

### Додаток

Наведемо вирази для  $D_{1i}, \dots, D_{7i}$ :

$$\begin{aligned} D_{11} &= \begin{vmatrix} 2\mu^2 & 4\mu^2 & -\mu^2 & 5\mu^2 - t & 2\mu^2 - t_{25} \\ 4\mu^2 & 8\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} & 4\mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 2m^2 & -4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 \\ 5\mu^2 - t & 8\mu^2 - s_{45} & -4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 \\ 2\mu^2 - t_{25} & 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 2\mu^2 \end{vmatrix}, \\ D_{21} &= \begin{vmatrix} 8\mu^2 & 4\mu^2 & -4\mu^2 & 5\mu^2 - t & 8\mu^2 - t_{25} \\ 4\mu^2 & 2\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 - s_{45} & 4\mu^2 \\ -4\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 2m^2 & -\mu^2 & s_{34} - m^2 - 4\mu^2 \\ 5\mu^2 - t & 2\mu^2 - s_{45} & -\mu^2 & 2\mu^2 & 4\mu^2 \\ 8\mu^2 - t_{25} & 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - 4\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 \end{vmatrix}, \\ D_{31} &= \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & t_{23} - m^2 - \mu^2 & t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & -\mu^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & -\mu^2 & s_{34} - m^2 - 4\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 \\ t_{23} - m^2 - \mu^2 & -\mu^2 & 2\mu^2 & 4\mu^2 & 2\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - 4\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 - s_{45} & 4\mu^2 & 2\mu^2 \end{vmatrix}, \\ D_{41} &= \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & t_{23} - m^2 - \mu^2 & t_{15} - m^2 - \mu^2 & -4\mu^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & -4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & s_{12} - m^2 - 4\mu^2 \\ t_{23} - m^2 - 4\mu^2 & -4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} \\ t_{15} - m^2 - \mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 2\mu^2 & 4\mu^2 \\ -4\mu^2 & s_{12} - m^2 - 4\mu^2 & 8\mu^2 - s_{45} & 4\mu^2 & 8\mu^2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$D_{51} = \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - t_{24} & t_{15} - m^2 - \mu^2 & -4\mu^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & s_{12} - m^2 - 4\mu^2 \\ 2m^2 - t_{24} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & -\mu^2 & s_{35} - m^2 - 4\mu^2 \\ t_{15} - m^2 - \mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & -\mu^2 & 2\mu^2 & 4\mu^2 \\ -4\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & s_{35} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 8\mu^2 \end{vmatrix},$$

$$D_{61} = \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - t_{24} & t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & -\mu^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & s_{34} - m^2 - 4\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 \\ 2m^2 - t_{24} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & -4\mu^2 & s_{35} - m^2 - \mu^2 \\ t_{15} - m^2 - 4\mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & -4\mu^2 & 8\mu^2 & 4\mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & s_{35} - m^2 - \mu^2 & 4\mu^2 & 2\mu^2 \end{vmatrix},$$

$$D_{71} = \begin{vmatrix} 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - t_{25} & 2m^2 - t & -\mu^2 \\ 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 - s_{45} & s_{12} - m^2 - \mu^2 \\ 2m^2 - t_{25} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & 2m^2 - \mu^2 & 2\mu^2 - s_{45} \\ 2m^2 - t & 2m^2 - s_{45} & 2m^2 - \mu^2 & 2m^2 & \mu^2 \\ -\mu^2 & s_{12} - m^2 - \mu^2 & s_{34} - m^2 - \mu^2 & -\mu^2 & 2\mu^2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= D_{11}(t_{25} \rightarrow t_{24}, s_{34} \rightarrow s_{45}), & D_{13} &= D_{11}(s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}), \\ D_{14} &= D_{12}(s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}), & D_{15} &= D_{13}(t_{25} \rightarrow s_{45}, s_{34} \rightarrow t_{23}), \\ D_{16} &= D_{15}(t_{15} \rightarrow t_{14}, t_{24} \rightarrow t_{25}). \end{aligned} \quad (\text{Д.1.1})$$

Вирази для  $D_{22}, \dots, D_{26}$  одержуються  $D_{21}$  точно такою ж заміною (стрілка означає відповідну заміну), як і вирази для  $D_{12}, \dots, D_{16}$  з  $D_{11}$ .

$$\begin{aligned} D_{32} &= D_{31}(t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow s_{35}), \\ D_{33} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{34}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{34} \rightarrow s_{35}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}), \\ D_{34} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{34}, s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{45} \rightarrow t_{25}), \\ D_{35} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{35}, t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}), \\ D_{36} &= D_{31}(t_{23} \rightarrow s_{35}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}). \end{aligned} \quad (\text{Д.1.2})$$

Вирази для  $D_{42}, \dots, D_{46}$  одержуються  $D_{41}$  точно такою ж заміною, як і вирази для  $D_{32}, \dots, D_{36}$  з  $D_{31}$ .

$$\begin{aligned} D_{52} &= D_{51}(t_{24} \rightarrow t_{25}, t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow s_{35}, s_{35} \rightarrow s_{34}), \\ D_{53} &= D_{51}(s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow t_{14}), \\ D_{54} &= D_{51}(t_{24} \rightarrow t_{25}, t_{15} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow t_{23}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{35} \rightarrow s_{34}), \\ D_{55} &= D_{51}(t_{24} \rightarrow s_{45}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{35} \rightarrow t_{23}), \\ D_{56} &= D_{51}(t_{24} \rightarrow s_{45}, t_{15} \rightarrow s_{12}, s_{34} \rightarrow s_{35}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{35} \rightarrow t_{23}). \end{aligned} \quad (\text{Д.1.3})$$

Вирази для  $D_{62}, \dots, D_{66}$  одержуються з  $D_{61}$  точно такою ж заміною, як і вирази для  $D_{52}, \dots, D_{56}$  з  $D_{51}$ .

$$\begin{aligned} D_{72} &= D_{71}(t_{25} \rightarrow t_{24}, s_{34} \rightarrow s_{35}), & D_{73} &= D_{71}(s_{45} \rightarrow t_{24}, s_{12} \rightarrow t_{15}), \\ D_{74} &= D_{71}(t_{25} \rightarrow t_{24}, s_{45} \rightarrow t_{25}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow s_{35}), \\ D_{75} &= D_{71}(t_{25} \rightarrow s_{45}, s_{12} \rightarrow t_{15}, s_{45} \rightarrow t_{24}, s_{34} \rightarrow t_{23}), \\ D_{76} &= D_{71}(t_{25} \rightarrow s_{45}, s_{45} \rightarrow t_{25}, s_{12} \rightarrow t_{14}, s_{34} \rightarrow t_{23}). \end{aligned} \quad (\text{Д.1.4})$$

Явні вирази для  $A$ ,  $B$  і  $C$  мають вигляд:

$$A_i^1 = A_i^2 = A_i^3 = 1, \quad B_1^1 = -4m^2 + \frac{(2m^2 - \mu^2)(2m^2 - t_{25})}{m^2},$$

$$C_1^1 = (\mu^2 - t_{25})^2, \quad B_2^1 = -4m^2 + 3\mu^2 - t_{25} - s_{45},$$

$$C_2^1 = 2m^2(t_{25} + s_{45} - 3\mu^2) + m^2\mu^2 + \frac{m^2}{\mu^2}(t_{25} + s_{45} - 3\mu^2)^2,$$

$$B_3^1 = -4m^2 + \frac{(s_{45} - \mu^2)(\mu^2 - t_{25})}{\mu^2}, \quad C_3^1 = \frac{m^2}{\mu^2}(2\mu^2 - s_{45} - t_{25})^2,$$

$$B_1^2 = -2(m^2 + \mu^2) + \frac{\mu^2}{m^2}(2m^2 - \mu^2), \quad B_2^2 = -2(m^2 + \mu^2) - \frac{(t_{25} - \mu^2)(s_{35} - m^2)}{\mu^2},$$

$$C_1^2 = (m^2 - \mu^2)^2 + \mu^4 - \frac{\mu^2}{m^2}(2m^2 - \mu^2)(m^2 + \mu^2) + \frac{\mu^2}{m^2}(2m^2 - \mu^2)^2,$$

$$C_2^2 = (m^2 - \mu^2)^2 + \frac{(t_{25} - \mu^2)(s_{35} - m^2)(m^2 + \mu^2)}{\mu^2} + \frac{m^2}{\mu^2}(s_{35} - m^2)^2 + (t_{25} - \mu^2)^2,$$

$$B_3^2 = -2(m^2 + \mu^2) + \frac{\mu^2(2m^2 - t_{25})}{m^2}, \quad B_1^3 = -2(m^2 + \mu^2) + \frac{\mu^2(2m^2 - \mu^2)}{m^2},$$

$$C_3^2 = (m^2 - \mu^2)^2 + \mu^4 - \frac{\mu^2(2m^2 - t_{25})(m^2 + \mu^2)}{m^2} + \frac{\mu^2(2m^2 - t_{25})^2}{m^2},$$

$$C_1^3 = (m^2 - \mu^2)^2 + \mu^4 - \frac{\mu^2(2m^2 - \mu^2)(m^2 + \mu^2)}{m^2} + \frac{\mu^2(2m^2 - \mu^2)^2}{m^2},$$

$$C_2^3 = (m^2 - \mu^2)^2 + \frac{(t_{15} - m^2)(s_{45} - \mu^2)(m^2 + \mu^2)}{\mu^2} + \frac{m^2}{\mu^2}(s_{45} - \mu^2)^2 + (t_{15} - m^2)^2,$$

$$B_2^3 = -2(m^2 + \mu^2) - \frac{(t_{15} - m^2)(s_{45} - m^2)}{\mu^2}, \quad B_3^3 = B_3^2(t_{25} \rightarrow s_{45}), \quad C_3^3 = C_3^2(t_{25} \rightarrow s_{45}).$$

*Примітка при коректурі.* Після того, як робота була задана до друку, ми, використовуючи рівняння Ландау і теорему Гурвіца про корені многочленів, знайшли достатні умови, при яких особливості довільної діаграми лежать за межами еліпса екстраполяції.

1. Chew G., Low F., *Phys. Rev.*, 1959, **113**, 1640.
2. Ascoli R., Minguzzi A., *Phys. Rev.*, 1960, **118**, 1935.
3. Wu T.T., *Phys. Rev.*, 1961, **123**, 673.
4. Ландау Л.Д., *ЖЭТФ*, 1959, **37**, 62.
5. Cook L., Tarski J., *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 1.
6. Фушич В.И., *Укр. мат. журн.*, 1963, **15**, № 2, 227.

# Аналитические свойства амплитуды рассеяния, соответствующей одному классу диаграмм Фейнмана

*В.И. КОЛОМЫЩЕВ, В.И. ФУЩИЧ*

На протяжении последних лет изучению аналитических свойств амплитуды рассеяния в теории возмущений посвящалось большое количество работ, основной целью которых было получение обычных дисперсионных соотношений и спектральных представлений. Основным методом в ряде работ является метод мажорирования диаграмм Фейнмана, позволяющий сравнивать области аналитичности для различных диаграмм. С помощью этого метода изучение аналитических свойств вкладов от всех диаграмм рассматриваемого процесса в амплитуду рассеяния сводится к изучению аналитических свойств вкладов от сравнительно небольшого числа диаграмм. На этом пути получено доказательство аналитичности амплитуды рассеяния в достаточно широкой комплексной области изменения инвариантных переменных, позволившей установить справедливость обычных дисперсионных соотношений, но, к сожалению, недостаточной для доказательства двойных спектральных представлений Мандельштама [1] (см. работу [2], в которой имеется подробный обзор работ этого и других направлений).

Темой настоящей работы является изучение аналитических свойств амплитуд Фейнмана, соответствующих одному классу диаграмм, описанному в работе [3]. Исходным является  $\alpha$ -представление амплитуды рассеяния, в котором уже выполнено интегрирование по одному параметру с помощью  $\delta$ -функции.

Возвращение к рассмотренному ранее классу диаграмм вызвано тем, что мы надеемся на примере этих диаграмм исследовать влияние свойств спектральных кривых на аналитические свойства самих амплитуд. Так, в конце настоящей работы показано отсутствие комплексных особенностей у диаграммы шестого порядка при определенных (не являющихся необходимыми) ограничениях на массы частиц. Однако в этом случае приходится исключать более чем один параметр из уравнений Ландау. На наш взгляд, используемый в статье метод является дальнейшим развитием метода Тарского [4], интенсивно использующего уравнения Ландау.

Ниже в п.1 будет доказана теорема об отсутствии комплексных особенностей у фейнмановских амплитуд рассеяния определенного вида, а в п.2 — описан класс диаграмм, вклады от которых в амплитуду рассеяния удовлетворяют условиям теоремы п.1 (см. рис. 2).

**1.** Рассмотрим фейнмановскую амплитуду

$$F(s, t) = \int \frac{\prod_{i=1}^n d\alpha_i \delta \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right\} \{C(\alpha)\}^p}{\{D(\alpha; s, t)\}^r}, \quad (1.1)$$

у которой знаменатель

$$D(\alpha; s, t) = f(\alpha)s + g(\alpha)t - K(\alpha; m_i^2, M_j^2) \quad (1.2)$$

$$f(\alpha) = \alpha_n f_1(\alpha_{n-2}) \geq 0, \quad (1.3)$$

$$g(\alpha) = \alpha_{n-1} g_1(\alpha_{n-3}) \geq 0, \quad (1.4)$$

удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} -K(\alpha; m_i^2, M_j^2) &= \alpha_n \alpha_{n-1} k_1(\alpha_{n-3}) M_{j'}^2 + \alpha_n k_2(\alpha_{n-3}, m_i^2, M_j^2) + \\ &+ \alpha_{n-1} k_3(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2) + k_4(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

и при  $m_i^2$  и  $M_j^2$ , удовлетворяющих некоторым условиям, массовый коэффициент  $K(\alpha)$  неотрицателен при всех  $\alpha_i > 0$  и  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Кроме того, будем предполагать, что  $k_1(\alpha_{n-3}) \geq 0$  при всех  $\alpha$ .

Покажем, что при  $M_{j'}^2 \leq 0$  функция  $F(s, t)$  не имеет комплексных особенностей по обоим переменным  $s$  и  $t$ . С этой целью выполним интегрирование по  $\alpha_n$  с помощью  $\delta$ -функции и в получившемся выражении

$$F(s, t) = \int \frac{\prod_{i=1}^{n-1} d\alpha_i \{C(\alpha)\}^p}{\{c_{n-1} \alpha_{n-1}^2 + 2b_{n-1} \alpha_{n-1} + a_{n-1}\}^r}, \quad (1.6)$$

здесь

$$c_{n-1} = -k_1(\alpha_{n-3}) M_{j'}^2, \quad (1.6a)$$

$$\begin{aligned} 2b_{n-1} &= -f_1(\alpha_{n-2})s + g_1(\alpha_{n-3})t + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) k_1(\alpha_{n-3}) M_{j'}^2 - \\ &- k_2(\alpha_{n-3}, m_i^2, M_j^2) + k_3(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2) = -f_1 s + g_1 t + b, \end{aligned} \quad (1.6b)$$

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) f_1(\alpha_{n-2})s + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) k_2(\alpha_{n-3}, m_i^2, M_j^2) + \\ &+ k_4(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2) \equiv \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) f_1 s + a, \end{aligned} \quad (1.6b)$$

будем менять контур интегрирования по параметру  $\alpha_{n-1}$  при аналитическом продолжении функции  $F(s, t)$  с вещественной области  $s_1 = \text{Re } s \leq s_0$ ,  $t_1 = \text{Re } t \leq t_0$  на комплексные значения этих переменных.

Более точно исследуем аналитические свойства подынтегральной функции

$$\Phi(\alpha; s, t) = \int_0^{1 - \sum_i^{n-2} \alpha_i} d\alpha_{n-1} \frac{1}{\{c_{n-1} \alpha_{n-1}^2 + 2b_{n-1} \alpha_{n-1} + a_{n-1}\}^r} \quad (1.7)$$

при фиксированных значениях остальных параметров из области интегрирования. Все возможные особые точки функции  $\Phi(\alpha; s, t)$  в пространстве переменных  $s = s_1 + is_2$  и  $t = t_1 + it_2$  лежат на поверхности типа Ландау, получаемой путем исключения параметра  $\alpha_{n-1}$  из системы уравнений

$$D(\alpha; s, t) = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_{n-1}} = 2c_{n-1}\alpha_{n-1} + 2b_{n-1} = 0,$$

т.е. на поверхности

$$\Delta_{n-1} = (2b_{n-1})^2 - 4c_{n-1}a_{n-1} = 0. \quad (1.9)$$

Значения  $s$  и  $t$ , удовлетворяющие уравнению (1.9), соответствуют совпадающим особым точкам в плоскости  $\alpha_{n-1}$ . К ним необходимо добавить еще особые точки функции  $\Phi(\alpha; s, t)$ , соответствующие концам промежутков интегрирования по  $\alpha_{n-1}$ . Эти особые точки определяются из уравнений

$$a_{n-1}(s) = 0, \quad (1.10a)$$

$$a'_{n-1}(t) = a_{n-1}(s) + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) \left[ c_{n-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) + 2b_{n-1} \right], \quad (1.10б)$$

каждое из которых в силу условий (1.3) и (1.4) зависит только от одной переменной. В силу условия отрицательности массового коэффициента  $K(\alpha)$  эти особые точки лежат на вещественных осях и поэтому ими в дальнейшем интересоваться не будем.

Исследуем следующий вопрос: какие точки поверхности (1.9) являются действительно особыми точками функции, т. е. соответствующие им сингулярности “зажимают” контур интегрирования в плоскости  $\alpha_{n-1}$  с разных сторон, и какие точки не являются особыми, т.е. соответствующие им сингулярности “подходят” к контуру с одной стороны. Обсуждение этого вопроса свяжем с тем замечанием, что поскольку функции  $f_1(\alpha_{n-2})$  и  $g_1(\alpha_{n-2})$  положительны, то точки поверхности (1.9) с  $s_2$  и  $t_2$  имеющие одинаковый знак, не являются в действительности особыми, так как мнимая часть знаменателя

$$\text{Im } D(\alpha; s, t) = fs_2 + gt_2$$

не обращается в нуль при таких значениях  $s_2$  и  $t_2$ .

С этой целью рассмотрим различные области  $G_k$  в плоскости вещественных значений  $s_1$  и  $t_1$ , показанные на рис. 1. Предварительно разделим вещественную и мнимую части функции  $\Delta_{n-1}$  в уравнении (1.9), которое теперь будет эквивалентно системе

$$\text{Re } \Delta_{n-1} = (-f_1s_1 + g_1t_1 + b)^2 - (-f_1s_2 + g_1t_2)^2 -$$

$$-4c_{n-1} \left[ \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) s_1 + a \right] = 0, \quad (1.11a)$$

$$\text{Im } \Delta_{n-1} = (g_1t_2 - f_1s_2)(b - f_1s_1 + g_1t_1) - 2f_1 \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i\right) c_{n-1}s_2 = 0. \quad (1.11б)$$

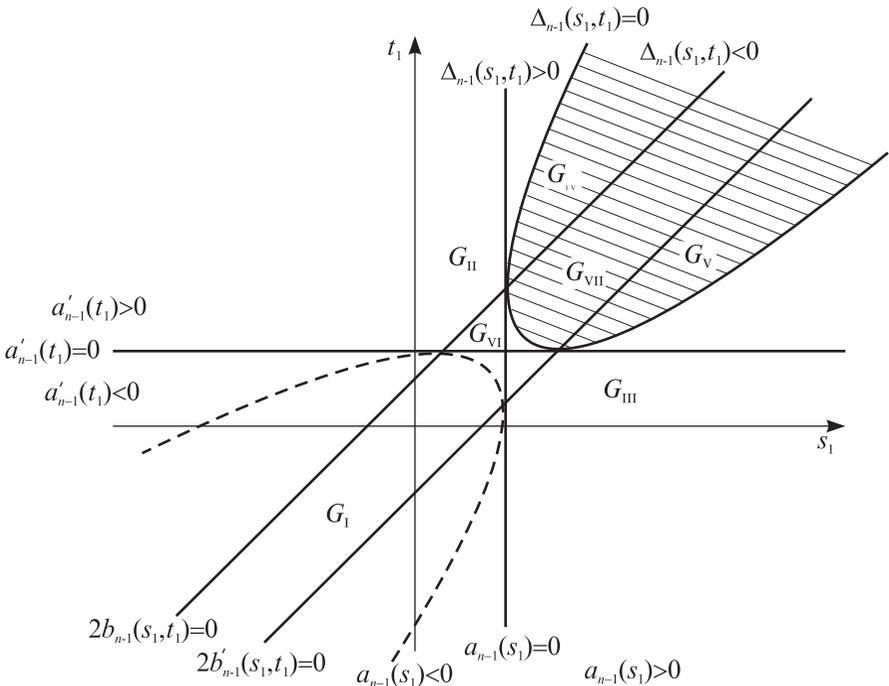


Рис. 1.

1. Рассмотрим теперь область  $G_1 : [a_{n-1}(s_1) \leq 0 \cap a'_{n-1}(t) \leq 0]$ . В этой области в силу неравенства  $c_{n-1} \geq 0$  вещественная часть знаменателя

$$\operatorname{Re} D(\alpha; s_1, t_1) = f(\alpha)s_1 + g(\alpha)t_1 - K(\alpha; m_i^2, M_j^2)$$

не обращается в нуль ни при каких  $\alpha$  из области интегрирования. Следовательно, функция  $\Phi(\alpha; s, t)$  является аналитической при комплексных значениях  $s$  и  $t$  с вещественными частями, принадлежащими области  $G_1$  и произвольными мнимыми частями.

2. В области  $G_2 : [a'_{n-1}(t_1) > 0 \cap 2b_{n-1} \geq 0 \cap a_{n-1}(s_1) < 0]$  особые точки, лежащие на поверхности  $\Delta_{n-1}(s, t) = 0$ , имеют мнимые части одинакового знака, что легко увидеть, используя уравнение (1.11б) для определения отношения

$$\frac{t_2}{s_2} = \frac{f_1 \left\{ -f_1 s_1 + g_1 t_1 + b + 2 \left( 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right) c_{n-1} \right\}}{g_1 \{-f_1 s_1 + g_1 t_1 + b\}} = \frac{f_1 \cdot 2b'_{n-1}}{g_1 \cdot 2b_{n-1}}. \quad (1.11в)$$

Следовательно, комплексные точки  $s$  и  $t$  с вещественными частями, принадлежащими области  $G_2$ , являются регулярными точками функции  $\Phi(\alpha; s, t)$ .

3. Область  $G_3 : [a'_{n-1}(t_1) < 0 \cap 2b'_{n-1}(s_1, t_1) > 0 \cap a_{n-1}(s_1) > 0]$  рассматривается аналогично области  $G_2$ , а значит, комплексные точки с вещественными частями, принадлежащими области  $G_3$ , являются регулярными точками функции  $\Phi(\alpha; s, t)$ .

Прежде чем переходить к дальнейшему обсуждению, остановимся на некоторых важных свойствах пересечения поверхности  $\Delta_{n-1}(s, t)$  с плоскостью  $(s_1, t_1)$ ,

т.е. на свойствах вещественной спектральной кривой:

$$\Delta_{n-1}(s, t) \Big|_{\substack{s_2=0 \\ t_2=0}} = (-f_1 s_1 + g_1 t_1 + b)^2 - 4c_{n-1} \left[ \left( 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right) s_1 + a \right] = 0. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) представляет параболу в плоскости  $(s_1, t_1)$ , заключенную между прямыми  $a_{n-1}(s_1) = 0$  и  $a'_{n-1}(t_1) = 0$ , расположенную в области  $G : [a_{n-1}(s_1) \geq 0 \cap a_{n-1}(t_1) \geq 0]$  и касающуюся этих прямых в точках их пересечения с прямыми

$$2b_{n-1}(s_1, t_1) = 0 \quad (1.13a)$$

и

$$2b'_{n-1}(s_1 t_1) = 2b_{n-1}(s_1, t_1) + 2 \left( 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right) c_{n-1} = 0. \quad (1.13b)$$

В справедливости этих утверждений можно легко убедиться, рассматривая эквивалентные записи уравнения кривой

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1}(s_1, t_1) &= [2b_{n-1}(s_1, t_1)]^2 - 4c_{n-1}a_{n-1}(s_1) \equiv \\ &\equiv [2b'_{n-1}(s_1, t_1)]^2 - 4c_{n-1}a'_{n-1}(t_1) = 0 \end{aligned} \quad (1.12a)$$

и учитывая неравенство  $c_{n-1} \geq 0$ .

Легко видеть, что левая часть (1.11a), т.е.  $\text{Re } \Delta_{n-1}(s, t)$  отрицательна в области, в которой  $\Delta_{n-1}(s_1, t_1) \leq 0$ , т.е. в заштрихованной на рис. 1 области, ограниченной параболой. Следовательно, поверхность особых точек функции  $\Phi(\alpha; s, t)$  "расположена" над областью вещественных значений  $s_1$  и  $t_1$ , не принадлежащих заштрихованной области.

Кроме того, в областях левее и выше прямой  $2b_{n-1}(s_1, t_1) = 0$  и правее и ниже прямой  $2b'_{n-1}(s_1, t_1) = 0$  мнимые части  $s$  и  $t$ , как это следует из уравнения (1.11b), имеют один и тот же знак.

Следовательно, мы приходим к выводу:

4-5. В областях  $G_{IV} : [a_{n-1}(s_1) \geq 0 \cap 2b_{n-1}(s_1, t_1) \geq 0]$  и  $G_V : [a'_{n-1}(t_1) \geq 0 \cap 2b'_{n-1}(s_1, t_1) \leq 0]$  функция  $\Phi(\alpha; s, t)$  является регулярной, так как мнимая часть знаменателя  $D(\alpha; s, t)$  при значениях  $s_2$  и  $t_2$ , имеющих одинаковый знак, не обращается в нуль.

6. Итак, осталось рассмотреть область значений  $G_{VI}$  и  $G_{VII}$ . Область  $G_{VI}$  ограничена (см. рис. 1) линиями

$$\begin{aligned} a'_{n-1}(t) = 0, \quad 2b'_{n-1}(s_1, t_1) = 0, \quad \Delta_{n-1}(s_1, t_1) = 0, \\ 2b_{n-1}(s_1, t_1) = 0, \quad a_{n-1}(s_1) = 0. \end{aligned}$$

Прежде всего следует отметить, что над той частью области  $G_I$ , которая заключена между прямыми  $2b_{n-1}(s_1, t_1) = 0$  и  $2b'_{n-1}(s_1, t_1) = 0$  точки особой поверхности имеются, так как уравнения (1.11) совместны и мнимые части  $s$  и  $t$  имеют противоположные знаки. Соответствующие им сингулярные точки подынтегральной функции в правой части (1.7) в плоскости переменной совпадают и находятся вне линии интегрирования  $\left( 0, 1 - \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i \right)$ . Так как при вещественных значениях

$s_1$  и  $t_1$ , принадлежащих области  $G_1$ , функция  $\Phi(\alpha; s, t)$  аналитична, то ее можно продолжить на комплексные значения  $s$  и  $t$  с вещественными частями этих переменных, принадлежащими, по-прежнему,  $G_1$  в силу того, что совпадающие сингулярности в плоскости “подойдут” к непрерывно изменяемой линии интегрирования с одной стороны. Поэтому точки  $s$  и  $t$  удовлетворяющие системы (1.11) с  $s_1$  и  $t_1 \in G_1$ , в действительности являются регулярными точками  $\Phi(\alpha; s, t)$ .

При аналитическом продолжении  $\Phi(\alpha; s, t)$  на комплексные значения  $s$  и  $t$  с вещественными частями, принадлежащими области  $G_{VI}$ , совпадающие сингулярности подынтегральной функции в выражении (1.7) для  $\Phi(\alpha; s, t)$  в плоскости переменной  $\alpha_{n-1}$  будут оставаться совпадающими при  $s$  и  $t$  принадлежащими поверхности (1.2). Кроме того, они, по-прежнему, будут “подходить” к контуру интегрирования с одной стороны до тех пор, пока не совпадут с одним из концов линии интегрирования (см. лемму 2А работы Тарского [4]). Последнее же может случиться только в том случае, когда значения  $s_1$  и  $t_1$  совпадают с координатами точек пересечения  $A_1$  или  $A_2$ , в которых точки поверхности имеют равные нулю мнимые части. Эти особые вещественные точки функции  $\Phi(\alpha; s, t)$  совпадают с точками, удовлетворяющими уравнениям (1.10).

Таким образом, точки поверхности (1.9), “расположенные” над областью являются регулярными точками функции  $\Phi(\alpha; s, t)$ .

7. Как уже отмечалось, над областью  $G_{VII}$  поверхность (1.9) “не находится”. Следовательно, комплексные точки  $s$  и  $t$  с вещественными частями из области  $G_{VII}$  также являются регулярными точками функции  $\Phi(\alpha; s, t)$ .

Резюмируя вышесказанное, приходим к следующему утверждению.

**Лемма 1.** *Функция  $\Phi(\alpha; s, t)$  имеет только лишь вещественные особые точки при любых  $\alpha$  из области интегрирования (1.6).*

На основании этой леммы можно сформулировать такое предложение.

**Теорема 1.** *Амплитуда Фейнмана  $F(s, t)$  заданная интегралом (1.1) со знаменателем  $D(\alpha; s, t)$ , удовлетворяющим условиям (1.2)–(1.5), при  $M_j^2 \leq 0$  суть аналитическая функция переменных  $s$  и  $t$  в области, являющейся произведением двух плоскостей с выключенными разрезами вдоль вещественных осей*

$$s_2 = \text{Im } s = 0, \quad s_0 \leq \text{Re } s < \infty, \quad t_2 = \text{Im } t = 0, \quad t_0 \leq \text{Re } t < \infty.$$

В случае, когда  $M_j^2 > 0$ , парабола  $\Delta_{n-1}(s_1, t_1) = 0$  расположена в области  $G_I$  и является границей вещественной области аналитичности функции  $\Phi(\alpha; s, t)$ . При значениях  $s_1$  и  $t_1$ , удовлетворяющих уравнению  $\Delta_{n-1}(s_1, t_1) = 0$ , сингулярности в плоскости  $\alpha_{n-1}$  “зажимают” контур интегрирования с разных сторон и поэтому аналитическое продолжение  $\Phi(\alpha; s, t)$  на комплексные значения  $s$  и  $t$  с вещественными частями, не принадлежащими области  $G_I \cap (\Delta_{n-1} \geq 0)$ , осуществить невозможно при изменении только лишь контура интегрирования по  $\alpha_{n-1}$ . Из сказанного следует, что для аналитического продолжения по переменной  $\xi = M_j^2$  со значений  $\xi \leq 0$  на положительные значения необходимо осуществить изменения контуров по другим параметрам  $\alpha$ .

**2.** Как известно каждой фейнмановской диаграмме с четырьмя внешними линиями сопоставляется вклад в амплитуду рассеяния, который с точностью до по-

стоянных множителей может быть представлен в виде следующего интеграла [5]:

$$F(s, t) = \int d\alpha_1 \dots \int d\alpha_n \frac{\{C(\alpha)\}^p \delta \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \right\}}{\{D(\alpha; s, t)\}^r}. \quad (2.1)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $D(\alpha; s, t)$  — дискриминант квадратичной формы  $\Psi(q; \alpha, s, t)$ , которая определяется соотношением

$$\Psi(q; \alpha, s, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (k_i^2 - m_i^2), \quad (2.2)$$

где четырех-импульсы  $k_i$  являются линейными комбинациями внешних импульсов  $p_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) и импульсов интегрирования  $q_l$ , сопоставляемых каждому независимому контуру диаграммы;  $\alpha_i$  и  $m_i$  — параметры Фейнмана и массы, соответствующие  $i$ -й внутренней линии диаграммы,  $C(\alpha)$  — дискриминант квадратичной формы

$$\Psi_0(q; \alpha) = \Psi(q; \alpha, s = t = 0, m_i^2 = 0, M_j^2 = 0). \quad (2.3)$$

Числа  $p$  и  $r$  положительные и определяются числом вершин диаграммы и числом  $l$  независимых ее контуров. Дискриминант  $D(\alpha; s, t)$  является линейной функцией переменных  $s, t, m_i^2, M_j^2$  и может быть представлен в виде

$$D(\alpha; s, t) = f(\alpha)s + g(\alpha)t - K(\alpha; m_i^2, M_j^2), \quad (2.4)$$

где

$$K(\alpha; m_i^2, M_j^2) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 m_i^2 K_i(\alpha) - \sum_{i=1}^m \alpha_i m_i K'(\alpha) - \sum_{j=1}^4 K_j''(\alpha) M_j^2. \quad (2.4')$$

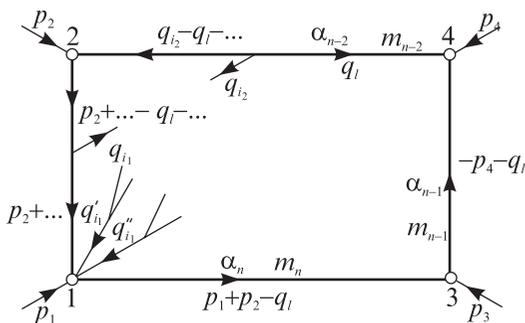


Рис. 2.

Одно из важных свойств  $D(\alpha; s, t)$  заключается в следующем.

Значение  $D(\alpha; s, t)$  при  $s = 0$  и  $t = 0$ , т.е. массовый коэффициент —  $-K(\alpha; m_i^2, M_j^2)$  отрицателен при положительных  $\alpha_i$ , если массы частиц, участвующих в реакции, удовлетворяют некоторым условиям (включающим условия стабильности) [2, 5].

Основной способ для изучения свойств дискриминанта  $D(\alpha; s, t)$ , как функции  $\alpha$  основан на инвариантности  $D(\alpha; s, t)$  относительно различных выборов линий,

по которым “протекают” импульсы внешних частиц через данную диаграмму и относительно различного выбора независимых замкнутых контуров для внутренних импульсов интегрирования.

Правая сторона (2.2) имеет вид

$$\sum a_{kr} q_k q_r + 2 \sum b_k q_k + c. \quad (2.5)$$

Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  все зависят от  $\alpha$  линейно, причем  $a_{kr}$  не зависит ни от каких других переменных,  $b_k$  зависит также от внешних импульсов, а  $c$  зависит линейно от квадратов и скалярных произведений внешних импульсов и от квадратов масс внутренних частиц. Дискриминант уравнения (2.5), следовательно, имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_l & c \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Разлагая  $D$  по последней строке и затем по последнему столбцу, получаем

$$D = - \sum A_{kr}(\alpha) b_k b_r + C(\alpha) \cdot c, \quad (2.7)$$

где

$$C(\alpha) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix}, \quad (2.8)$$

а  $A_{kr}(\alpha)$  являются алгебраическими дополнениями элементов  $a_{kr}$  в  $C(\alpha)$ .

Произведения  $b_k b_r$  зависят от произведений и квадратов внешних импульсов, которые, будучи выражены через  $s$ ,  $t$  и  $M_j^2$  по формулам

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2, & t &= (p_1 + p_3)^2, & u &= (p_1 + p_4)^2, \\ s + t + u &= \sum_{j=1}^4 M_j^2, & p_j^2 &= M_j^2, & 2p_1 p_2 &= s - M_1^2 - M_2^2, \\ 2p_1 p_3 &= t - M_1^2 - M_3^2, & 2p_1 p_4 &= M_2^2 + M_3^2 - s - t, \\ 2p_2 p_3 &= M_1^2 + M_4^2 - s - t, & 2p_2 p_4 &= t - M_2^2 - M_4^2, \\ 2p_2 p_3 &= s - M_3^2 - M_4^2, \end{aligned} \quad (2.9)$$

приведут к (2.4).

Каждый член в (2.4) является однородной функцией по  $\alpha$  степени  $l$ .

Для более детального изучения свойств коэффициентов  $f(\alpha)$  и  $g(\alpha)$  используем инвариантность  $D(\alpha; s, t)$  относительно различного выбора путей, по которым протекают импульсы внешних частиц  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  и  $p_4$ .

Предварительно введем понятие  $s$ -пути и  $t$ -пути, несколько отличающиеся от соответствующих понятий в работе Идена.

*s*-Путь. Назовем *s*-путем в данной диаграмме любую непрерывную линию, состоящую из внутренних линий диаграммы и соединяющую вершины 1 и 3 или 2 и 4 соответственно.

*t*-Путь определяется как линия, состоящая из внутренних линий диаграммы и соединяющая вершины 1 и 2 или 3 и 4.

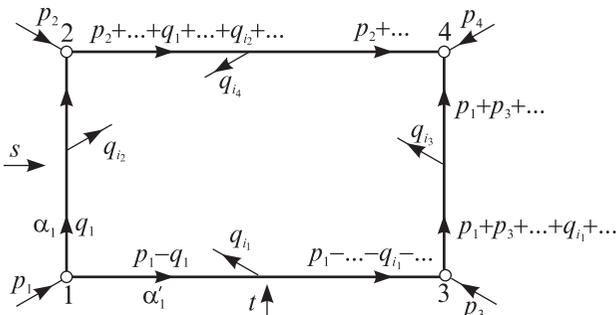


Рис. 3, а.

Выберем внутренние независимые импульсы интегрирования  $q_i$  так, как показано на рис. 3, а. При таком выборе импульс  $p_1$  внешней частицы 1 протекает только лишь вдоль *s*-пути, соединяющего вершины 1 и 3 (в дальнейшем  $s_{13}$ ), импульс  $p_2$  протекает вдоль *s*-пути  $s_{24}$ , сумма импульсов  $p_1 + p_3$  протекает только лишь вдоль *t*-пути  $t_{34}$ , вдоль *t*-пути  $t_{12}$  и всех остальных линий диаграммы протекает только лишь импульсы  $q_i$ . В этом случае коэффициент  $c$  в (2.5) не зависит от  $s$ , и зависимость  $D(\alpha; s, t)$  от  $s$  содержится только лишь в произведениях  $b_k$ , которые принимают один из следующих видов:

- 1) либо  $-b_k = \sum_{k_1} \alpha_{k_1} p_1 + \sum_{k_{13}} \alpha_{k_{13}} (p_1 + p_3) + \sum_{k_2} \alpha_{k_2} p_2$ , если  $\alpha_{k_1}$  принадлежит  $s_{13}$ ,  $\alpha_{k_{13}}$  принадлежит  $t_{34}$ ,  $\alpha_{k_2}$  принадлежит  $s_{24}$ , а импульс  $q_k$  протекает вдоль  $s_{13}$  по линии с индексом  $k_1$ , вдоль  $t_{34}$  — по линии  $k_{13}$  и вдоль  $s_{24}$  — по линии  $k_2$ ;
- 2) либо  $-b_k = \sum_{k_1} \alpha_{k_1} p_1 + \sum_{k_{13}} \alpha_{k_{13}} (p_1 + p_3)$ , если  $\alpha_{k_1}$  принадлежит  $s_{13}$  и  $\alpha_{k_{13}}$  принадлежит  $t_{34}$ , а  $q_k$  протекает вдоль  $s_{13}$  и  $t_{34}$  по линиям  $k_1$  и  $k_{13}$ ;
- 3) либо  $-b_k = \sum_{k_2} \alpha_{k_2} p_2$ , если  $\alpha_{k_2}$  принадлежит  $s_{24}$ , а  $q_k$  протекает вдоль  $s_{24}$ , но не протекает вдоль выделенного на рис. 3, а *t*-пути  $t_{34}$ ;
- 4) либо  $-b_k = \sum_{k_{13}} \alpha_{k_{13}} (p_1 + p_3)$ , если  $\alpha_{k_{13}}$  принадлежит  $t_{34}$ , а импульс  $q_k$  не протекает вдоль *s*-путей  $s_{13}$  и  $s_{24}$ .

Следовательно, в силу (2.9) произведение  $b_k b_r$  содержит переменную  $s$  только лишь в том случае, если  $\alpha_k$  принадлежит  $s_{13}$ , а  $\alpha_r$  принадлежит  $s_{24}$  (или наоборот).

Таким образом, мы приходим к следующей лемме.

**Лемма 2(f).** Коэффициент  $f(\alpha)$  при  $s$  в  $D(\alpha; s, t)$  является суммой вида

$$f(\alpha) = \sum_{k,r} \alpha_k \alpha_r f'_{kr}(\alpha), \tag{2.10}$$

где суммирование происходит по таким индексам  $k$  и  $r$ , что если  $\alpha_k$  принадлежит  $s_{13}$ , то  $\alpha_r$  принадлежит  $s_{24}$ , а  $f'_{kr}(\alpha)$  — некоторая функция, которая в силу свойства дискриминанта  $D(\alpha; s, t)$  не зависит от  $\alpha_k$  и  $\alpha_r$ .

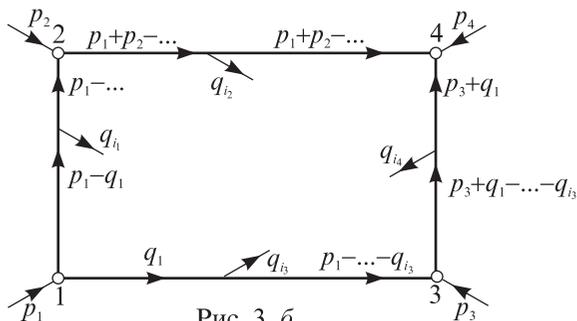


Рис. 3, б.

Выбирая импульсы интегрирования и пути, по которым протекают внешние импульсы, как показано на рис. 3, б, и повторяя выкладки, проведенные выше относительно структуры  $f(\alpha)$ , можно получить следующее предложение, являющееся аналогом леммы 2( $f$ ).

**Лемма 2( $g$ ).** Коэффициент  $g(\alpha)$  при  $t$  в  $D(\alpha; s, t)$  является суммой вида

$$g(\alpha) = \sum_{k,r} \alpha_k \alpha_r g'_{kr}(\alpha), \quad (2.11)$$

где суммирование происходит по таким индексам  $k$  и  $r$ , что если  $\alpha_k$  принадлежит  $t_{12}$ , то  $\alpha_r$  принадлежит  $t_{34}$ , а  $g'_{kr}(\alpha)$  — некоторая функция, которая в силу свойств  $D(\alpha; s, t)$  не зависит от  $\alpha_k$  и  $\alpha_r$ .

В силу леммы 2( $f$ ) и 2( $g$ ) можно добиться выполнения условий (1.3) и (1.4), налагаемых на коэффициенты  $f(\alpha)$  и  $g(\alpha)$ , редуцируя все линии на  $s$ - и  $t$ -путях, подходящих к какой-нибудь из вершин диаграммы на рис. 3, а, оставляя нередуцированными по одной линии на каждом из этих путей. Существует, очевидно, много способов редуцирования. Важно выяснить, существует ли хотя бы один из способов, при котором  $f_1(\alpha)$  и  $g_1(\alpha)$  в (1.3) и (1.4) оказались бы не зависящими от  $\alpha_n$  и  $\alpha_{n-1}$ . На один из них указать легко. Именно, ни в одно из слагаемых в правой части (2.10), которое содержит в виде множителя параметр  $\alpha'_1$  на линии, несущей импульс  $p_1 - q_1$  (см. рис. 3, а), параметр  $\alpha_1$  не входит. Действительно, параметр  $\alpha_1$  содержится в виде слагаемого в элементах  $a_{11}$  и  $s$  в правой части (2.6), не входящих в алгебраическое дополнение ни одного элемента  $a_{1r}$ , которое дает вклад в функцию  $f'_{kr}(\alpha)$ , встречающуюся в виде произведения с параметром  $\alpha'_1$  в правой части (2.10). Утверждение об отсутствии слагаемого в правой части (2.11), содержащего в виде множителя произведение  $\alpha_1 \alpha'_1$ , можно также легко получить, проведя аналогичные рассуждения. Таким образом, редуцируя на  $s$ -пути  $s_{13}$  все линии, за исключением несущей параметр  $\alpha'_1$ , а на  $t$ -пути  $t_{12}$  — все линии, за исключением несущей параметр  $\alpha_1$ , тем самым добьемся независимости  $f_1(\alpha)$  и  $g_1(\alpha)$  от  $\alpha'_1$  и  $\alpha_1$  (или, переобозначив их через  $\alpha_n$  и  $\alpha_{n-1}$ , — от  $\alpha_n$  и  $\alpha_{n-1}$ ). Ответ на вопрос существует ли другой способ редуцирования, приводящий к независимости  $f_1(\alpha)$  и  $g_1(\alpha)$  от соответствующих переменных, дать трудно, так как в общем случае это может произойти только при сложных взаимных уничтожениях

в выражениях типа (2.10) и (2.11). Положительности  $f_1(\alpha)$  и  $g_1(\alpha)$  можно затем добиться редуцированием тех линий, параметры которых входят в произведения с отрицательными знаками.

Остановимся теперь на свойствах коэффициентов  $K_j''(\alpha)$  при  $M_j^2$  в правой части (2.4'). Из рис. 3, а видно, что зависимость  $D(\alpha; s, t)$  от  $M_4^2$  заключена в произведениях  $b_k b_r$ , которые сами содержат в виде множителя массу  $M_4^2$  только лишь в том случае, когда в них содержится произведение  $\alpha_{k_2} p_2 \alpha_{k_3} p_3$ , где  $\alpha_{k_2}$  принадлежит  $s$ -пути  $s_{24}$ , а  $\alpha_{k_3}$  принадлежит  $t$ -пути  $t_{34}$ . Таким образом, мы приходим к выводу: коэффициент  $K_4''(\alpha)$  может быть представлен в виде суммы

$$K_4'' = \sum_{k_2, k_3} \alpha_{k_2} \alpha_{k_3} k_4^{k_2 k_3}(\alpha), \quad (2.12)$$

где суммирование происходит по таким индексам  $k_2$  и  $k_3$ , что если  $\alpha_{k_2}$  принадлежит  $s_{24}$ , то  $\alpha_{k_3}$  принадлежит  $t_{34}$ , и  $k_4^{k_2 k_3}$  в силу свойства дискриминанта  $D(\alpha; s, t)$  не зависит от  $\alpha_{k_2}$  и  $\alpha_{k_3}$ . На основании (2.12) легко получить следующую лемму.

**Лемма 2** ( $K_j''$ ). Коэффициент  $K_j''(\alpha)$  при  $M_j^2$  может быть представлен в виде

$$K_j''(\alpha) = \sum_{k, r} \alpha_k \alpha_r k_{j k_r}''(\alpha), \quad (2.13)$$

где суммирование происходит по таким индексам  $k$  и  $r$ , что если  $\alpha_k$  принадлежит  $s$ -пути, подходящем к вершине  $j$ , то  $\alpha_r$  принадлежит  $t$ -пути, подходящем к той же вершине диаграммы, и  $k_{j k_r}''(\alpha)$  в силу свойства  $D(\alpha; s, t)$  не зависит от  $\alpha_k$  и  $\alpha_r$ .

Рассмотрим класс диаграмм Фейнмана, представленный на рис. 2. Используя леммы 2( $f$ ) и 2( $g$ ), можно записать коэффициенты  $f(\alpha)$  и  $g(\alpha)$  в виде

$$f(\alpha) = \alpha_n f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}), \quad (2.14)$$

$$g(\alpha) = \alpha_{n-1} g_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-3}), \quad (2.15)$$

удовлетворяющем условиям (1.3) и (1.4).

Изучим теперь структуру массового коэффициента  $-K(\alpha; m_j^2, M_j^2)$ . Применяя лемму 2( $K_j''$ ) к этой диаграмме, можно заключить, что коэффициент  $K_3''(\alpha)$  имеет вид

$$K_3''(\alpha) = \alpha_n \alpha_{n-1} k_3''(\alpha). \quad (2.16)$$

Покажем теперь, что коэффициенты  $K_1''(\alpha)$ ,  $K_2''(\alpha)$  и  $K_4''(\alpha)$ , стоящие соответственно при  $M_1^2$ ,  $M_2^2$  и  $M_4^2$  в  $D(\alpha; s, t)$ , не зависят от произведения  $\alpha_n \alpha_{n-1}$ . Действительно, в правой части (2.7) произведение  $\alpha_n \alpha_{n-1}$ , как легко показать при выборе  $q_k$ , представленном на рис. 2, входит лишь в слагаемое  $-b_l b_l A_{ll}$  первой суммы и в слагаемое  $s a_{ll} A_{ll}$ , что нетрудно увидеть, разложив  $C(\alpha)$  по элементам последнего столбца (или строки):

$$C(\alpha) = a_{ll} A_{ll} - a_{l-1} A_{l-1} + \dots + (-1)^{l+1} a_{1l} A_{1l}. \quad (2.17)$$

Произведение  $b_l b_l$  содержит  $\alpha_n \alpha_{n-1}$  в следующем виде

$$\begin{aligned} b_l b_l = & -2\alpha_n \alpha_{n-1} (p_1 + p_2) p_4 - 2\alpha_n \sum \alpha_i' (p_1 + p_2) p_2 + \\ & + 2\alpha_{n-1} \sum \alpha_i' p_2 p_4 + \alpha_n^2 s + \alpha_{n-1}^2 M_4^2 + \left( \sum \alpha_i' \right)^2 M_2^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Используя (2.9), замечаем, что

$$\begin{aligned} 2(p_1 + p_2)p_4 &= M_3^2 - M_4^2 - s, & 2(p_1 + p_2)p_2 &= s - M_1^2 + M_2^2, \\ 2p_2p_4 &= t - M_2^2 - M_4^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

и, следовательно, правая часть (2.18) переписывается в виде

$$\begin{aligned} b_l b_l &= -\alpha_n \alpha_{n-1} (M_3^2 - M_4^2 - s) - \alpha_n \sum \alpha'_i (s - M_1^2 + M_2^2) + \\ &+ \alpha_{n-1} \sum \alpha'_i (t - M_2^2 - M_4^2) + \alpha_n^2 s + \alpha_{n-1}^2 M_4^2 + \left( \sum \alpha'_i \right)^2 M_2^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Рассмотрим теперь слагаемое  $ca_{ll}A_{ll}$ . В коэффициент  $c$  переменные  $\alpha_n, \alpha_{n-1}$  и  $\alpha_{n-2}$  входят следующим образом:

$$\begin{aligned} c &= \alpha_n (s + m_n^2) + \alpha_{n-1} (M_4^2 + m_{n-1}^2) + \alpha_{n-2} m_{n-2}^2 + \\ &+ \text{остальные члены, зависящие от } \alpha_{n-3}, \dots, \alpha_1, m_i^2, \text{ и } M_2^2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

а элемент  $a_{ll}$  можно представить в виде

$$a_{ll} = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \text{остальные члены}. \quad (2.22)$$

Таким образом, в слагаемом  $ca_{ll}A_{ll}$ , дающем вклад в коэффициент  $K(\alpha; m_i^2, M_j^2)$ , произведение  $\alpha_n \alpha_{n-1}$  встречается в виде  $\alpha_n \alpha_{n-1} A_{ll} M_4^2$  и в сумме со вторым слагаемым в первой скобке правой части (2.20), умноженной на  $-A_{ll}$  дает нуль. Следовательно, та часть суммы слагаемых  $-b_l b_l A_{ll} + ca_{ll} A_{ll}$ , которая дает вклад в  $K(\alpha; m_i^2, M_j^2)$ , содержит произведение  $\alpha_n \alpha_{n-1}$  только лишь в виде  $\alpha_n \alpha_{n-1} A_{ll} M_3^2$ , т.е. только при массовой переменной  $M_3^2$ . Доказательство независимости  $K_1''(\alpha)$ ,  $K_2''(\alpha)$  и  $K_4''(\alpha)$  от произведения  $\alpha_n \alpha_{n-1}$ , таким образом, закончено.

Кроме того, используя (2.20), (2.21) и (2.22) и замечая, что зависимость  $D(\alpha; s, t)$  от  $\alpha_n, \alpha_{n-1}$  и  $\alpha_{n-2}$  заключена только в элементах  $a_{ll}, b$  и  $c$  можно получить следующую лемму.

**Лемма 3.** Сумма слагаемых  $K_1''(\alpha)M_1^2 + K_2''(\alpha)M_2^2 + K_4''(\alpha)M_4^2$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} K_1''(\alpha)M_1^2 + K_2''(\alpha)M_2^2 + K_4''(\alpha)M_4^2 &= \\ &= \alpha_n k_1''(\alpha_{n-3}, M_j^2) + \alpha_{n-1} k_2''(\alpha_{n-2}, M_j^2) + k_4''(\alpha_{n-2}, M_j^2), \quad j \neq 3. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Перепишем два первых слагаемых правой части (2.4') в виде

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 m_i^2 K_i(\alpha) - \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i^2 K_i'(\alpha) = C(\alpha) \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i^2. \quad (2.24)$$

Легко показать, что правая сторона (2.24) представима в виде

$$\begin{aligned} C(\alpha) \sum_{i=1}^n \alpha_i m_i^2 &= \alpha_n m_n^2 C(\alpha_{n-3}) + \\ &+ \alpha_{n-1} m_{n-1}^2 C(\alpha_{n-3}) + \alpha_{n-2} m_{n-2}^2 C(\alpha_{n-3}) + \sum_{i=1}^{n-3} \alpha_i m_i^2 C(\alpha). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Действительно, учитывая, что  $C(\alpha)$  зависит от переменных  $\alpha_n, \alpha_{n-1}$  и  $\alpha_{n-2}$  следующим образом

$$C(\alpha) = c(\alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \dots),$$

можно считать, что, так как при изучении аналитических свойств  $F(s, t)$  используется формула (1.6), в которой значение  $D(\alpha; s, t)$  берется на гиперплоскости  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ , коэффициент  $C(\alpha)$  не зависит от  $\alpha_{n-1}$  и  $\alpha_{n-2}$ , т.е. имеет место представление (2.25).

Суммируя результаты этого параграфа, можно сформулировать следующий основной вывод.

**Теорема 2.** В силу выражений (2.10), (2.11), (2.23), (2.25) дискриминант  $D(\alpha; s, t)$  может быть представлен в виде

$$D(\alpha; s, t) = \alpha_n f_1(\alpha_{n-2})s + \alpha_{n-1} g_1(\alpha_{n-2})t + \alpha_n \alpha_{n-1} k_1(\alpha_{n-3})M_3^2 + \alpha_n k_2(\alpha_{n-3}, m_i^2, M_j^2) + \alpha_{n-1} k_3(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2) + k_4(\alpha_{n-2}, m_i^2, M_j^2), \quad (2.26)$$

из которого следует, что вклад в амплитуду рассеяния от диаграммы, представленной на рис. 2, удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

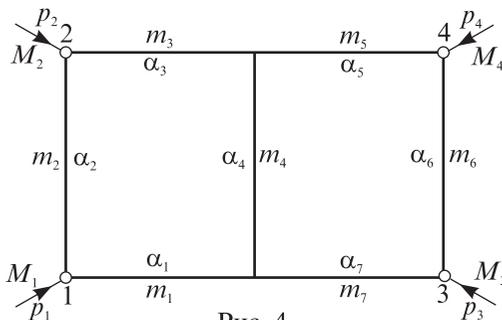


Рис. 4.

Рассмотрим, наконец, вклад в амплитуду рассеяния от диаграммы шестого порядка (рис. 4), который может быть записан в виде следующего интеграла

$$F^{(6)}(s, t) = \int \frac{\prod_{i=1}^7 d\alpha_i \delta\{1 - \sum \alpha_i\} C^2(\alpha)}{\{D(\alpha; s, t)\}^3}, \quad (2.27)$$

где

$$D(\alpha; s, t) = f(\alpha)s + g(\alpha)t - K(\alpha; m_i^2, M_j^2), \quad (2.28)$$

$$f(\alpha) = \alpha_1[\alpha_3(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) + \alpha_4\alpha_5] + \alpha_7[\alpha_5(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4], \quad (2.29)$$

$$g(\alpha) = \alpha_2\alpha_4\alpha_6, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} -K(\alpha; m_i^2, M_j^2) = & -C(\alpha) \sum_{i=1}^7 \alpha_i m_i^2 + \alpha_2 \{ [\alpha_1(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) + \alpha_4\alpha_7] M_1^2 + \\ & + [\alpha_3(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) + \alpha_4\alpha_5] M_2^2 \} + \\ & + \alpha_6 \{ [\alpha_7(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1\alpha_4] M_3^2 + \\ & + [\alpha_5(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4] M_4^2 \}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$C(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) - \alpha_4^2. \quad (2.32)$$

Исключая с помощью  $\delta$ -функции параметр  $\alpha_7$ , запишем соответствующую систему уравнений типа Ландау

$$D(\alpha; s, t) = c_6\alpha_6^2 + 2b_6\alpha_6 + \alpha_6 = 0, \quad \alpha_7 = 1 - \sum_{i=1}^6 \alpha_i, \quad (I)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_6} = 2c_6\alpha_6 + 2b_6 = 0,$$

$$D(\alpha; s, t) = c_6\alpha_6^2 + 2b_6\alpha_6 + \alpha_6 = 0, \quad \alpha_6 = 1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i, \quad \frac{\partial D}{\partial \alpha_5} = 0, \quad (II)$$

$$D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, s, t) = 0, \quad \alpha_6 = 1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i, \quad \alpha_5 = 0, \quad (III)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_4} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Значения  $s$  и  $t$ , удовлетворяющие подсистеме I, приводят к совпадающим сингулярностям по  $\alpha_6$ ; удовлетворяющие подсистеме II, — к совпадающим сингулярностям по  $\alpha_5$  и конечным по  $\alpha_6$  и, наконец, удовлетворяющие подсистеме III, приводят к совпадающим по  $\alpha_4$  и  $\alpha_3$  и конечным по  $\alpha_6$  и  $\alpha_5$ .

Исследование подсистем I и II может быть проведено тем же способом, что и исследование системы (1.8) п.1, и при  $M_3^2 \leq 0$  и  $M_4^2 \leq 0$  соответствующие этим подсистемам особые точки  $s$  и  $t$  — вещественны.

Особые точки, соответствующие подсистеме III, лежат на поверхности, уравнение которой можно записать в виде равенства нулю следующего определителя

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = As^2 + 2Bst + Ct^2 + 2Ds + 2Et + F = 0,$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= -\alpha_2 t + m^2 - \alpha_1 M_3^2, \\ d_{12} &= \frac{-\alpha_1 s - \alpha_2 t + m^2 - \alpha_1 M_3^2}{2} - \\ &\quad - \frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)\{-\alpha_2 t + m^2 - \alpha_1 M_3^2\} - \alpha_1 s - \alpha_2 t + m^2 - \alpha_1 M_3^2}{2} - \alpha_1 s + m^2 - \\ &\quad - \alpha_2 M_2^2 \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2) - (1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2)m^2 - \alpha_1 \alpha_2 M_1^2 + \alpha_2(1 - \alpha_1 - \alpha_2)M_2^2}{2}, \\ d_{21} &= -\frac{(1 - \alpha_1 - \alpha_2)\{-\alpha_2 t + m^2 - \alpha_1 M_3^2\}}{2}, \\ d_{22} &= \frac{\alpha_1(1 - \alpha_1 - \alpha_2)s - (1 - 2\alpha_1 - 2\alpha_2)m^2 - \alpha_1 \alpha_2 M_1^2 + \alpha_2(1 - \alpha_1 - \alpha_2)M_2^2}{2} \times \\ &\quad \times (1 - \alpha_1 - \alpha_2)[\alpha_1 \alpha_2 M_1^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)m^2]. \end{aligned}$$

Следует отметить, что это уравнение получено при следующих ограничениях на массы частиц:  $m_6 = m_3$ ,  $M_4 = 0$ . В плоскости вещественных значений переменных  $s$  и  $t$  оно представляет гиперболу.

Исследование этого уравнения, которое проводится так же, как и исследование системы (1.11) в п.1, показывает, что особые точки функции  $F^6(s, t)$  являются вещественными.

Следовательно, анализ системы уравнений показывает, что комплексные значения переменных  $s$  и  $t$  являются регулярными точками вклада в амплитуду рассеяния от диаграммы шестого порядка при  $m_6 = m_3$ ,  $M_3^2 \leq 0$  и  $M_4^2 = 0$ . По-видимому, исключение оставшихся параметров  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_4$  позволило снять эти ограничения на массы частиц. Однако этот вопрос в статье не рассмотрен, так как исследование спектральных кривых (являющихся в этом случае кривыми порядка выше 4) осуществить затруднительно.

Отметим в заключение, что полученные для диаграммы шестого порядка результаты без труда переносятся на произвольную диаграмму лестничного типа с тем только лишь отличием, что необходимо исключать из уравнений большее число параметров  $\alpha$  для доказательства соответствующих аналитических свойств фейнмановских амплитуд. Возникающие при этом ограничения на массы частиц (равенство внутренних масс и  $M_3^2 \leq 0$ ,  $M_4^2 = 0$ ), по-видимому, могут быть сняты путем исключения оставшихся неисключенными параметров  $\alpha$ , что приведет к спектральным кривым высокого порядка. Мы надеемся осуществить исследование этого случая в следующей работе.

1. Mandelstam S., *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 1344.
2. Тодоров И.Т., Дисперсионные соотношения и спектральные представления в теории возмущений, препринт ОИЯИ, Р-1205, 1963.
3. Коломыцев В.И., Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Изд-во АН УССР, Киев, 1963.
4. Tarski J., *J. Math. Phys.*, 1960, **1**, 154.
5. Chisholm R., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1952, **48**, 300.
6. Wu T., *Phys. Rev.*, 1961, **123**, 1567.

# Об аналитических свойствах некоторых вершинных амплитуд в теории возмущений

В.И. ФУЩИЧ

1. Исходя из аксиом теории поля, Ямамота [1] показал, что вершинная амплитуда как функция квадратов внешних импульсов  $p_1^2 \equiv \bar{s}$  и  $p_3^2 \equiv \bar{t}$  не имеет комплексных особенностей ( $\text{Im } \bar{s} \neq 0, \text{Im } \bar{t} \neq 0$ ), если квадрат третьего внешнего импульса отрицателен ( $p_2^2 \equiv \bar{u} < 0$ ). Более того, им доказано представление Мандельштама относительно этих переменных для  $p_2^2 < 0$ .

Представляет интерес исследование аналитических свойств вершинных амплитуд Фейнмана, поскольку знание аналитических свойств этих амплитуд, как будет видно ниже, позволяет изучить аналитическую структуру амплитуд рассеяния и рождения в произвольном порядке теории возмущений для определенного класса диаграмм. К настоящему времени детально изучены особенности диаграммы рис. 1 [2, 3].

Отметим, что уже амплитуда такой, сравнительно простой диаграммы не имеет представления Мандельштама, когда  $\bar{u} > 0^*$ .

В разделе 2 и 3 показано, что амплитуды, соответствующие диаграммам рис. 2 и 3, не имеют комплексных особенностей относительно переменных  $\bar{s}$  и  $\bar{t}$  при определенных ограничениях на массы виртуальных частиц и квадрат импульса  $p_2^2$ .

В четвертом разделе показано, как с помощью интегрального представления для вершинной амплитуды (например, представления Мандельштама) можно исследовать аналитические свойства амплитуд, соответствующих диаграммам типа рис. 4, описывающих процессы рассеяния частиц.

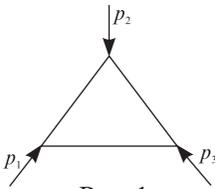


Рис. 1.

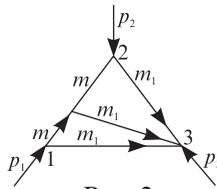


Рис. 2.

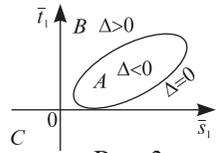


Рис. 3.

2. Особенности амплитуды Фейнмана диаграммы рис. 2 находятся на поверхности Ландау [4]

$$\xi_3 = (1 - 2\gamma^2) \left( \xi_1 \xi_2 - \sqrt{(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2^2)} \right) + 2\gamma \sqrt{1 - \gamma^2} \left( \xi_1 \sqrt{1 - \xi_1^2} + \xi_2 \sqrt{1 - \xi_2^2} \right), \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{s} &= m^2 + m_1^2 - 2mm_1\xi_1, & \bar{u} &= m^2 + m_1^2 - 2mm_1\xi_2, \\ \bar{t} &= 3m_1^2 + 2m_1^2(\eta_{34} + \eta_{45} - \xi_3), & \eta_{34} &= \sqrt{(1 - \gamma^2)(1 - \xi_1^2)} - \gamma\xi_1, \\ \eta_{45} &= \sqrt{(1 - \gamma^2)(1 - \xi_2^2)} - \gamma\xi_2, & \gamma &= \frac{m_1}{2m}. \end{aligned}$$

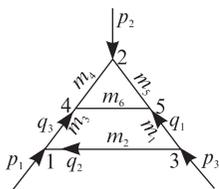


Рис. 4.

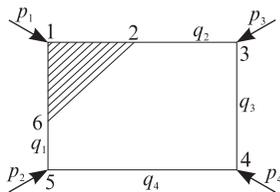


Рис. 5.

Рассмотрим случай, когда  $\gamma = 1$ , и, кроме того, ради простоты, положим  $\bar{u} = 5m^2$ . Тогда уравнение (1) примет вид

$$\sigma^{(3)} = 4(5m^2 - \bar{s})^2 + (22m^2 - 2\bar{s} - \bar{t})^2 - 64m^2 = 0. \quad (2)$$

Далее, воспользуемся идеей работы [5], т.е. уравнение (2) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sigma^{(3)} &= 8(\bar{s}_1^2 - \bar{s}_2^2) + 4(\bar{s}_1\bar{t}_1 - \bar{s}_2\bar{t}_2) + \bar{t}_1^2 - \bar{t}_2^2 - \\ &- 128m^2\bar{s}_1 - 44m^2\bar{t}_1 + 520m^4 = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{Im} \sigma^{(3)} = 2(4\bar{s}_1 + \bar{t}_1 - 32m^2)\bar{s}_2 + (\bar{t}_1 + 2\bar{s}_1 - 22m^2)\bar{t}_2 = 0, \quad (3.2)$$

где

$$\bar{s}_1 = \operatorname{Re} \bar{s}, \quad \bar{s}_2 = \operatorname{Im} \bar{s} \neq 0, \quad \bar{t}_1 = \operatorname{Re} \bar{t}, \quad \bar{t}_2 = \operatorname{Im} \bar{t} \neq 0,$$

и решим эту систему уравнений относительно  $\bar{s}_2$ . Тогда получим, что

$$\bar{s}_2 = \pm \sqrt{\frac{\Delta(\bar{s}_1, \bar{t}_1)}{(\beta + 2)^2 + 4}}, \quad (4)$$

$$\Delta(\bar{s}_1, \bar{t}_1) = 8\bar{s}_1^2 + 4\bar{s}_1\bar{t}_1 + \bar{t}_1^2 - 128m^2\bar{s}_1 - 44m^2\bar{t}_1 + 520m^4,$$

$$\beta = \frac{2(4\bar{s}_1 + \bar{t}_1 - 32m^2)}{22m^2 - 2\bar{s}_1 - \bar{t}_1}. \quad (5)$$

Из (4) следует, что только те  $\bar{s}$  и  $\bar{t}$  могут быть комплексными особыми точками амплитуды, для которых  $\Delta > 0$ , т.е. точки, в которых действительные части ( $\bar{s}_1$  и  $\bar{t}_1$ ) лежат вне эллипса  $\Delta = 0$  (рис. 3).

Теперь используем тот факт, что амплитуда Фейнмана диаграммы рис. 2 не имеет особенностей в области, где  $\bar{s}_1 < 0$ ,  $\bar{t}_1 < 0$ , а  $\bar{s}_2 \neq 0$  и  $\bar{t}_2 \neq 0$  (в дальнейшем обозначим эту область через  $\tilde{C}$ ) [4, 6]. Поскольку точки  $\bar{s}, \bar{t} \in \tilde{C}$  удовлетворяют уравнениям (3.1) и (3.2), то это означает, что они не являются на самом деле особыми точками амплитуды (эти особенности лежат не на физическом листе). Другими словами, это означает, что контур интегрирования по параметру  $\alpha$ , если вклад в амплитуду от указанной диаграммы представить в виде интегралов Фейнмана, не защемляется, когда  $\bar{s}$  и  $\bar{t} \in \tilde{C}$ .

Итак, для аналитического продолжения амплитуды из области  $\tilde{C}$  на все другие точки пространства  $(\bar{s}, \bar{t})$  достаточно использовать лемму Идена–Тарского [7] (см. лемму 2а). Чтобы полностью закончить доказательство приведенного выше утверждения, необходимо еще показать, что амплитуды, соответствующие диаграммам,

которые получаются из диаграммы рис. 2 “стягиванием” линий (1,4) или (2,4) в точку, не имеют комплексных особенностей. Последнее станет очевидным, если заметить, что при этом мы получим треугольные диаграммы, а, как известно, амплитуды таких диаграмм не имеют особенностей в области, где  $\bar{s}_2 \neq 0$  и  $\bar{t}_2 \neq 0$ . В этом можно и непосредственно убедиться, если повторить только что приведенные рассуждения для этих диаграмм.

**3.** Исследуем аналитические свойства амплитуды диаграммы рис. 4. Запишем вклад в амплитуду от этой диаграммы в виде

$$T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}) = \int dq_1 \frac{V(q_2^2, q_3^2, \bar{u})}{\prod_{i=1}^3 q_i^2 - m_i^2}, \quad (6)$$

где  $V(q_2^2, q_3^2, \bar{u})$  — вершинная функция треугольника (4, 2, 5). Для этой функции справедливо представление Мандельштама [2] (при  $\bar{u} > 0$ ):

$$V(q_2^2, q_3^2, \bar{u}) = \int_{a_0 \geq (m_5 + m_6)^2}^{\infty} d\mu_1^2 \int_{b_0 \geq (m_4 + m_6)^2}^{\infty} d\mu_2^2 \frac{\rho(\mu_1^2, \mu_2^2, \bar{u})}{(q_2^2 - \mu_1^2)(q_3^2 - \mu_2^2)}. \quad (7)$$

Подставив (7) в (6) и при этом заменив порядок интегрирования (предполагаем, что эта операция законна), в  $\alpha$ -представлении  $T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u})$  можно представить следующим образом:

$$T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}) = \int_{a_0}^{\infty} d\mu_1^2 \int_{b_0}^{\infty} d\mu_2^2 \int_0^1 d\alpha \frac{\rho(\mu_1^2, \mu_2^2, \bar{u}) \delta\left(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i\right)}{\{D^{(3)}\}^3}, \quad (8)$$

$$D^{(3)} = \alpha_1(\bar{t} - \mu_1^2) + \alpha_2(\bar{s} - \mu_2^2) - \alpha_3 m_1^2 + \alpha_4(\bar{t} - m_2^2) + \alpha_5(\bar{s} - m_3^2) - (\alpha_1 + \alpha_4)^2 \bar{t} - (\alpha_2 + \alpha_5)^2 \bar{s} + (\alpha_2 + \alpha_5)(\alpha_1 + \alpha_4)(\bar{u} - \bar{s} - \bar{t}). \quad (9)$$

Для нахождения особенностей  $T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u})$  используем уравнения Ландау

$$D^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}, \alpha) = 0, \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial D^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u}, \alpha)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \sum_{i=1}^5 \alpha_i = 1. \quad (10.2)$$

Выразив из уравнений (10.2)  $\alpha_5$  и  $\alpha_4$  через  $\bar{s}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{u}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и подставив их в (10.1), получим уравнение поверхности сингулярностей, которая, вообще говоря, не совпадает с поверхностью Ландау (каждая точка поверхности Ландау принадлежит этой поверхности, но обратное утверждение неверно). Используя уравнение этой поверхности, покажем, что  $T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u})$  не имеет особенностей, если  $\bar{s}_2 \neq 0$ ,  $\bar{t} \neq 0$ , а  $\bar{u} < 0$ .

Уравнение поверхности сингулярностей имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^{(3)} &= a\bar{s}^2 + 2b\bar{s}\bar{t} + c\bar{t}^2 + 2d\bar{s} + 2e\bar{t} + f = 0, \\
 a &= c = \alpha_3^2, \quad b = -\alpha_3^2, \\
 d &= -\alpha_3[m_3^2 - m_2^2 + \bar{u}(1 - 2\alpha_1 - \alpha_3)] + 2(1 - \alpha_1 - \alpha_3)\alpha_3\bar{u}, \\
 e &= \alpha_3[m_3^2 - m_2^2 + \bar{u}(1 - 2\alpha_1 - \alpha_3)] + 2\alpha_1\alpha_3\bar{u}, \\
 f &= [m_3^2 + \bar{u}(1 - 2\alpha_1 - \alpha_3) - m_2^2]^2 + \\
 &\quad + 4\bar{u}\{-\alpha_1\mu_1^2 - \alpha_2\mu_2^2 - \alpha_3m_1^2 + \alpha_2m_3^2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1\bar{u} - m_3^2)\}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Далее, повторяя рассуждения раздела 2, находим, что только те комплексные точки  $\bar{s}$ ,  $\bar{t}$  могут быть особыми, для которых

$$\bar{t}_2 = \beta_1\bar{s}_2, \tag{12}$$

а

$$\bar{s}_2 = \pm \sqrt{\frac{\Delta_1(\bar{s}_1, \bar{t}_1, \alpha)}{(\sqrt{a} + \beta_1\sqrt{c})^2}}, \tag{13}$$

где

$$\Delta_1 = a\bar{s}_1^2 + 2b\bar{s}_1\bar{t}_1 + c\bar{t}_1^2 + 2d\bar{s}_1 + 2e\bar{t}_1 + f, \quad \beta_1 = -\frac{a\bar{s}_1 + b\bar{t}_1 + d}{c\bar{t}_1 + b\bar{s}_1 + e}. \tag{14}$$

Для  $\mu_2^2 \geq m_3^2$  парабола  $\Delta_1 = 0$  (линия пересечения поверхности  $\sigma_1^{(3)}$  с плоскостью  $\bar{s}_1, \bar{t}_1$ ) лежит всегда в области, где  $\bar{s}_1 \geq 0$ ,  $\bar{t}_1 \geq 0$ . Поскольку поверхность сингулярностей  $\sigma_1^{(3)}$  “находится над областью  $C$ ”, то это дает возможность аналитически продолжить амплитуду  $T^{(3)}(\bar{s}, \bar{t}, \bar{u})$ , как и раньше, из  $\bar{C}$  на все другие точки пространства  $(\bar{s}, \bar{t})$ , для которых  $\bar{s}_2 \neq 0$  и  $\bar{t}_2 \neq 0$ .

Мы не рассматриваем случаев, когда некоторые из параметров  $\alpha$  равны нулю, так как при этом сохраняются все сформулированные выше выводы.

До сих пор предполагалось, что  $\bar{u} < 0$ . Отметим, что такие же результаты получаются и для  $\bar{u} > 0$ , если при этом

$$\frac{\bar{u} - m_4^2 - m_5^2}{2m_4m_5} < -1. \tag{15}$$

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, нужно вместо (7) использовать модифицированное представление Мандельштама для функции  $V(q_2^2, q_3^2, \bar{u})$ , которое получено в работе [2] (см. формулу (22)).

Из приведенного следует, что если предположить справедливость представления (7) для диаграмм лесничного типа с  $n$  внутренними линиями, то амплитуда Фейнмана для диаграммы такого же типа с  $n + 1$  внутренней линией не имеет комплексных особенностей.

**4.** В этом разделе рассматриваются особенности амплитуды Фейнмана диаграммы рис. 5, когда массы виртуальных и реальных частиц одинаковы, за исключением массы частицы с импульсом  $p_1$ .

Вклад в амплитуду рассеяния от этой диаграммы запишем в виде

$$T^{(4)}(s, t) = \int dq_1 \frac{V(p_1^2, q_1^2, q_1^2)}{\prod_{i=1}^4 q_i^2 - m_i^2}, \quad (16)$$

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2.$$

Используя интегральное представление (7), как и в разделе 3, можно показать, что

$$T^{(4)}(s, t) = \int_{a_0}^{\infty} d\mu_1^2 \int_{b_0}^{\infty} d\mu_2^2 \int_0^1 d\alpha \frac{\rho(p_1^2, \mu_1^2, \mu_2^2) \delta\left(1 - \sum_{i=1}^6 \alpha_i\right)}{\{D^{(4)}(\alpha; s, t)\}^4}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D^{(4)}(s, t; \alpha) = & \alpha_6(\alpha_2 + \alpha_4)s + \alpha_5(\alpha_1 + \alpha_3)t - \alpha_1\mu_1^2 - \\ & - \alpha_2(p_1^2 - \mu_2^2) - \alpha_3m^2 + \alpha_4(p_1^2 - m^2) - \alpha_5m^2 - (\alpha_2 + \alpha_4)^2p_1^2 - \\ & - \alpha_6^2m^2 - \alpha_5(\alpha_2 + \alpha_4)(p_1 - m^2) - \alpha_6(\alpha_2 + \alpha_4)(p_1^2 + m^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Доказательство отсутствия комплексных особенностей в  $T^{(4)}(s, t)$  сводится к повторению выкладок раздела 3, и поэтому мы его здесь не приводим. Однако отметим, что амплитуда  $T_{\text{red}}^{(4)}(s, t)$  диаграммы, которая получается из диаграммы рис. 5 “стягиванием” линий (2, 3) и (5, 6) в точку, имеет такой же знаменатель  $D_{\text{red}}^{(4)}(\alpha; s, t)$ , как и амплитуда диаграммы четвертого порядка (квадрат) с переменными массами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Аналитические свойства этой диаграммы детально изучены Тарским и Владимировым [7, 8]. Воспользовавшись их результатами, легко убедиться, что  $T_{\text{red}}^{(4)}(s, t)$  не имеет комплексных особенностей, если  $s_2 = \text{Im } s \neq 0$ ,  $t_2 = \text{Im } t \neq 0$ .

Таким образом, знание аналитических свойств вершинных амплитуд, а точнее, их интегральных представлений (Мандельстама или Бергмана–Вейля [3]) дает возможность изучать аналитические свойства амплитуд рассеяния и рождения, соответствующих определенным классам диаграмм, в произвольном порядке теории возмущений.

1. Yamamoto K., *Prog. Theor. Phys.*, 1961, **25**, 720.
2. Fronsdal C., Norton R., *J. Math. Phys.*, 1963, **5**, 100.
3. Симонов Ю.А., *ЖЭТФ*, 1962, **43**, 2263.
4. Тодоров И., Препринт ОИЯИ (докторск. диссерт.), 1963.
5. Коломыцев В.И., Фушич В.И., *УМЖ*, 1964, № 4.
6. Nakanisi N., *Sup. Prog. Theor. Phys.*, 1961, № 18, 1.
7. Tarski J., *J. Math. Phys.*, 1960, **1**, 149.
8. Владимиров В.С., *УМЖ*, 1960, № 2.

# Унитарная симметрия и группа Пуанкаре

В.И. ФУЩИЧ

В настоящее время в ряде работ обсуждается вопрос об объединении группы Пуанкаре  $P$  с группой внутренних симметрий  $S$  (простая группа Ли) [1–5]. При этом прежде всего следует выяснить, не является ли данное объединение тривиальным. Наиболее убедительный результат в этом направлении получен Мишеллем [3]. Однако и этот результат получен при довольно жестких ограничениях на группу  $G$ , являющуюся объединением групп  $P$  и  $S$  (предполагается, что каждый элемент  $g \in G$  имеет вид  $g = sp$ ,  $s \in S$ ,  $p \in P$ ). Но, как это видно из работ [4, 5] и др., при объединении двух групп  $G \supset PS$  содержит элементы, которые непредставимы в виде  $sp$ . Алгебра Ли такой группы всегда содержит генераторы, которые не принадлежат ни алгебре  $P$ , ни  $S$ . Поэтому естественно и в этом случае выяснить вопрос о тривиальности или не тривиальности данного объединения.

В этой заметке найдены условия, при которых алгебра, содержащая, кроме генераторов алгебр  $P$  и  $S$ , добавочные генераторы, является тривиальным объединением  $P$  и  $S$ .

Пусть генераторами алгебры  $G$  являются генераторы алгебр  $P$  и  $S$ , а также генераторы  $H'_l$  и  $E'_\gamma$ , удовлетворяющие условиям:

$$[H'_l, H'_m] = 0 \quad (l, m = 1, 2, \dots, k), \quad (1)$$

$$[E'_\gamma, E'_\nu] \neq 0 \quad (\gamma, \nu = 1, 2, \dots, r). \quad (2)$$

Кроме того, будем предполагать, что для произвольного  $\gamma$  можно указать такое  $l$ , при котором

$$[E'_\gamma, H'_m] = 0 \quad \text{для } m \neq l, \quad [E'_\gamma, H'_l] \neq 0. \quad (3)$$

Генераторы алгебр  $P$  и  $S$  удовлетворяют условиям:

$$[P_\rho, P_\sigma] = \lambda_{\rho\sigma}^\tau P_\tau \quad (\tau, \rho, \sigma = 1, 2, \dots, 10), \quad (4)$$

$$[H_i, H_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad [H_i, E_\alpha] = r_i(\alpha) E_\alpha,$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]_- = \sum_i r_i(\alpha) H_i \quad \text{или} \quad \sum_{\substack{\text{по простым} \\ \text{корням}}} [E_\alpha, E_{-\alpha}] r_i(\alpha) = H_i, \quad (5)$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \quad (\alpha \neq -\beta), \quad [H_i, P_\rho] = 0. \quad (6)$$

Докажем, что  $[E_\alpha, P_\rho] = 0$ , т.е. объединение  $G$  будет физически тривиальным и никаких массовых формул нельзя получить в одном из следующих трех случаев:

$$1. \quad [H_j, H'_l] = A_{jl}^m, \quad [P_\rho, E'_\gamma]_- = B_{\rho\gamma}^\nu E'_\nu, \quad [E'_\gamma, E_\alpha]_- = 0. \quad (7)$$

**Доказательство.** При указанных допущениях о группе  $G$

$$[E_\alpha, P_\rho]_- = a_{\alpha\rho}^\beta E_\beta + b_{\alpha\rho}^j H_j + c_{\alpha\rho}^\tau P_\tau + d_{\alpha\rho}^l H'_l + f_{\alpha\rho}^\gamma E'_\gamma. \quad (8)$$

Поскольку  $G$ , по предположению, — группа Ли, то имеет место тождество Якоби

$$\begin{aligned} J(E_\alpha, P_\rho, H_i) &\equiv [[E_\alpha, P_\rho], H_i] + [[P_\rho, H_i], E_\alpha] + [[H_i, E_\alpha], P_\rho] = \\ &= a_{\alpha\rho}^\beta (r_i(\alpha) - r_i(\beta)) E_\beta + d_{\alpha\rho}^l [H'_l, H_i] + f_{\alpha\rho}^\gamma [E'_\gamma, H_i] + \\ &+ r_i(\alpha) (b_{\alpha\rho}^j H_j + c_{\alpha\rho}^\tau P_\tau + d_{\alpha\rho}^l H'_l + f_{\alpha\rho}^\gamma E'_\gamma) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9), с учетом условий (5) и (7), следует, что

$$a_{\alpha\rho} = \delta_\alpha^\beta a_{\alpha\rho}, \quad b_{\alpha\rho}^j = 0, \quad c_{\alpha\rho}^\tau = 0, \quad f_{\alpha\rho}^\gamma = 0. \quad (10)$$

Далее рассмотрим следующее тождество Якоби:

$$\begin{aligned} J(E_\alpha, P_\rho, E'_\gamma) &= a_{\alpha\rho}^\beta [E_\beta, E'_\gamma] + b_{\alpha\rho}^j [H_j, E'_\gamma] + \\ &+ c_{\alpha\rho}^\tau [P_\rho, E'_\gamma] + d_{\alpha\rho}^l [H'_l, E'_\gamma] + f_{\alpha\rho}^\nu [E'_\nu, E'_\gamma] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Учитывая (3) и (10), из (11) следует, что

$$d_{\alpha\rho}^l = 0. \quad (12)$$

Для доказательства того, что  $a_{\alpha\rho} = 0$ , достаточно использовать тождество Якоби

$$J(P_\rho, P_\sigma, E_\alpha) \equiv 0 \quad (13)$$

и свойства структурных констант  $\lambda_{\alpha\rho}^\tau$  (см. [1]).

$$2. \quad [E'_\gamma, H_i] = D_{\gamma i}^\nu E'_\nu, \quad [P_\rho, H'_l]_- = C_{\rho l}^m H'_m, \quad [H'_l, E_\alpha] = 0. \quad (14)$$

**3.** Если в  $G$  существует хоть один генератор  $H'_l$ , который коммутирует с генераторами  $P$  и  $S$ , то и в этом случае  $[E_\alpha, P_\rho] = 0$ .

Для доказательства этих утверждений нужно вместо тождества (11) использовать тождество

$$J(E_\alpha, P_\rho, H'_l) \equiv 0. \quad (15)$$

В заключение отметим, что если условие (6) выполняется не для всех  $i$  то, как это показано в [2], можно построить нетривиальное объединение  $G$ , генераторами которого будут только  $P_\rho$ ,  $H_i$  и  $E_\alpha$ .

1. Coester F., Hamermesh M., MoGlenn, *Phys. Rev.*, 1964, **135**, B450.
2. Ottson U., Kihlberg A., Hilsson J., Preprint, Gothenburg, 1964.
3. Michel L., *Phys. Rev. B*, 1965, **137**, 405.
4. Gürsey F., Pais A., Radicati L., *Phys. Rev. Lett.*, 1964, **13**, 239.
5. Кадышевский В.Г., Мурадян Р.М., Тавхелидзе А.Н., Тодоров И.Т., Препринт ОИЯИ, Д-1929, 1964.

# Про представлення групи де Сіттера

*В.І. ФУЩИЧ*

Як відомо, сукупність дійсних перетворень у п'ятивимірному просторі Мінковського  $x'_\alpha = a_{\alpha\rho}x_\rho$  ( $\alpha, \rho = 0, 1, 2, 3, 4$ ) утворює групу де Сіттера, якщо квадратична форма  $s^2 = x_0^2 - \sum_{i=1}^4 x_i^2$  інваріантна відносно цих перетворень. Томас [1] і Ньютон [2] побудували і описали унітарні представлення цієї групи, використавши той факт, що максимальною компактною підгрупою групи де Сіттера (позначимо її через  $LO_4$ ) є група  $O_4$ , представлення якої добре вивчені.

В цій замітці ми побудуємо представлення групи  $LO_4$ , використавши те, що максимальною некомпактною підгрупою групи де Сіттера є власна група Лоренца  $LO_3$ , всі представлення якої описані Гельфандом і Наймарком.

Інфінітезимальні оператори представлення групи  $LO_4$ , задовольняють співвідношення

$$[A_{i_1j_1}, A_{i_2j_2}]_- = \delta_{i_1j_2}A_{j_1i_2} + \delta_{j_1i_2}A_{i_1j_2} - \delta_{i_1i_2}A_{j_1j_2} - \delta_{j_1j_2}A_{i_1i_2}, \quad (1.1)$$

$$i_1, i_2, j_1, j_2 = 1, 2, 3, 4,$$

$$[A_{ij}, B_k]_- = 0, \quad \text{якщо } k \neq j; \quad k \neq i; \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

$$[B_i, B_k]_- = A_{ik},$$

де  $A_{ij}$  і  $B_k$  — оператори, які відповідають нескінченно малим поворотам в площинах  $(x_i, x_j)$  і  $(x_0, x_i)$ .

Ефективно побудувати представлення групи  $LO_4$  — це задати дії операторів  $A_{ij}$ ,  $B_k$  на деякий базис в просторі  $R$ , де визначений оператор  $T_g$  ( $g$  — елемент  $LO_4$ ). Припустимо, що  $R$  є прямою сумою просторів, в яких реалізуються незвідні представлення групи  $LO_3$ , і що в цій сумі не зустрічається двох просторів, які б мали однакові індекси  $(l_0, l_1)$  [3, 4]<sup>1</sup>.

Згідно з [3, 4] в кожному з цих просторів можна вибрати канонічний базис  $\xi_{l,m}^{l_0, l_1}$ . Закон дії операторів  $A_{ij}$ ,  $B_k$ , коли  $i, j, k = 1, 2, 3$ , на  $\xi_{l,m}^{l_0, l_1}$  відомий [3, 4], тому залишилося визначити тільки  $A_{i4}\xi_{l,m}^{l_0, l_1}$  і  $B_4\xi_{l,m}^{l_0, l_1}$ .

Окремо випишемо комутаційні співвідношення між операторами  $A_{i4}$ ,  $B_i$ ,  $B_4$  та іншими операторами алгебри (1):

$$[A_{jk}, A_{i4}]_- = -\delta_{ji}A_{k4} + \delta_{ki}A_{j4}, \quad [A_{ik}, B_4]_- = 0, \quad (3.1)$$

$$[A_{i4}, B_i]_- = -B_4, \quad [B_i, B_4]_- = A_{i4},$$

$$[A_{i4}, B_k]_- = 0, \quad \text{якщо } k \neq i; \quad k \neq 4, \quad (3.2)$$

$$[A_{i4}, A_{j4}]_- = -A_{ij}, \quad [A_{i4}, B_4]_- = B_i. \quad (4)$$

Розглянемо систему рівнянь

$$L_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_0} + L_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + L_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + L_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} + \varkappa \Psi = 0, \quad (5)$$

де  $L_0, L_1, L_2, L_3$  — матриці,  $\varkappa$  — стала величина;  $\Psi$  — функція, яка перетворюється за звідним представленням групи  $LO_3$ , яке розкладається в пряму суму незвідних представлень. Якщо в (3) зробити заміну  $A_{i4} \rightarrow L_i, B_4 \rightarrow L_0$ , то можна переконатись, що при цьому співвідношення (3) збігатимуться з умовою релятивістської інваріантності рівняння (5) (див. [4], стор. 278).

Цей факт дозволяє зразу написати остаточний результат:

$$B_4 \xi_{l,m}^{l_0, l_1} = b_l^{l_0+1} \xi_{l,m}^{l_0+1, l_1} + b_l^{l_0-1} \xi_{l,m}^{l_0-1, l_1} + b_l^{l_1+1} \xi_{l,m}^{l_0, l_1+1} + b_l^{l_1-1} \xi_{l,m}^{l_0, l_1-1}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} b_l^{l_0+1} &= c_1 \sqrt{(l+l_0+1)(l-l_0)}, & l &\geq l_0+1, \\ b_l^{l_0-1} &= c_2 \sqrt{(l+l_0)(l-l_0-1)}, & l &\geq l_0, \\ b_l^{l_1+1} &= c_3 \sqrt{(l+l_1)(l-l_1-1)}, & l &\geq l_0, \\ b_l^{l_1-1} &= c_4 \sqrt{(l+l_1+1)(l-l_1)}, & l &\geq l_0, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — довільні сталі, які можуть бути визначені з умови (4):

$$A_{i4} \xi_{l,m}^{l_0, l_1} = -[B_i, B_4] \xi_{l,m}^{l_0, l_1}. \quad (8)$$

Цікаво зазначити, що якщо  $R$  є прямою сумою двох просторів<sup>2</sup>, в яких реалізуються незвідні представлення групи  $LO_3$  з індексами  $l_0 = 1/2, l_1 = 3/2$  і  $l_0 = -1/2, l_1 = 3/2$ , то  $A_{i4} = c\gamma_i, B_4 = c\gamma_0$ ; якщо покласти  $c_1 = c_2 = c$ , то

$$A_{ik} = \text{const} \cdot \gamma_i \gamma_k, \quad B_i = \text{const} \cdot \gamma_0 \gamma_i, \quad (9)$$

де  $\gamma_0, \gamma_i$  — матриці Дірака.

Отже, матриці  $\gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_\nu$  ( $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ) реалізують чотиривимірне представлення алгебри (1). Зауважимо, в чому можна переконатись, що матриці  $\gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_\nu, \gamma_\mu \gamma_5, \gamma_5$  реалізують чотиривимірне представлення алгебри  $LO_5$ .

Незвідні представлення групи  $LO_{n+1}$  будуються аналогічно, при цьому замість системи (5) слід використовувати більш загальну систему рівнянь [5].

1. Thomas L.H., *Ann. Math.*, 1941, **42**, 113.
2. Newton T.D., *Ann. Math.*, 1950, **51**, 730.
3. Наймарк М.А., *Линейные представления группы Лоренца*, М., 1958.
4. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я., *Представления группы вращений и группы Лоренца*, М., 1958.
5. Соколик Г.А., *ДАН СССР*, 1957, **114**, 1206.
6. Соколик Г.А., *Групповые методы в теории элементарных частиц*, Атомиздат, 1965.

<sup>2</sup>Незвідні представлення групи  $LO_4$ , які задані в  $R = \sum_{i=1}^n \oplus R_i^{l_0^i, l_1^i}$ , будуть скінченновимірними лише в тому випадку, коли всі індекси  $l_0^i, l_1^i$  одночасно цілі або півцілі.

# О вложении алгебры Пуанкаре

В.И. ФУЩИЧ

The article shows the way of constructing, according to a given spectrum of elementary and hypothetic particle masses, such an algebra  $G$ , containing Poincarais's algebra  $P$  as a subalgebra, or an enveloping algebra  $U(P)$ , that a mass operator determined in the space, where one of unreducible representations is given, be selfadjoint and have a spectrum, coinciding with the given mass spectrum.

By embedding small Poincarais's algebra (non-relativistic case) an explicit type of a mass operator was obtained. It is noted that the mass operator can depend on a spin and parity only in the case, when the fundamental particles, which adrons and bosons "consist" of, have different types and parity.

1. За последние годы экспериментально открыто много элементарных частиц. Несмотря на успешное применение теории групп  $SU(3)$  и  $SU(6)$ , до сего времени не создана теория, которая смогла бы объяснить спектр масс адронов или бозонов. Если рассмотреть таблицу элементарных частиц, то можно заметить, что их массы, или массовый оператор, как мы будем ниже говорить, являются некоторой функцией взаимоккоммутирующих операторов  $M^1$ , т.е.

$$M = f(I_3, I, Y, J, \tilde{P}, X), \quad (1)$$

$I, I_3, Y, J, \tilde{P}$  — операторы изоспина, проекции изоспина на ось  $z$  гиперзаряда, спина, парности соответственно,  $X$  — некоторые операторы, физический смысл которых пока не ясен<sup>2</sup>.

Одной из основных задач теории элементарных частиц является установление явной зависимости  $M$  от этих операторов. В работах [1] делались попытки установить такую зависимость методом вложения алгебры Пуанкаре  $P$  в более широкую алгебру Ли  $G$ . Оказывается, что таким методом, как это показано в [2], невозможно получить зависимости типа (1), если алгебра  $G$  конечномерна, а оператор Казимира  $P_\mu^2$  алгебры  $P$  — самосопряженный. В связи с этим естественно выяснить вопрос, можно ли получить такую зависимость, не ограничиваясь тем, что  $P_\mu^2$  — самосопряженный, а  $G$  — конечномерная или бесконечномерная алгебра Ли.

В работе показано, как вложить алгебру  $P$  в  $G$  так, чтобы оператор массы (или спина) был самосопряженный и имел дискретный спектр. Кроме того из рассмотрения вложения малой алгебры Пуанкаре  $P_l$  в конечномерную алгебру  $G_l$  (нерелятивистский случай), найден явный вид оператора массы частицы, который при некоторых предположениях приводит к массовой формуле Гелл–Манна.

2. Пусть нам заданы четыре неприводимых представления алгебры  $P$  в пространствах  $H_1^{\mu_1, s_1}, H_2^{\mu_2, s_2}, H_3^{\mu_3, s_3}, H_4^{\mu_4, s_4}$ , где  $\mu_i, s_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), вообще говоря,

Український фізичний журнал, 1967, 12, № 5, С. 741–746.

<sup>1</sup>В действительности  $M$  — оператор массы не отдельной частицы, а оператор массы некоторой системы, которая может находиться в различных возбужденных состояниях, собственных для этого оператора.

<sup>2</sup>Без таких дополнительных операторов невозможно объяснить разницу между массами мезонов  $\omega$  и  $\Phi, \eta$  и  $\eta', f$  и  $f'$ .

комплексные числа, которые характеризуют представления этой алгебры [3]. Как известно, оператор  $(P_\mu^i)^2$ , действующий в  $H_i^{\mu_i, s_i}$ , кратен единичному оператору, т.е.

$$(P_\mu^i)^2 H_i = \mu_i^2 H_i. \quad (2)$$

Поскольку нас будет интересовать октет барионов, положим  $\text{Re } \mu_1 = N$ ,  $\text{Re } \mu_2 = \Xi$ ,  $\text{Re } \mu_3 = \Sigma$ ,  $\text{Re } \mu_4 = \Lambda$  — массы соответствующих барионов, а  $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \frac{1}{2}$ .

Обозначим через  $H$  пространство, которое является прямой суммой пространств  $H_i$ . В  $H$ -пространстве операторы импульсов  $P_\mu$  и  $P_\mu^2$  имеют вид

$$P_\mu = \begin{pmatrix} P_\mu^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\mu^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_\mu^4 \end{pmatrix}, \quad P^2 \equiv P_\mu^2 \equiv \begin{pmatrix} (P_\mu^1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (P_\mu^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (P_\mu^3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (P_\mu^4)^2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где через  $P_\mu^i$  и  $(P_\mu^i)^2$  обозначены операторы, отображающие  $H_i$  в  $H_i$ . Аналогичный вид имеет оператор момента  $M_{\mu\nu}$ . Очевидно, что в  $H$  реализуется приводимое представление алгебры  $P$ . Однако относительно некоторой алгебры  $G \supset P$  это пространство может быть неприводимым, т.е.  $H$  не содержит подпространств инвариантных относительно  $G$ .

Каждый оператор в  $H$  можно записать в виде [4]

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где операторы  $d_{ij}$  отображают  $H_j$  в  $H_i$ . Нетрудно убедиться, что совокупность операторов типа (4) и операторов алгебры  $P$  образуют алгебру  $G^3$ , т.е.

$$[P, [D, D']] + [D, [D', P]] + [D', [P, D]] = 0, \quad (5)$$

где  $D'$  — оператор типа (4).

Физический смысл дополнительных операторов  $D$  состоит в том, что они переводят частицу (вектор состояния) из одного изотопического мультиплета в другой или в линейную комбинацию частиц (вектор состояний), которые принадлежат различным изотопическим мультиплетам.

Поскольку оператор  $P^2$ , вообще говоря, несамосопряженный, то его нельзя принять за оператор квадрата массы частицы  $M^2$ . Естественно определить оператор квадрата массы частицы  $M^2$  следующим образом:

$$M^2 = \text{Re } P^2 = \frac{P^2 + (P^2)^*}{2}. \quad (6)$$

В том случае, когда все  $d_{ij} = 0$  для  $i \neq j$ , никакой зависимости оператора массы от операторов  $I_3, I, \dots, X$  невозможно таким путем получить, хотя  $G \supset P$ , т.е. алгебра  $G$  является тривиальным расширением алгебры  $P$  [5].

<sup>3</sup>При этом, конечно, предполагается, что обычное произведение операторов  $P, D, D'$  имеет смысл.

Так как скалярное произведение в  $H$  задается формулой

$$(h, g) = \sum_{i=1}^4 (h_i, g_i)_i, \quad (7)$$

где  $h, g \in H$ , а  $h_i, g_i \in H_i$ , то очевидно, что  $M^2$  является самосопряженным оператором в  $H$  и имеет только дискретный спектр.

Таким образом, мы построили алгебру  $G \supset P$ , одно из представлений которой реализуется в  $H$ . Этим самым и показано, что методом вложения алгебры  $P$  в  $G$  можно, в принципе, получить зависимость типа (1), однако вопрос о том, как конструктивно задать алгебру  $G$ , т.е. построить базис (генераторы) этой алгебры и выразить оператор  $M^2$  через этот базис, остается открытым<sup>4</sup>. Такая задача в нерелятивистском случае, как будет видно ниже, может быть полностью решена.

Прежде чем переходить к нерелятивистскому случаю, сделаем несколько замечаний об операторах массы и спина.

**3.** Характерной чертой релятивистской теории (с алгебраической точки зрения) является то, что, в отличие от операторов энергии, импульса и момента, которые являются элементами алгебры  $P$  операторы массы и спина, даже в случае свободной теории, не являются элементами алгебры  $P$ . Действительно, для свободной частицы формула (1) имеет вид

$$M^2 = f(P_0^2, P_1^2, P_2^2, P_3^2) = P_0^2 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2.$$

Оператор квадрата спина

$$S^2 = W_\alpha W_\alpha, \quad W_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} P_\beta M_{\gamma\delta}.$$

Легко убедиться, что операторы  $P_0^2, \dots, P_3^2, W_0^2, \dots, W_3^2$  не принадлежат алгебре  $P$ , и поэтому, чтобы придать четкий математический смысл этим формулам, необходимо расширить алгебру  $P$  до ее обертывающей алгебры  $U(P)$ . Так как генераторами алгебры  $U(P)$  являются все возможные произведения генераторов алгебры  $P$ , то в рамках алгебры  $U(P)$  операторы  $M^2, S^2, P_0^2, \dots, W_3^2$  принадлежат этой же алгебре.

Таким образом, для того, чтобы операторы массы и спина входили в теорию “на равных правах” с операторами энергии, импульса и момента, необходимо положить в ее основу не алгебру Пуанкаре, а алгебру  $U(P)$ . В связи с этим более корректно говорить о вложении  $U(P)$  в  $G$ , а не о вложении  $P$  в  $G$ .

**4.** Рассмотрим вложение малой алгебры Пуанкаре  $P_l$  (т.е. алгебры с генераторами  $P_0, M_{12}, M_{23}, M_{13}$ ) в  $G_l$ . Аналогичным методом, как и в пункте 2, можно показать, что в этом случае алгебра  $G_l \supset P_l$  будет конечномерной алгеброй — 64-мерной алгеброй Ли. В качестве генераторов этой алгебры выберем операторы:

$$\Gamma^\alpha, \Gamma_\mu^\alpha, \Gamma_{\mu\nu}^\alpha, \Gamma_{\mu 5}^\alpha, \Gamma_5^\alpha, \quad \alpha, \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (8)$$

Коммутационные соотношения между этими генераторами можно установить, если заметить, что в фундаментальном (октетном) представлении алгебры  $G_l \equiv \tilde{U}(8) \equiv$

<sup>4</sup>Случай, когда  $P_\mu^2$  — самосопряженный, а  $G$  — бесконечная алгебра Ли, рассмотрен Н. Вотрубой и М. Гавличекком (см. также примечания при корректуре).

$U(4, 4)$  они имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \Gamma^\alpha &= I \otimes \sigma_\alpha, & \Gamma_\mu^\alpha &= \gamma_\mu \otimes \sigma_\alpha, & \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \gamma_\mu \gamma_\nu \otimes \sigma_\alpha, \\ \Gamma_{\mu 5}^\alpha &= \gamma_\mu \gamma_5 \otimes \sigma_\alpha, & \Gamma_5^\alpha &= \gamma_5 \otimes \sigma_\alpha, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $I$  — единичная матрица,  $\sigma_\alpha$ ,  $\gamma_\mu$  — матрицы Паули, Дирака. Все генераторы алгебры  $\tilde{U}(8)$ , за исключением генераторов  $\Gamma_{12}^0$ ,  $\Gamma_{13}^0$ ,  $\Gamma_{23}^0$  являются операторами типа (4).

Найти явный вид массового оператора в рамках алгебры  $\tilde{U}(8)$  означает выразить его через генераторы этой алгебры. В данном случае оператором массы является

$$P_0 = \begin{pmatrix} N \cdot E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Xi \cdot E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma \cdot E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda \cdot E \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что

$$P_0 = c_0 \Gamma^0 + c_1 Y + c_2 I + c_3 Y^2, \quad (11)$$

где  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  — вообще говоря, произвольные постоянные, а

$$I = \frac{1}{2} (\Gamma^0 + \Gamma_0^0 - Y), \quad Y = \frac{1}{2} (\Gamma_0^0 + \Gamma_0^3), \quad Y^2 = \frac{1}{2} (\Gamma^0 + \Gamma^3).$$

В октетном представлении алгебры  $\tilde{U}(8)$  эти постоянные однозначно выражаются через массы частиц, которые входят в октет, а именно  $c_0 = \Lambda$ ,  $2c_1 = N - \Xi$ ,  $c_2 = \Xi - \Lambda$ ,  $2c_3 = N + \Xi - \Sigma - \Lambda$ . Для всех высших представлений алгебры  $\tilde{U}(8)$  таких точных соотношений между массами элементарных частиц и постоянными  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  нельзя установить, и поэтому формула (11) будет давать некоторые массовые соотношения между массами элементарных частиц, которые входят в данное представление  $\tilde{U}(8)$ .

Любопытно отметить, что если в (11) положить  $c_2 = 2c$ ,  $2c_3 = -c$ , то формула (11) приводит к известному массовому соотношению Гелл–Манна<sup>5</sup>.

Чтобы получить зависимость массового оператора от  $I_3$ , необходимо учесть разницу между массами частиц, которые входят в один изотопический мультиплет. Пространство  $H$  в этом случае является прямой суммой восьми пространств  $H_i$ , и поэтому алгебра  $G_l$ , неприводимое представление которой реализуется в  $H$  является 256-мерной алгеброй Ли. Генераторы алгебры  $G_l \equiv \tilde{U}(16)$  в фундаментальном представлении имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha\beta} &= \Gamma^\alpha \otimes \sigma_\beta, & \Gamma_\mu^{\alpha\beta} &= \Gamma_\mu^\alpha \otimes \sigma_\beta, & \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \otimes \sigma_\beta, \\ \Gamma_{\mu 5}^{\alpha\beta} &= \Gamma_{\mu 5}^\alpha \otimes \sigma_\beta, & \Gamma_5^{\alpha\beta} &= \Gamma_5^\alpha \otimes \sigma_\beta, \end{aligned} \quad (12)$$

Оператор  $P_0$ , аналогичным способом, как и в рамках алгебры  $\tilde{U}(8)$ , можно представить так:

$$P_0 = c'_0 \Gamma^{00} + c'_1 Y + c'_2 I_3 + c'_3 I + c'_4 Y^2 + c'_5 I_3^2 + c'_6 Y I_3 + c'_7 I^+ I^-, \quad (13)$$

<sup>5</sup>Заметим, что при этом формула (11) будет отличаться от формулы Окубо (нет члена  $I^2$ ).

где  $c'_0, c'_1, \dots, c'_7$  — произвольные постоянные, а  $\Gamma^{00}$  — единичная матрица,

$$Y = \frac{1}{2}\Gamma^3 \otimes (\sigma_0 + \sigma_3), \quad Y^2 = \frac{1}{2}\Gamma^0 \otimes (\sigma_0 + \sigma_3),$$

$$I_3 = \frac{1}{4} \{ (\Gamma^3 + \Gamma_0^3) \otimes (\sigma_0 - \sigma_3) + \Gamma_0^0 \otimes (\sigma_0 + \sigma_3) \},$$

$$I_3^2 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2}\Gamma^0 \otimes (3\sigma_0 - \sigma_3) + \Gamma_0^0 \otimes (\sigma_0 - \sigma_3) \right\},$$

$$I = \frac{1}{8} \{ \Gamma^0 \otimes (5\sigma_0 - \sigma_3) + (\Gamma^3 + \Gamma_0^0 - \Gamma_0^3) \otimes (\sigma_0 - \sigma_3) \},$$

$$YI_3 = \frac{1}{4}\Gamma_0^0 \otimes (\sigma_0 + \sigma_3),$$

$$I^+I^- = \frac{1}{8} \{ \Gamma^0 \otimes (5\sigma_0 - \sigma_3) - (\Gamma^3 + \Gamma_0^3) \otimes (\sigma_0 - \sigma_3) - \Gamma_0^0 \otimes (\sigma_0 + \sigma_3) \}.$$

Физический смысл операторов  $I^+$  и  $I^-$  состоит в том, что они переводят частицу (вектор состояния) одного изомультиплета в частицу (вектор состояния), которая принадлежит тому же самому изомультиплету.

Если предположить, что все адроны являются связанными состояниями трех кварков (со спином  $1/2$ ), то алгебра  $G_l = \tilde{U}(6) \supset P_l$  и оператор массы имеет следующий вид:

$$P_0 = c''_0 + c''_1 Y + c''_2 I_3, \quad (14)$$

где  $c''_0 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3}$ ,  $c''_1 = \frac{m_1 + m_2 - 2m_3}{2}$ ,  $c''_3 = m_1 - m_2$ , а  $m_1, m_2, m_3$  — массы кварков.

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы: во-первых, по заданному спектру масс элементарных или гипотетических частиц всегда можно построить такую нетривиальную алгебру  $G \supset P$ , что оператор  $M^2$  определенный в пространстве, где задано одно из неприводимых представлений  $G$ , будет самосопряженный, а его спектр совпадает с заданным спектром масс частиц; во-вторых, методом вложения алгебры  $P_l$  в  $G_l$  можно получать массовые формулы (операторы), не пользуясь при этом ни гипотезами о существовании высших симметрий ( $SU(3)$ ,  $SU(6)$ ) и полусильных взаимодействий, ни методом теории возмущений; в-третьих, массовые формулы могут зависеть от спина и четности только в том случае, если фундаментальные частицы из которых “состоят” адроны или бозоны, имеют разные спины и четности; в-четвертых, чтобы в физическую теорию операторы массы и спина входили на равных правах с операторами энергии импульса и спина, необходимо в основу теории положить не алгебру Пуанкаре, а ее обертывающую алгебру.

Поскольку приведенные результаты, в основном носят модельный характер и формулы 11), (13), (14) получены только в нерелятивистском случае, то никаких сопоставлений с экспериментом мы не приводим.

**Примечание при корректуре.** После того, как работа была сдана в печать, нами была конструктивно построена бесконечномерная алгебра  $G$ , содержащая алгебру Пуанкаре. Операторы  $D$ , переводящие частицу (вектор состояния) с массой  $m_j$  в частицу (вектор состояния) с массой  $m_i$  ( $i, j = 1, 2, 3, \dots$ ) строятся из

операторов  $d_{ij}$ , которые имеют вид

$$d_{ij} = \int d\bar{p} d\bar{q} F_1(\bar{p}) F_2(\bar{q}) \Psi_i^*(\bar{p}) \Psi_j(\bar{q}),$$

где  $\Psi_i^*(\bar{p})$ ,  $\Psi_j(\bar{q})$  — операторы рождения и поглощения фермиона с массами  $m_i$  и  $m_j$  соответственно.

Пространство  $H_i$  состоит из векторов

$$h_i = \int d\bar{p} F(\bar{p}) \Psi_i^*(\bar{p}) |0\rangle.$$

Массовые формулы, полученные в рамках этой алгебры, совпадают (формально) с формулами (11), (13), (14).

1. Fulton T., Wess J., *Ann. Phys.*, 1966, **37**, 271;  
Kadishevsky V.G., Muradian R.M., Tavheligidze A.N., Todorov J.T., *Phys. Lett.*, 1965, **15**, 182.
2. O'Raifeartaigh L., *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **14**, 575;  
Jost R., *Helv. Phys. Acta*, 1966.
3. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149;  
Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196;  
Санников С.С., *Ядерная физика*, 1966, **4**, 587.
4. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я., *Обобщенные функции*, т. 4, 1959.
5. Фушич В.И., *Письма в ЖЭТФ*, 1965, **2**, 157.
6. Salam A., Delbourgo R., Strathdee J., *Proc. Roy. Soc. A*, 1965, **284**, 146.

# Об операторах взаимодействия

В.И. ФУЩИЧ

The problem on finding interaction operators in the field quantum theory is formulated and solved (in some particular cases). It is shown that in the most general sense this problem is reduced to finding isometric operators satisfying the conditions (22).

В теории, основывающейся на уравнении движения

$$H\Psi = i\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \quad (1)$$

как правило, предполагается, что полный гамильтониан системы можно представить в виде [1]

$$H = H^0 + H'. \quad (2)$$

Хотя такое предположение кажется естественным, на самом же деле это очень существенное ограничение на теорию, и возможно является причиной возникновения расходимостей в ней.

Более точно это предположение означает, что все динамические операторы системы имеют вид

$$P_\alpha = P_\alpha^0 + P'_\alpha, \quad M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}^0 + M'_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где  $P_\alpha$  — полный оператор энергии-импульса системы,  $M_{\mu\nu}$  — полный тензор момента, а  $P_\alpha^0$ ,  $M_{\mu\nu}^0$  — операторы (свободные) невзаимодействующей системы. Операторы со штрихами будем называть операторами взаимодействия.

Исходя из требований релятивистской инвариантной теории, на операторы  $P_\alpha$ ,  $M_{\mu\nu}$  следует наложить условие, что они являются генераторами алгебры Пуанкаре  $P$  [2], т.е.

$$\begin{aligned} [P_\alpha, P_\beta]_- &= 0, & [M_{\mu\nu}, P_\alpha]_- &= i(g_{\nu\alpha}P_\mu - g_{\mu\alpha}P_\nu), \\ [M_{\mu\nu}, M_{\gamma\sigma}]_- &= i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\gamma} - g_{\mu\gamma}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\gamma}M_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\gamma}). \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, что и свободные операторы должны также быть генераторами алгебры Пуанкаре  $P^0$ , т.е.

$$\begin{aligned} [P_\alpha^0, P_\beta^0]_- &= 0, & [M_{\mu\nu}^0, P_\alpha^0]_- &= i(g_{\nu\alpha}P_\mu^0 - g_{\mu\alpha}P_\nu^0), \\ [M_{\mu\nu}^0, M_{\gamma\sigma}^0]_- &= i(g_{\mu\sigma}M_{\nu\gamma}^0 - g_{\mu\gamma}M_{\nu\sigma}^0 + g_{\nu\gamma}M_{\mu\sigma}^0 - g_{\nu\sigma}M_{\mu\gamma}^0). \end{aligned} \quad (4')$$

В релятивистской квантовой механике свободные операторы  $P_\alpha^0 = (P_0^0, \vec{P}^0)$ ,  $M_{\mu\nu}^0 = (\vec{K}^0, \vec{J}^0)$  системы, состоящей из одной частицы, имеют вид [3]

$$\begin{aligned} P_0^0 &= \omega = (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2}, & \vec{p} &= -i\vec{\nabla}, & \vec{P}^0 &= \vec{p}, \\ \vec{J}^0 &= \vec{r} \times \vec{p} + \vec{s}, & \vec{K}^0 &= \frac{1}{2}(\vec{r}\omega + \omega\vec{r}) - (\vec{s} \times \vec{p})(m + \omega)^{-1} - t\vec{p}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\vec{s}$  — спиновый оператор.

В квантовой теории поля эти операторы определяются через канонический тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  следующим образом:

$$P_\alpha^0 = \int d^3x T_{\alpha 0}, \quad M_{\mu\nu}^0 = \int d^3x (x_\mu T_{\nu 0} - x_\nu T_{\mu 0}). \quad (5')$$

Несмотря на то, что операторы (5) и (5') имеют различную структуру, в алгебраическом смысле это эквивалентные операторы, так как они реализуют одно и то же неприводимое представление алгебры  $P^0$ . Поэтому и физические теории, построенные на операторах (5) и (5'), эквивалентны, хотя пространства, в которых действуют эти операторы, различны. Это утверждение справедливо и для полных операторов, если динамические операторы системы в квантовой механике и квантовой теории поля реализуют одно и то же представление алгебры  $P$ . И вообще, две теории следует считать физически эквивалентными, если средние значения коммутирующих операторов полного набора в обеих теориях совпадают. Ясно, что такое определение эквивалентности двух описаний более общее, чем обычно принятое [3], которое по существу является следствием из постулата о равноправности различных систем отсчета.

В работе [4], а затем в [5] впервые рассматривалась задача о нахождении наиболее общих выражений для операторов взаимодействий в релятивистской квантовой механике. В настоящей работе формулируется и решается (в некоторых частных случаях) такая же задача в релятивистской квантовой теории поля.

Прежде чем перейти к решению этой задачи, необходимо придать четкий математический смысл равенствам (3). Обозначим через  $H$  гильбертово пространство, в котором задано представление алгебры  $P$ , а через  $H^0$  — подпространство в  $H$ , в котором реализуется представление алгебры  $P^0$ . Формулам (3) можно придать четкий смысл в следующих случаях:

1. Представления алгебр  $P$  и  $P^0$  заданы во всем пространстве  $H$  ( $H = H^0$ ) или на плотных (неплотных) множествах  $\tilde{D}(P) = \tilde{D}(P^0) \subset H$ .
2. Представление алгебры  $P$  задано в  $H \supset H^0$ , а представление  $P^0$  — в инвариантном подпространстве  $H^0$ .
3. Представление  $P$  задано только на плотном (или неплотном) множестве  $\tilde{D}(P) \supset \tilde{D}(P^0)$  в  $H$ .

**1.** Рассмотрим первый случай.

а) Так как алгебры  $P$  и  $P^0$  изоморфны, то равенства (3) можно рассматривать как связь между базисами в 10-мерном векторном пространстве, поэтому

$$P_\alpha = a_\alpha^\beta P_\beta^0 + b_\alpha^{\beta\gamma} M_{\beta\gamma}^0, \quad M_{\mu\nu} = c_{\mu\nu}^\gamma P_\gamma^0 + d_{\mu\nu}^{\gamma\sigma} M_{\gamma\sigma}^0. \quad (6)$$

Поскольку операторы  $P_\alpha$ ,  $M_{\mu\nu}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям (4), то постоянные коэффициенты в (6) должны быть такими, чтобы удовлетворялись следующие равенства:

$$\begin{aligned} \{a_\nu^\lambda (b_\mu^{\gamma\sigma} - b_\mu^{\sigma\gamma}) + a_\mu^\lambda (b_\nu^{\sigma\gamma} - b_\nu^{\gamma\sigma})\} g_{\sigma\lambda} &= 0, \\ (b_\mu^{\gamma\sigma} - b_\mu^{\sigma\gamma}) (b_\nu^{\beta\rho} - b_\nu^{\rho\beta}) g_{\gamma\rho} &= 0, \\ \{a_{\mu\nu}^\beta (b_\alpha^{\gamma\rho} - b_\alpha^{\rho\gamma}) + a_\alpha^\beta (d_{\mu\nu}^{\rho\gamma} - d_{\mu\nu}^{\gamma\rho})\} g_{\rho\beta} &= g_{\mu\alpha} a_\nu^\gamma - g_{\nu\alpha} a_\mu^\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (b_{\alpha}^{\gamma\rho} - b_{\alpha}^{\rho\gamma}) (d_{\mu\nu}^{\beta\sigma} - d_{\mu\nu}^{\sigma\beta}) g_{\gamma\sigma} = g_{\mu\alpha} b_{\nu}^{\rho\beta} - g_{\nu\alpha} b_{\mu}^{\rho\beta}, \\
& \left\{ c_{\mu\nu}^{\rho} \left( d_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} - d_{\alpha\beta}^{\sigma\gamma} \right) + c_{\alpha\beta}^{\rho} \left( d_{\mu\nu}^{\sigma\gamma} - d_{\mu\nu}^{\gamma\sigma} \right) \right\} g_{\sigma\rho} = g_{\alpha\nu} c_{\beta\mu}^{\gamma} - g_{\alpha\mu} c_{\beta\nu}^{\gamma} + g_{\beta\mu} c_{\alpha\nu}^{\gamma} - g_{\beta\nu} c_{\alpha\mu}^{\gamma}, \\
& \left( d_{\alpha\beta}^{\gamma\sigma} - d_{\alpha\beta}^{\sigma\gamma} \right) \left( d_{\mu\nu}^{\rho\lambda} - d_{\mu\nu}^{\lambda\rho} \right) = g_{\alpha\nu} d_{\beta\mu}^{\sigma\rho} - g_{\alpha\mu} d_{\beta\nu}^{\sigma\rho} + g_{\beta\mu} d_{\alpha\nu}^{\sigma\rho} - g_{\beta\nu} d_{\alpha\mu}^{\sigma\rho}, \\
& c_{\mu\nu}^{\gamma} = -c_{\nu\mu}^{\gamma}, \quad d_{\mu\nu}^{\gamma\sigma} = -d_{\nu\mu}^{\gamma\sigma}.
\end{aligned}$$

Из (6) получаем явные выражения для операторов взаимодействия через свободные операторы

$$P'_{\alpha} = b_{\alpha}^{\gamma\sigma} M_{\gamma\sigma}^0 + \sum_{\beta=0, \beta \neq \alpha} a_{\alpha}^{\beta} P_{\beta}^0, \quad (7)$$

$$M'_{\mu\nu} = c_{\mu\nu}^{\gamma} P_{\gamma}^0 + \sum_{\substack{\gamma, \sigma=0, \\ \gamma \neq \mu, \sigma \neq \nu}} d_{\mu\nu}^{\gamma\sigma} M_{\gamma\sigma}^0. \quad (7')$$

Формулы (6) можно рассматривать как линейные однородные канонические соотношения между операторами  $P_{\alpha}$ ,  $M_{\mu\nu}$  и  $P_{\alpha}^0$ ,  $M_{\mu\nu}^0$ . Очевидно, что формулы (7) определяют наиболее общий вид операторов взаимодействия, если ограничиться только линейными каноническими преобразованиями. В общем случае нелинейных неоднородных преобразований операторы являются некоторыми функциями от свободных операторов:

$$P'_{\alpha} = F_{\alpha}(P_{\gamma}^0, M_{\mu\nu}^0), \quad \gamma \neq \alpha, \quad (8)$$

$$M'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(P_{\beta}^0, M_{\lambda\sigma}^0), \quad \lambda \neq \mu, \quad \sigma \neq \nu. \quad (8')$$

Из условия релятивистской инвариантности (4) следует, что функции  $F_{\alpha}$ ,  $F_{\mu\nu}$  должны быть такими, чтобы операторы взаимодействия удовлетворяли таким коммутационным соотношениям:

$$[P'_{\alpha}, P'_{\beta}]_{-} = [P_{\beta}^0, P'_{\alpha}]_{-} + [P_{\alpha}^0, P'_{\beta}]_{-}, \quad (9)$$

$$[M'_{\mu\nu}, P'_{\alpha}]_{-} = i(g_{\nu\alpha} P'_{\mu} - g_{\mu\alpha} P'_{\nu}) + [P_{\alpha}^0, M'_{\mu\nu}]_{-} - [M_{\mu\nu}^0, P'_{\alpha}]_{-}, \quad (9')$$

$$\begin{aligned}
[M'_{\mu\nu}, M'_{\lambda\sigma}]_{-} &= i \left( g_{\mu\sigma} M'_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\lambda} M'_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma} M'_{\mu\lambda} \right) + \\
&+ [M_{\lambda\sigma}^0, M'_{\mu\nu}]_{-} - [M_{\mu\nu}^0, M'_{\lambda\sigma}]_{-}.
\end{aligned} \quad (9'')$$

Таким образом, задача о нахождении операторов взаимодействия в этом случае сводится к описанию всех канонических преобразований операторов  $P_{\alpha}$ ,  $M_{\mu\nu}$  и  $P_{\alpha}^0$ ,  $M_{\mu\nu}^0$ . Следует отметить, что даже если бы были описаны все такие преобразования, то мы не смогли бы найти все возможные операторы взаимодействия, так как операторы  $P'_{\alpha}$ ,  $M'_{\mu\nu}$  могут, вообще говоря, удовлетворять условиям (9), но не быть функциями  $P_{\alpha}^0$ ,  $M_{\mu\nu}^0$ . В этом последнем случае наша задача сводится к решению операторных уравнений (9) при заданных операторах  $P_{\alpha}^0$ ,  $M_{\mu\nu}^0$ . Далее укажем на один класс решений этой задачи.

б) В квантовой теории поля динамические операторы обычно строятся из операторов рождения и уничтожения. Для простоты, рассмотрим только взаимодействие между нейтральными мезонами.

Рассмотрим такую систему операторов:

$$P_\alpha = P_\alpha^0 + P'_\alpha, \quad M_{ij} = M_{ij}^0 + M'_{ij}, \quad M_{0i} = M_{0i}^0 + M'_{0i}, \quad (10)$$

где

$$P_\alpha^0 = \int d^3k k_\alpha a^*(\vec{k})a(\vec{k}), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad (11)$$

$$M_{ij}^0 = \frac{i}{2} \int d^3k \left\{ k_i m_j^0(\vec{k}) - k_j m_i^0(\vec{k}) \right\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (11')$$

$$M_{0i}^0 = -M_{i0}^0 = -\frac{i}{2} \int d^3k k_0 m_i^0(\vec{k}), \quad (11'')$$

$$m_i^0(\vec{k}) = \frac{\partial a^*(\vec{k})}{\partial k_i} a(\vec{k}) - a^*(\vec{k}) \frac{\partial a(\vec{k})}{\partial k_i}, \quad k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2},$$

$$P'_\alpha = \int d^3k k_\alpha \left\{ a^*(\vec{k})v(\vec{k}) + v^*(\vec{k})a(\vec{k}) \right\} + f_\alpha, \quad (12)$$

$$M'_{ij} = i \int d^3k \left\{ k_i m'_j(\vec{k}) - k_j m'_i(\vec{k}) \right\} + f_{ij}, \quad (12')$$

$$M'_{0i} = -M'_{i0} = i \int d^3k k_0 m'_i(\vec{k}) + f_{0i}, \quad (12'')$$

$$m'_k(\vec{k}) = \frac{\partial a^*(\vec{k})}{\partial k_i} v(\vec{k}) - a^*(\vec{k}) \frac{\partial v^*(\vec{k})}{\partial k_i} + \frac{\partial v(\vec{k})}{\partial k_i} a(\vec{k}) - v^*(\vec{k}) \frac{\partial a(\vec{k})}{\partial k_i},$$

$v(\vec{k})$  — функция,  $a^*(\vec{k})$ ,  $a(\vec{k})$  — операторы рождения и уничтожения мезонов, удовлетворяющие обычным коммутационным соотношениям

$$\left[ a(\vec{k}), a^*(\vec{k}') \right]_- = \delta(\vec{k} - \vec{k}'),$$

$$f_\alpha = \int d^3k k_\alpha |v(\vec{k})|^2,$$

$$f_{ij} = \frac{i}{2} \int d^3k \left\{ k_i \left( \frac{\partial v^*(\vec{k})}{\partial k_j} v(\vec{k}) - v^*(\vec{k}) \frac{\partial v(\vec{k})}{\partial k_j} \right) - k_j \left( \frac{\partial v^*(\vec{k})}{\partial k_i} v(\vec{k}) - v^*(\vec{k}) \frac{\partial v(\vec{k})}{\partial k_i} \right) \right\},$$

$$f_{0i} = -\frac{i}{2} \int d^3k k_0 \left( \frac{\partial v^*(\vec{k})}{\partial k_i} v(\vec{k}) - v^*(\vec{k}) \frac{\partial v(\vec{k})}{\partial k_i} \right).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система операторов (10) удовлетворяет условиям (4) и (4'), а проще всего в этом убедиться, если сделать такое каноническое преобразование [6]:

$$c(\vec{k}) = a(\vec{k}) + v(\vec{k}), \quad c^*(\vec{k}) = a^*(\vec{k}) + v^*(\vec{k}). \quad (13)$$

В новых операторах  $c^*(\vec{k})$  и  $c(\vec{k})$  полные динамические операторы (10) имеют вид<sup>1</sup>

$$P_\alpha = P_\alpha^0(a^* \rightarrow c^*, a \rightarrow c), \quad (14)$$

$$M_{ij} = M_{ij}^0(a^* \rightarrow c^*, a \rightarrow c), \quad (14')$$

$$M_{0i} = M_{0i}^0(a^* \rightarrow c^*, a \rightarrow c). \quad (14'')$$

Этот пример показывает, что всякая система операторов (10), которая может быть приведена при помощи канонических преобразований операторов рождения и уничтожения к диагональному виду (относительно операторов  $c^*(\vec{k})$ ,  $c(\vec{k})$ ), удовлетворяет коммутационным соотношениям (4).

Следует отметить, что система операторов (10) является нетривиальным решением уравнений (4), однако физическая теория, построенная на основе этих операторов, по существу, эквивалентна свободной теории поля, если преобразования (13) являются собственными каноническими преобразованиями.

В работе [7] приведены также частные решения уравнений (9), отличные от наших. Выражения для генераторов алгебры  $P$  приведены в виде бесконечных рядов операторов  $a^*(k)$  и  $a(k)$ . Вопрос о сходимости этих рядов не обсуждается.

**2.** Так как во втором случае  $H \supset H^0$ , то (3) следует записать в таком виде:

$$\begin{aligned} P_\alpha &= P_\alpha E^0 + P_\alpha E' \equiv P_\alpha^0 + P'_\alpha, \\ M_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu} E^0 + M_{\mu\nu} E' \equiv M_{\mu\nu}^0 + M'_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $E^0$  — оператор проектирования на подпространство  $H^0$ ,  $E'$  — оператор проектирования на  $H \ominus H^0$ . Из формулы (15) следует, что операторы  $P_\alpha^0$ ,  $M_{\mu\nu}^0$  являются частями операторов  $P_\alpha$ ,  $M_{\mu\nu}$ , лежащими в  $H^0$ . В этом случае соотношения (9) имеют вид

$$\begin{aligned} [P'_\alpha, P'_\beta]_- &= P_\beta^0 P'_\alpha - P_\alpha^0 P'_\beta, \\ [M'_{\mu\nu}, P'_\alpha]_- &= i(g_{\nu\alpha} P'_\mu - g_{\mu\alpha} P'_\nu) + P_\alpha^0 M'_{\mu\nu} - M_{\mu\nu}^0 P'_\alpha, \\ [M'_{\mu\nu}, M'_{\lambda\sigma}]_- &= i(g_{\mu\sigma} M'_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\lambda} M'_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma} M'_{\mu\lambda}) + \\ &+ M_{\lambda\sigma}^0 M'_{\mu\nu} - M_{\mu\nu}^0 M'_{\lambda\sigma}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) видно, что операторы взаимодействия образуют обобщенную (или квантованную) алгебру Ли в том смысле, что некоторые структурные константы этой алгебры не числа, а операторы, которые, в свою очередь, являются генераторами алгебры Пуанкаре  $P^0$ . В общем случае задача о нахождении операторов взаимодействия сводится к построению представлений такой обобщенной алгебры. Такую задачу, по-видимому, невозможно решить известными в настоящее время методами. Однако в предположении, что

$$\begin{aligned} P_\beta^0 P'_\alpha - P_\alpha^0 P'_\beta &= 0, \\ P_\alpha^0 M'_{\mu\nu} - M_{\mu\nu}^0 P'_\alpha &= 0, \\ M_{\lambda\sigma}^0 M'_{\mu\nu} - M_{\mu\nu}^0 M'_{\lambda\sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

<sup>1</sup>Стрелки в формулах (14) означают соответствующую замену в формулах (11) для операторов  $P_\alpha^0$ ,  $M_{\mu\nu}^0$ .

система уравнений (16) может быть решена, поскольку в этом случае операторы взаимодействия образуют алгебру Пуанкаре  $P'$ , а все представления такой алгебры найдены [8].

Далее покажем, что если подпространство  $H'$  инвариантно также и относительно сопряженных операторов  $P^*$ , то условия (17) выполняются тождественно, т.е.

$$P_\beta^0 P_\alpha' = P_\alpha^0 M'_{\mu\nu} = M'_{\mu\nu} M'_{\lambda\sigma} = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим такое скалярное произведение:

$$(P'E'h, E^0h) = (P'h', E^0h),$$

где  $h' \in H \ominus H^0$ ,  $E^0h \in H^0$ . При вышеуказанных предположениях справедливо такое равенство:

$$(P'h', E^0h) = (Ph', E^0h) = (h', P^*E^0h) = 0, \quad (19)$$

из которого следует, что  $P'h' \in H' = H \ominus H^0$ , т.е. относительно операторов взаимодействия пространство  $H'$ , инвариантно, а это и означает, что условия (18) удовлетворяются.

Нетрудно убедиться, что такое же утверждение справедливо и тогда, когда операторы  $P$  заданы не во всем  $H$ , а только на плотном множестве  $\tilde{D}(P)$  в  $H$  при

$$E^0\tilde{D}(P) \in \tilde{D}(P). \quad (20)$$

**3.** Теперь рассмотрим случай, когда  $\tilde{D}(P)$  плотно в  $H$ , но условие (20) не выполняется. Обозначим через  $D^0(P)$  и  $D'(P)$  такие множества

$$D^0(P) = E^0\tilde{D}(P) \cap \tilde{D}(P), \quad D'(P) = E'\tilde{D}(P) \cap \tilde{D}(P).$$

По формулам (15) алгебра  $P$  однозначно определяется через операторы  $P^0$  и  $P'$  только на тех элементах  $h \in H$ , которые принадлежат области  $D = D^0(P) \oplus D'(P)$ . На самом же деле операторы  $P_\alpha$ ,  $M_{\mu\nu}$  определены в более широкой области  $\tilde{D}(P)$ , поэтому возникает задача о расширении операторов  $P$ , которые определены на множестве  $D$  формулами (15), на множество  $\tilde{D}(P)$ . При этом расширения должны быть такими, чтобы расширенные операторы образовывали алгебру Пуанкаре.

Далее мы остановимся на более узкой задаче, а именно, о расширении операторов  $P$  при условии, что они симметричны и область  $D \subset \tilde{D}(P)$  плотна в  $H$ .

Используя теорию симметрических расширений [9], можно найти все симметрические расширения операторов  $P_\alpha$ ,  $M_{\mu\nu}$ , которые определены на множестве  $D$  формулами (15). Эти расширения определяются формулами

$$\tilde{P}_\alpha f_\alpha = P_\alpha^0 f_\alpha + P'_\alpha f'_\alpha + z_\alpha \varphi_\alpha + \bar{z}_\alpha V_\alpha \varphi_\alpha, \quad (21)$$

$$\tilde{M}_{\mu\nu} f_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}^0 f_{\mu\nu}^0 + M'_{\mu\nu} f'_{\mu\nu} + z_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu} + \bar{z}_{\mu\nu} V_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu},$$

где

$$f_\alpha^0, f_{\mu\nu}^0 \in D^0(P), \quad f'_\alpha, f'_{\mu\nu} \in D'(P),$$

$$f_\alpha = f_\alpha^0 + f'_\alpha + \varphi_\alpha + V_\alpha \varphi_\alpha,$$

$$f_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}^0 + f'_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu} + V_{\mu\nu} \Phi_{\mu\nu},$$

$V_\alpha, V_{\mu\nu}$  — изометрические операторы,  $z_\alpha, z_{\mu\nu}$  — не вещественные числа,  $\varphi_\alpha, \Phi_{\mu\nu}$  — вектора в  $H$ , принадлежащие дефектным пространствам операторов  $P_\alpha, M_{\mu\nu}$ .

Из всех возможных расширений операторов  $P_\alpha$  и  $M_{\mu\nu}$ , задаваемых формулами (21), следует отобрать только такие, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям (4). Это ограничение на  $\tilde{P}_\alpha$  и  $\tilde{M}_{\mu\nu}$  приводит к тому, что изометрические операторы  $V_\alpha, V_{\mu\nu}$  должны удовлетворять следующим условиям:

$$\left[ (\tilde{z}_\alpha V_\alpha - z_\alpha E) (V_\alpha - E)^{-1}, (\tilde{z}_\beta V_\beta - z_\beta E) (V_\beta - E)^{-1} \right]_- = 0, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \left[ (\tilde{z}_{\mu\nu} V_{\mu\nu} - z_{\mu\nu} E) (V_{\mu\nu} - E)^{-1}, (\tilde{z}_\alpha V_\alpha - z_\alpha E) (V_\alpha - E)^{-1} \right]_- = \\ & = i \left\{ g_{\nu\alpha} (\tilde{z}_\mu V_\mu - z_\mu E) (V_\mu - E)^{-1} - g_{\mu\alpha} (\tilde{z}_\nu V_\nu - z_\nu E) (V_\nu - E)^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (22')$$

$$\begin{aligned} & \left[ (\tilde{z}_{\mu\nu} V_{\mu\nu} - z_{\mu\nu} E) (V_{\mu\nu} - E)^{-1}, (\tilde{z}_{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} - z_{\alpha\beta} E) (V_{\alpha\beta} - E)^{-1} \right]_- = \\ & = i \left\{ g_{\mu\beta} (\tilde{z}_{\nu\alpha} V_{\nu\alpha} - z_{\nu\alpha} E) (V_{\nu\alpha} - E)^{-1} - g_{\mu\alpha} (\tilde{z}_{\nu\beta} V_{\nu\beta} - z_{\nu\beta} E) \times \right. \\ & \times (V_{\nu\beta} - E)^{-1} + g_{\nu\alpha} (\tilde{z}_{\mu\beta} V_{\mu\beta} - z_{\mu\beta} E) (V_{\mu\beta} - E)^{-1} + \\ & \left. + g_{\nu\beta} (\tilde{z}_{\mu\alpha} V_{\mu\alpha} - z_{\mu\alpha} E) (V_{\mu\alpha} - E)^{-1} \right\}, \end{aligned} \quad (22'')$$

где  $E$  — единичный оператор, а по повторяющимся греческим индексам суммирование не проводится.

Таким образом, задача о нахождении операторов взаимодействия сводится к нахождению изометрических операторов  $V_\alpha, V_{\mu\nu}$ , удовлетворяющих уравнениям (22).

Аналогичным способом можно рассмотреть и тот случай, когда операторы  $P_\alpha, M_{\mu\nu}$  заданы на неплотном множестве  $D$  формулами (15), но при этом необходимо предполагать, что они замкнуты [10].

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, М.—Л., 1957.
2. Digas P.A.M., *Rev. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 392.
3. Вигнер Е., Теория групп, М., ИЛ, 1961.
4. Wakamjian B., Thomas L.H., *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 1300.
5. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1961, **112**, 275.
6. Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В., Новый метод в теории сверхпроводимости, М., 1958;  
Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., ИЛ, 1963.
7. Kita H., *Prog. Theor. Phys.*, 1966, **35**, 934.
8. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149;  
Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196;  
Санников С.С., *Ядерная физика*, 1966, **4**, 587.
9. Ахизер Н.И., Глазмай И.М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.—Л., 1966.
10. Красносельский М.А., *ДАН СССР*, 1948, **9**, № 1.

# A relativistically invariant mass operator

W.I. FUSHCHYCH

In [1] it was shown how, for a given (discrete) mass spectrum of elementary or hypothetical particles, it was possible to construct a non-trivial algebra  $G$  containing a Poincaré algebra  $P$  as a subalgebra so that the mass operator, defined throughout the space where one of the irreducible representations  $G$  is given, is self-conjugate and its spectrum coincides with the given mass spectrum. Such an algebra was constructed in explicit form for the nonrelativistic case, i.e., the generators were written for the algebra. However, the problem of how to assign the algebra  $G$  constructively and determine an explicit form of the mass operator in the relativistic case has remained unsolved.

In the present work we present a solution of this problem, construct continuum analogs of the classical algebras  $U(N)$  and  $Sp(2N)$ , and show that the problem of including the Poincaré algebra can be formulated in the “language” of wave function equations.

**1.** For simplicity, we will assume that there be given only three particles with masses  $m_1$ ,  $m_2$  and  $m_3$ .  $R_1$ ,  $R_2$  and  $R_3$  will represent the spaces in which irreducible representations of the algebra  $P$  are realized. The operator  $\left(P_\alpha^{(i)}\right)^2$  in these spaces is, as is well known, a multiple of the unit operator:

$$\left(P_\alpha^{(i)}\right)^2 R_i = m_i^2 R_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (1)$$

We will designate by  $R$  the linear sum of these spaces<sup>1</sup>. The operators of energy-momentum, angular momentum, and square of the masses of the system, which may be in various excited states in this space, take the form

$$P_\alpha = P_\alpha^{(1)} F_{11} + P_\alpha^{(2)} F_{22} + P_\alpha^{(3)} F_{33}, \quad (2)$$

$$M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}^{(1)} F_{11} + M_{\mu\nu}^{(2)} F_{22} + M_{\mu\nu}^{(3)} F_{33},$$

$$M^2 = \left(P_\alpha^{(1)}\right)^2 F_{11} + \left(P_\alpha^{(2)}\right)^2 F_{22} + \left(P_\alpha^{(3)}\right)^2 F_{33}, \quad (3)$$

where the  $F_{ij}$  designate the squared three-rowed matrices in which unit operators stand at the intersection of the  $i$ -th row and  $j$ -th column, while all other elements are zero.

It is clear that in  $R$  there are realized reducible representations of the algebra  $P$ . However, relative to certain sets of the operator  $G$  this space may not have invariant subspaces. Obviously, operators must appear in this set of the type

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

---

Ukrainian Physics Journal, 1968, **13**, № 3, P. 256–262.

<sup>1</sup>In the case of a real physical problem, we should have taken the linear sum with certain weights, the squares of the moduli of which could be interpreted as the probability of finding the system in one or another of the states.

where at least one of the operators  $d_{ij}$  ( $i \neq j$ ) is nonzero. In order to solve our problem, these operators must be constructed in explicit form.

For the determination of the explicit form of the operators use will be made of the methods of the quantum theory of fields. The vector  $h_i \in R_i$  will be presented in the form [2]

$$h_i = \int d\mathbf{k} F_i(\mathbf{k}) a_i^+(\mathbf{k}) |0\rangle. \quad (5)$$

For simplicity of notation, we shall assume that the distribution function  $F_1(\mathbf{k}) = F_2(\mathbf{k}) = F_3(\mathbf{k}) = F(\mathbf{k})$  and all particles are without spin. The generators of the Poincaré algebra, expressed by the operators of creation and annihilation, have the form [3]

$$\begin{aligned} P_j^{(i)} &= \int d\mathbf{k} k_j a_i^+(\mathbf{k}) a_i(\mathbf{k}), \\ P_0^{(i)} &= \int d\mathbf{k} k_0^{(i)} a_i^+(\mathbf{k}) a_i(\mathbf{k}), \quad k_0^{(i)} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_i^2}, \\ M_{lr}^{(i)} &= \frac{i}{2} \int d\mathbf{k} (k_l f_r^{(i)}(\mathbf{k}) - k_r f_l^{(i)}(\mathbf{k})), \quad M_{0l}^{(i)} = \frac{i}{2} \int d\mathbf{k} k_0^{(i)} f_l^{(i)}(\mathbf{k}), \\ f_l^{(i)}(\mathbf{k}) &= \frac{\partial a_i^+(\mathbf{k})}{\partial k_l} a_i(\mathbf{k}) - a_i^+(\mathbf{k}) \frac{\partial a_i(\mathbf{k})}{\partial k_l}. \end{aligned} \quad (6)$$

We can now write the explicit form of the operators

$$d_{ij} = \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' F(\mathbf{k}) F'(\mathbf{k}') \{ a_i^+(\mathbf{k}) a_j(\mathbf{k}') + a_j^+(\mathbf{k}') a_i(\mathbf{k}) \}. \quad (7)$$

Obviously, the operators  $D_{ij} = d_{ij} F_{ij}$  will transform vectors from space  $R_i$  to  $R_j$ . Space  $R$  is irreducible with respect to operators  $P_\alpha$ ,  $M_{\mu\nu}$  and  $D_{ij}$ . This statement is a consequence of the fact that the operators  $D_{ij}$  transform a given vector from  $h \in R$ , to vector  $h_i \in R_i$ , while, since the subspace  $R_i \subset R$  is noninvariant relative to these operators then, by the same token, the irreducibility of the representation  $G$  in  $R$  is shown.

The set of operators (5) and (6) (and their linear combinations) form a Lie algebra in the case where they satisfy the Jacobi identities. Calculating, for example, the commutators  $[P_\alpha, D_{ij}]_-$ ,  $[P_\beta, [P_\alpha, D_{ij}]_-]_-$  etc., it is not difficult to convince oneself that the operators derived from these are not linear combinations of the operators  $P_\alpha$ ,  $M_{\mu\nu}$  and  $D_{ij}$ , i.e., the set  $G$  is an infinite-dimensional Lie algebra. All elements of the algebra  $G$  can be expressed explicitly by the operators  $a_i^+(\mathbf{k}) a_j(\mathbf{k}')$ ,  $a_j^+(\mathbf{k}') a_i(\mathbf{k})$ ,  $[\partial a_i^+(\mathbf{k}) / \partial k_l] a_j(\mathbf{k}')$ ,  $a_l^+(\mathbf{k}) [\partial a_r(\mathbf{k}') / \partial k'_l]$  and all possible products of these operators. As will be shown below, these operators form a continuous Lie algebra. In  $R$  space the operators of hypercharge and isospin have the form

$$Y = j_1 F_{11} + j_2 F_{22} + j_3 F_{33}, \quad J = i_1 F_{11} + i_2 F_{22} + i_3 F_{33}, \quad (8)$$

where  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $j_3$  and  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  are hypercharges and isospins of particles  $m_1$ ,  $m_2$  and  $m_3$ . The formulas (8) permit the expression of the operator  $M^2$  by the operator of hypercharge and isospin. In our case

$$M^2 = a'E + b'Y + c'J, \quad (9)$$

where  $E$  is the unit operator, and  $a', b', c'$  are arbitrary, generally speaking, constant quantities. In the triplet representations of the algebra  $G$ , which we considered, these quantities are uniquely determined by the masses  $m_1, m_2$  and  $m_3$ . In all other representations, such uniqueness does not exist and hence formula (9) will give a mass relationship between the elementary particles. If the initial particles have spin, then

$$M^2 = aS + bY + cJ, \quad (9')$$

where  $a, b, c$  are arbitrary numbers and  $S$  is the spin operator.

Other examples of infinite dimensional Lie algebras, containing the algebra  $P$ , are considered in [12].

**Note 1.** It is well known that the masses of elementary particles depend on spin, hypercharge, isospin, and other quantum numbers; hence, for determining the mass operator, one tends to express it by the operators of spin, hypercharge, and isospin. It should be noted that, generally speaking, the mass operator can always (in principle) be expressed by one operator. In fact, let

$$M^2 = f(A_1, A_2, \dots, A_n), \quad (9'')$$

where  $A_1, A_2, \dots, A_n$  are mutually commuting self-adjoint operators, operating in a certain separable Hilbert space. In agreement with Neiman's theorem [4] concerning creation operators, one can determine such a bounded self-adjoint operator  $A$  in this space that

$$A_n = \varphi_n(A).$$

From this theorem it follows that  $M^2 = f(A_1, A_2, \dots, A_n) = \tilde{f}(A)$ , i.e., the mass operator can always be represented as a function of only one operator  $A$  of a weakly closed ring. This attests to the fact that there exists one universal quantum number, with the help of which it is possible to explain the mass spectrum of elementary particles if the explicit form of the function  $\tilde{f}$  is known.

Since the mass operator in the approach arises from the same sort of generator of the algebra  $G$  as, say, does the operator of isospin or hypercharge, the formula (9'') may be viewed as an equation of a hypersurface in a space of mutually commuting operators. For such an interpretation of the mass formula (9''), the generation operator  $A$  apparently plays the same role as does time in classical mechanics (where the aggregate of all trajectories lies on a certain manifold, in particular on a surface  $F(x, y, z)$  for which  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ).

From the geometrical point of view the mass equations

$$M = a + bS(S + 1)$$

for hadrons and

$$M^2 = a^2 + b^2S(S + 1)$$

for mesons represent "trajectories" (a parabola for hadrons and hyperbola for mesons) of motion of the system, which can exist in various mass and spin states.

The mass equations of Okubo,

$$M = a + bY + c\{J(J + 1) - Y^2/4\}$$

for hadrons and

$$M^2 = a + bY + c\{J(J+1) - Y^2/4\}$$

for mesons, represent a hyperbolic paraboloid and double poled hyperboloid in an imaginary three-dimensional space  $(M, Y, J)$ .

In this manner, if we quantize the general equation for a hyperbolic paraboloid:

$$c/4y^2 - cz^2 - cz - by + x - a = 0,$$

i.e., if in this equation we make the substitutions  $x \rightarrow M$ ,  $y \rightarrow Y$ ,  $z \rightarrow J$ , then we will obtain the formula of Okubo for hadrons. If with each multiplet we associate a definite hypersurface, then various transitions of one multiplet to particles of the same multiplet can be interpreted as “motion” or the given hypersurface. Transitions of particles of one multiplet to particles of another multiplet may be considered as transitions from one hypersurface to another. If to all experimentally discovered hadrons (or bosons) is assigned a single hypersurface, then all possible transitions of hadrons (bosons) to hadrons (bosons) should be interpreted as “motion” on this hypersurface, for which all quantum characteristics of the system can change.

**2.** The characteristic special feature of problems concerning the spectrum of atomic hydrogen and of a harmonic and anharmonic oscillator, from the group theoretic standpoint, is that all these problems can be solved by the method of embedding of the finite dimensional Lie algebra, appropriate to groups of hidden symmetry, in a broader but dimensionally finite Lie algebra [5, 6]. However, this statement does not depend on where the Hamiltonian is defined — in a Hilbert or in a vector space with indefinite metric. Thus, for example, the problem of the spectrum of an  $N$ -dimensional oscillator with complex ghosts can also be solved by the method of embedding of a finite dimensional Lie algebra in a finite dimensional Lie algebra<sup>2</sup>.

From the above considerations (section 1) it follows that the Poincaré algebra (relativistic case) can be included by a nontrivial method only in the infinite dimensional Lie algebra (the case of non-Lie algebras are not considered here). This existing difference between the relativistic and non-relativistic problem of the embedding of the Lie algebra can be adequately explained in a natural manner. In quantum, mechanics, as is well known, we always deal with finite numbers of degrees of freedom. Transition to an infinite number of degrees of freedom, apparently, implies a transition from a finite dimensional Lie algebra to an infinite-dimensional one. We shall expiate this statement with an example.

As was shown in [6], the space of states of an  $N$ -dimensional harmonic oscillator realizes an irreducible representation of the algebra  $\overline{U}(N+1) \supset U(N)$ . The generators of the algebra  $\overline{U}(N+1)$  satisfy the following commutation relations:

$$[E_\rho^\lambda, E_\varkappa^\sigma]_- = \delta_{\rho\sigma} E_\varkappa^\lambda - \delta_{\varkappa\lambda} E_\rho^\sigma, \quad \lambda, \rho, \sigma, \varkappa = 1, \dots, N+1, \quad (10)$$

where

$$\begin{aligned} E_\mu^\nu &= \frac{1}{2} [a_\mu, a_\nu^\dagger]_+, & \mu, \nu &= 1, \dots, N, \\ E_\mu^{N+1} &= g(H)a_\mu^\dagger, & E_{N+1}^\mu &= f(H)a_\mu, & E_{N+1}^{N+1} &= h(H), \end{aligned} \quad (11)$$

<sup>2</sup>The question of inclusion of an algebra of symmetry  $U(2N)$  of such an oscillator in a dynamic algebra will be considered in a subsequent paper.

$$H = \sum_{\mu=1}^N a_{\mu}^{+} a_{\mu}, \quad [a_{\mu}, a_{\nu}^{+}]_{-} = \delta_{\mu\nu}. \quad (12)$$

If the  $N$  number of the oscillators tends toward infinity, we approach the infinite oscillator, but then the dynamic algebra of an oscillator  $\overline{U}(N+1)$  and the algebra of hidden symmetry  $U(N)$  go over into the infinite dimensional Lie algebra. The algebra  $Sp(2N)$  may be determined by an analogous method, when  $N \rightarrow \infty$ .

For transition from quantum mechanics to the quantum theory of fields, it is also necessary to let the volume in which the oscillators are “contained” approach infinity [2]. For such passages to the limit, the operators  $a_r$  and  $a_s^{+}$  are replaced by the general operators of annihilation  $a(\mathbf{k})$  and creation  $a^{+}(\mathbf{k})$ , which satisfy the relations

$$[a(\mathbf{k}), a^{+}(\mathbf{k}')]_{-} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (13)$$

The dimensionally infinite algebra  $U(N)$  for this case is naturally associated with the continual algebra  $U(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , the generators of which are the operators

$$E(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{2} [a(\mathbf{k}), a^{+}(\mathbf{k}')]_{+}. \quad (14)$$

It is not difficult to convince oneself that operators of the form (13) satisfy the following commutative relationships:

$$[E(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), E(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_{-} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}')E(\mathbf{q}, \mathbf{k}') - \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{q})E(\mathbf{k}, \mathbf{q}'). \quad (15)$$

Further, let us construct the algebras  $U_N(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  and  $Sp_{2N}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ . Consider the set of operators:

$$E_{\mu}^{\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{2} [a_{\mu}(\mathbf{k}), a_{\nu}^{+}(\mathbf{k}')]_{+}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, N, \quad (16)$$

$$E_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = a_{\mu}(\mathbf{k})a_{\nu}(\mathbf{k}'), \quad E^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = a_{\mu}^{+}(\mathbf{k})a_{\nu}^{+}(\mathbf{k}'), \quad (17)$$

where

$$[a_{\mu}(\mathbf{k}), a_{\nu}^{+}(\mathbf{k}')]_{-} = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (18)$$

Taking into account (18), it can be shown that

$$[E_{\mu}^{\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), E_{\alpha}^{\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_{-} = \delta_{\mu\beta}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}')E_{\alpha}^{\nu}(\mathbf{q}, \mathbf{k}') - \delta_{\nu\alpha}\delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}')E_{\mu}^{\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}'), \quad (19)$$

$$[E_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), E_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_{-} = 0, \quad (20)$$

$$[E_{\mu}^{\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), E_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_{-} = -\delta_{\nu\beta}\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{q}')E_{\alpha\mu}(\mathbf{q}, \mathbf{k}) - \delta_{\nu\alpha}\delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}')E_{\beta\mu}(\mathbf{q}', \mathbf{k}), \quad (21)$$

$$[E_{\mu}^{\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), E^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_{-} = \delta_{\mu\beta}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}')E^{\alpha\nu}(\mathbf{q}, \mathbf{k}') + \delta_{\alpha\mu}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})E^{\beta\nu}(\mathbf{q}', \mathbf{k}'), \quad (22)$$

$$[E_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), E^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_{-} = \delta_{\nu\alpha}\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{q})E_{\mu}^{\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{q}') + \delta_{\mu\alpha}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})E_{\nu}^{\beta}(\mathbf{k}', \mathbf{q}') + \delta_{\nu\beta}\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{q}')E_{\mu}^{\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) + \delta_{\mu\beta}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})E_{\nu}^{\alpha}(\mathbf{k}', \mathbf{q}), \quad (23)$$

$$[E^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), E^{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_- = 0. \quad (24)$$

The set of operators  $\{E_\mu^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\}$ , satisfying the relations (19) form a continuous Lie algebra  $U_N(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ . The set of operators  $\{E_\mu^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), E^{\mu\nu}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')\}$ , satisfying the relationships (19)–(24), form the continuous Lie algebra  $Sp_{2N}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ .

Utilizing the commuting relations (19)–(24) it is possible to show that the elements from  $Sp_{2N}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \supset U_N(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  satisfy the Jacobi identity. Since elements of the algebra  $U_N(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  depend continuously on the variables  $\mathbf{k}$  and  $\mathbf{k}'$ , it is then possible to formally determine the derivative

$$\frac{\partial E_\mu^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\partial k_i} \equiv A_{\mu\nu}^i(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad \frac{\partial E_\mu^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\partial k'_j} \equiv B_{\mu\nu}^j(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (25)$$

Taking into account (19), it is not difficult to establish that

$$\begin{aligned} [A_{\mu\nu}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), A_{\alpha\beta}^j(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_- &= \\ &= \delta_{\mu\beta} \frac{\partial \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}')}{\partial p_i} A_{\alpha\nu}^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}') - \delta_{\alpha\nu} \frac{\partial \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}')}{\partial q_j} A_{\mu\beta}^j(\mathbf{p}, \mathbf{q}'), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} [B_{\mu\nu}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), B_{\alpha\beta}^j(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_- &= \\ &= \delta_{\mu\beta} \frac{\partial \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}')}{\partial q'_j} B_{\alpha\nu}^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}') - \delta_{\alpha\nu} \frac{\partial \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}')}{\partial p'_i} B_{\mu\beta}^j(\mathbf{p}, \mathbf{q}'), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} [E_\mu^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), A_{\alpha\beta}^i(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_- &= \\ &= \delta_{\mu\beta} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}') A_{\alpha\nu}^i(\mathbf{q}, \mathbf{p}') - \delta_{\alpha\nu} \frac{\partial \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}')}{\partial q_i} E_\mu^\beta(\mathbf{p}, \mathbf{q}'), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} [E_\mu^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), B_{\alpha\beta}^j(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_- &= \\ &= \delta_{\mu\beta} \frac{\partial \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}')}{\partial q'_j} E_\alpha^\nu(\mathbf{q}, \mathbf{p}') - \delta_{\alpha\nu} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}') B_{\mu\beta}^j(\mathbf{p}, \mathbf{q}'), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} [A_{\mu\nu}^i(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), B_{\alpha\beta}^j(\mathbf{q}, \mathbf{q}')]_- &= \\ &= \delta_{\mu\beta} \frac{\partial^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}')}{\partial p_i \partial q'_j} E_\alpha^\nu(\mathbf{q}, \mathbf{p}') - \delta_{\alpha\nu} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}') \frac{\partial^2 E_\mu^\beta(\mathbf{p}, \mathbf{q}')}{\partial p_i \partial q'_j}. \end{aligned} \quad (30)$$

Analogously, the relation may be established also for the derivatives

$$\frac{\partial E_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\partial k_i}, \quad \frac{\partial E_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\partial k'_j}, \quad \frac{\partial E^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\partial k'_i}, \quad \frac{\partial E^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')}{\partial k_j}.$$

From the relations (26), (28) and (27), (29) it can be seen that the set of operators  $\{E_\mu^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), A_{\mu\nu}^i(\mathbf{q}, \mathbf{q}')\}$  and  $\{E_\mu^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), B_{\mu\nu}^i(\mathbf{q}, \mathbf{q}')\}$  also form a continuous Lie algebra.

For consideration of the continuous Lie algebras, we may introduce, by analogy to the classical Lie algebra theory, the concepts of the universal enveloping Lie algebra, the center, Casimir operators, etc. It is clear that all these concepts require refinement from the mathematical point of view since, so far as we know, such Lie algebras are not considered in the mathematical literature. As regards the problem of classification and formulation of all irreducible representations of the algebra  $Sp_{2N}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ , it leads, as can be seen from relations (16) and (17), to the problem of the description of all unitary non-equivalent commutation relations (18). This last problem, as is known, has not been solved up to the present time.

With the operators  $E_\mu^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ , apparently, one cannot directly associate certain physical quantities (energy, momentum, angular momentum, etc.). However, the integral operators derived from these operators, i.e., operators of the type

$$E_\mu^\nu = \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' f_\mu^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}') E_\mu^\nu(\mathbf{p}, \mathbf{p}'),$$

as can be seen from Sec. 1, can be assigned definite physical meanings.

It is possible to display other continuous Lie algebras. Thus, for example, the operators

$$\{E_\mu^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), E_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = a_{\mu_1}(\mathbf{p}_1)a_{\mu_2}(\mathbf{p}_2)\dots a_{\mu_n}(\mathbf{p}_n)\}$$

or

$$\{E_\mu^\nu(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), E^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = a_{\mu_1}^+(\mathbf{p}_1)a_{\mu_2}^+(\mathbf{p}_2)\dots a_{\mu_n}^+(\mathbf{p}_n)\}$$

also form continuous Lie algebras.

**3.** In [7] it was shown that the set of infinitesimal operators of homogeneous Lorentz group  $O(3, 1)$  and operators  $L_\mu$ , entering into the relativistic equation

$$\left(L_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \varkappa\right) \Phi(x_0, \mathbf{x}) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (31)$$

form a Lie algebra, which is an isomorphous set of infinitesimal operators of the de Sitter group  $O(4, 1)$ . The function  $\Phi(x_0, \mathbf{x})$  for a Lorentz transformation is transformed according to the representation  $R = \sum_{i=1}^n \oplus R_i^{l_0^i, l_1^i}$ , where  $(l_0^i, l_1^i)$  are pairs of numbers to which are given the irreducible representations of  $O(3, 1)$ . Since the generators of group  $O(3, 1)$  and operators  $L_\mu$  transform one solution of Eq.(31) to another solution, it is clear that in all solution sets of (31) there are realized irreducible representations of group  $O(4, 1)$ . Since  $\Phi(x_0, \mathbf{x})$  pertains to a space which is a linear sum of spaces in which is realized the irreducible representation  $O(3, 1)$ , then, obviously, the spectrum of the Casimir operators,

$$K_1 = -\frac{1}{2}M_{\mu\nu}M_{\mu\nu}, \quad K_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M_{\mu\nu}M_{\rho\sigma}, \quad \mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3$$

in this space will be discrete.

On the basis of the above it is natural to propose the following problem: to formulate an equation for the wave function  $\Psi$  which would be invariant relative to

the Poincaré group and in all sets of solutions (solution space) of this equation of the spectrum of Casimir operators,

$$P^2 = P_\mu P_\mu, \quad W^2 = W_\alpha W_\alpha, \quad W_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} P_\beta M_{\gamma\delta} \quad (32)$$

would be discrete.

For the solution of this problem we will use one of the results of Foldy [8]. In [8] it was shown that with each irreducible unitary representation of the Poincaré group with mass  $m$  and spin  $s$  there can be associated a Schrödinger equation

$$H\Psi(x_0, \mathbf{x}) = i \frac{\partial \Psi(x_0, \mathbf{x})}{\partial t}, \quad (33)$$

where  $H = (\mathbf{P}^2 + m^2)^{1/2}$  and  $\Psi(x_0, \mathbf{x})$  is the  $(2s + 1)$ -component wave function, quadratically integrable over the space variables. The question of the uniqueness of such correspondence (i.e., the question of possible existence of another equation which would also express the free motion of a relativistic particle with mass  $m$  and spin  $s$ ) is left open in [8].

The single ambiguity, which apparently arises from the establishment of this correspondence, is tied to the extraction of the square root of the operator  $\mathbf{P}^2 + m^2$ . Actually there is no such ambiguity, since the operator  $\mathbf{P}^2 + m^2$  is positive, and by virtue of theorems [10] the square root of a positive self-adjoint operator is uniquely determined. This is proof in itself that the stated correspondence is isomorphic.

If the Hamiltonian in Eq.(34) is expressed in the form

$$\tilde{H} = \sqrt{\mathbf{P}^2 + M^2},$$

where  $\mathbf{P}^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$ , and  $M^2$  is the operator determined by formula (3) it can then be seen that (34) is a natural generalization of the relativistic Eq.(33) (in which the constant value  $m^2$  is replaced by the operator  $M^2$ ) in the case where the particle can take on various mass states.

In this manner, every relativistic equation expressing a free particle of mass  $m$  and spin  $s$  is unitarily equivalent to Eq.(33) ( $H > 0$ ).

Since the Casimir operators  $P^2$  and  $W^2$  enter the theory on equal terms, then we may use the operator  $W^2$  to obtain the equation of motion of a free particle. In this case, the equation which, generally speaking, is unitarily equivalent to Eq.(33), has the form

$$\sqrt{W^2 + m^2 s(s+1)} X(\mathbf{x}, t) = W_0 X(\mathbf{x}, t), \quad (33')$$

i.e., between  $X$  and  $\Psi$ , there exists the coupling  $X = V\Psi$ , where  $V$  is the isometric operator.

Establishment of isomorphism between the Schrödinger equations and the irreducible unitary representations of the Poincaré group permits the writing of the equation which would have the above state properties. This equation has the form

$$\tilde{H} \tilde{\Psi}_+ = i \frac{\partial \tilde{\Psi}_+}{\partial t}, \quad (34)$$

where

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathbf{P}^2 + m_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathbf{P}^2 + m_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\mathbf{P}^2 + m_3^2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Psi}_+ = \begin{pmatrix} \Psi_+^{m_1, s_1}(x_0, \mathbf{x}) \\ \Psi_+^{m_2, s_2}(x_0, \mathbf{x}) \\ \Psi_+^{m_3, s_3}(x_0, \mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

The plus sign means that the sign value of the supplementary Casimir operator (the sign of the energy) for the Poincaré group [9] for these solutions is equal to +1.

The Schrödinger equation which would also be invariant under time reflection has the form

$$H'X = i\frac{\partial X}{\partial t}, \quad (35)$$

$$\text{where } H' = \begin{pmatrix} \tilde{H} & 0 \\ 0 & \tilde{H} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_+ \\ \tilde{\Psi}_- \end{pmatrix}.$$

In conclusion, let us note that, in agreement with the theorems of O'Raifeltai-g [13] in the space of the solutions of Eq.(34) one cannot realize an irreducible representation of a finite dimensional Lie algebra which would contain the Poincaré algebra as a subalgebra.

If Eqs. (31) and (33) are considered equivalent (the unitary equivalence is constructed only for equations describing particles with spin 1/2), then the formula for  $\Phi'(x_0, \mathbf{x})$ , expressing motion of a particle which may be in various mass states, has the same formal appearance as the equations for elementary particles. However, the quantity  $\varkappa$  is then not a constant but a variable, taking on the following values:

$$\varkappa = \pm m_1 \lambda_1, \pm m_2 \lambda_2, \pm m_3 \lambda_3, \dots, \quad (36)$$

where  $m_i^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2$  and  $\lambda_i$  is some real nonzero eigenvalue of the operator  $L_0$ . In [15] it is shown that only for such values of  $\varkappa$  do Eqs.(31) have nonzero plane wave solutions.

The relation (36) can be written in the form of the mass formula:

$$M = \varkappa L_0^{-1}. \quad (36')$$

The operators which transform solutions of Eq.(31) with fixed mass to solutions which have a different mass are constructed from creation and annihilation operators by an analogous method (as in Sec. 1).

**Note 2.** Equation (31), as was shown in [11], excluding the Dirac equation, cannot be reduced by the unitary representations of the Foldy–Woythysen type to a Schrödinger equation. Consequently, the function  $\Phi(x_0, \mathbf{x})$ , strictly speaking, is not a wave function of a particle with fixed mass  $m$  and spin  $s$ .

The construction of a non-trivial theory of interaction based on Eq.(35), i.e., the introduction of potential in (35), by excluding those theories which with the help of unitary representations reduce to free particles (or as is generally stated, to the theory of free quasiparticles) [3], meets with difficulties in practice [14].

From the previous considerations, with every elementary particle there is associated a space  $R_i$ , in which is realized an irreducible representation of algebra  $P$ .

A particle which can be found in various excited states is associated with space  $R$  which is a linear sum of the spaces  $R_i$ . The inadequacy of such an approach lies in the fact that all elementary particles are considered as stable, and consequently possessing definite mass. Actually, a definite mass to these resonances cannot be ascribed, since particles are then nonstable.

To account for this fact, it is sufficient in the above mentioned considerations to change the linear sum to the linear integral:

$$R = \int \oplus R(m)g(m), \quad (37)$$

where the metric  $g(m)$  is concentrated on the set composed of one or more points (depending on how many stable particles) and nonoverlapping intervals  $[m'_i, m''_i]$ .

A more expanded formulation of equation (37) has the appearance

$$R = R^{s_0}(m_0) \oplus \sum_{i=1}^m R_i, \quad (38)$$

$$R_i = \int \oplus R^{s_i}(m)f^{s_i}(m)dm, \quad (39)$$

where  $R^{s_i}(m)$  is the space in which is realized the irreducible representation of algebra  $P$  with mass  $m$  and spin  $s_i$ ; the function  $f^{s_i}(m)$ , nonzero only in the interval  $(m'_i, m''_i)$ , characterizes the "smearing" (indeterminacy) of the mass of a resonance. If in (39) we replace  $f^{s_i}(m)$  by a delta function, then  $R$ , as before, will be a linear sum of spaces  $R_i$ .

The operator  $(P_\alpha^{(i)})^2$  in  $R_i$  is determined in the following manner:

$$(P_\alpha^{(i)})^2 R_i = \int \oplus (P_\alpha^{(i)})^2 R^{s_i}(m)f^{s_i}(m)dm = \int \oplus m^2 R^{s_i}(m)f^{s_i}(m)dm. \quad (1')$$

The operators  $P_\alpha^{(i)}$ ,  $M_{\mu\nu}^{(i)}$ ,  $M^2$ ,  $P^2$  can be determined by an analogous method. A more detailed presentation of results obtained by taking account of "smearing" of the resonances will be given in another paper.

1. Fushchych W.I., *Ukr. Fiz. Zh.*, 1967, **12**, 741.
2. Bogolyubov N.N., Shirkov D.V., *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley, 1959.
3. Fushchych W.I., *Ukr. Fiz. Zh.*, 1967, **12**, 1331.
4. Neiman I., *Mathematical Bases of Quantum Mechanics*, Nauka, 1964 (in Russian).
5. Barut A., *Phys. Rev.*, 1965, **139**, 1433;  
Malkin I.A., Man'ko V.I., 1965, **2**, № 5, 230, *Sov. Phys. - JETP. Lett.*, 1965, **2**, 146.
6. Hwa R., Nuyts J., *Phys. Rev.*, 1966, **145**, 1188.
7. Fushchych W.I., *Ukr. Fiz. Zh.*, 1966, **11**, 907.
8. Foldy L., *Phys., Rev.*, 1956, **102**, 568.
9. Shirokov Yu.M., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 1957, **33**, 1196.
10. Riss F., Sekefal'vi-Nad' B., *Lectures on Functional Analysis*, IL, 1954 (in Russian).
11. Jordan T., Mukunda N., *Phys. Rev.*, 1963, **132**, 1842.

12. Formanek J., *Czech. J. Phys. B*, 1966, **16**, 1;  
Votruba I., Gavlichek M., *Physics of High Energies and the Theory of Elementary Particles*, Kiev, Naukova Dumka, 1967, P. 330.
13. O'Raifertaigh L., *Phys. Rev. Letters*, 1965, **14**, 575.
14. Schweber S., *Introduction to the Relativistic Quantum Theory of Fields*, Harper, 1961.
15. Gel'fand I.M., Michlos R.A., Shapiro E.Ya., *Representations of Rotation and Lorentz Groups*, Moscow, 1958.
16. Mettews P.T., Salam A., *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 283.

# On a possible approach to the variable-mass problem

W.I. FUSHCHYCH, I.Yu. KRIVSKY

The mass operator  $M$  is introduced as an independent dynamical variable which is taken as the translation generator  $P_4$  of the inhomogenous De Sitter group. The classification of representations of the algebra  $P(1,4)$  of this group is performed and the corresponding  $P(1,4)$  invariant equations for variable-mass particles are written out. In this way we have succeeded, in particular, in uniting the “external” and “internal” ( $SU_2$ ) symmetries in a non-trivial fashion.

The idea of variable mass has been considered by many authors in connection with the mass-spectrum and unstable-particles problems (see e.g. refs. [1, 2]). Since for the stable free particle  $M_0^2 = P_0^2 - \mathbf{P}^2$ , it is supposed that the square of variable-mass operator (in the presence of interaction, of course) is defined by  $M^2 \equiv P_0^2 - \mathbf{P}^2$ .

In connection with the problems mentioned, the idea seems to be attractive to consider the rest mass as a variable  $M$ , on the same footing with the three-momentum  $\mathbf{P}$ . It is natural to realize this idea in such a way that we define the mass operator  $M$  as an independent dynamical variable  $P_4$  like the components of three-momentum  $\mathbf{P}$ . By this the correspondence principle with the fixed-rest-mass theory demands the free operators of energy, three-momentum and variable mass to satisfy the condition

$$P_0^2 = \mathbf{P}^2 + M^2 \equiv \mathbf{P}^2 + P_4^2 \quad (1)$$

in this case too. It is obvious that such a definition of the mass operator is more general than the above and is non-trivial (see below) even in the case of absence of interaction.

The presence of a dynamical variable  $M \equiv P_4$  in the  $p$ -representation in addition to the three-momentum  $\mathbf{P}$  makes it inevitable to introduce in the  $x$ -representation (in quantum mechanics) an additional dynamical variable besides the three coordinates  $\mathbf{x}$ . It is natural to take for this the canonical conjugate of  $M$ , which will be denoted below as  $\tau \equiv x_4$ . It should be noted in this context that at least the corresponding principle with the fixed-rest-mass theory (not to speak of deeper physical arguments) does not allow to consider the time  $t \equiv x_0$  as a dynamical variable (e.g. as canonically conjugated to  $P_0$ ) in the variable mass theory too. Further, if we do not want to violate the conventional connection between the momentum and configuration spaces, the variable-mass concept discussed here requires to study the group of transformations which conserve the five-dimensional form  $x^2 \equiv t^2 - \mathbf{x}^2 - \tau^2 \equiv x_\mu^2$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ , i.e., the inhomogenous De Sitter group, the algebra of which we call  $P(1,4)$ , in analogy to the algebra  $P(1,3)$  of the Poincaré group.

To write  $P(1,4)$ -invariant equations for free particles with variable mass, we make use of the classification of the irreducible representations of  $P(1,4)$ . Analogously to

the case of the algebra  $P(1,3)$  (ref. [3]), we consider four classes of representations which correspond to the values  $P^2 = \kappa^2 > 0$ ,  $P^2 = 0$  and  $P^2 = -\eta^2 < 0$  of the invariant

$$P^2 = P_0^2 - \mathbf{P}^2 - P_4^2 \equiv P_\mu^2, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

The algebra  $P(1,4)$  which is determined by the generators  $P_\mu$  and  $M_{\mu\nu}$  has, besides eq.(2), two other invariants:

$$V \equiv -\frac{1}{4}M_{\mu\nu}w_{\mu\nu}, \quad W \equiv \frac{1}{2}w_{\mu\nu}^2, \quad (3)$$

where

$$w_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}M_{\alpha\beta}P_\gamma. \quad (4)$$

For class I (when  $P^2 = \kappa^2 > 0$ ), in the system  $\mathbf{P} = P_4 = 0$ , we have

$$\hat{S}^2 \equiv P_0^{-2}W + 2P_0^{-1}V = (\mathbf{M} + \mathbf{R})^2 = s(s+1)\hat{1}, \quad (5)$$

$$\hat{I}^2 \equiv P_0^{-2}W - 2P_0^{-1}V = (\mathbf{M} - \mathbf{R})^2 = I(I+1)\hat{1}, \quad (6)$$

where  $s, I = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  and

$$\mathbf{M} \equiv (M_{23}, M_{31}, M_{12}), \quad \mathbf{R} \equiv (M_{14}, M_{24}, M_{34}). \quad (7)$$

It follows from eqs.(5) and (6) that in the case I all the representations of  $P(1,4)$  are unitarity and finite-dimensional (with respect to  $s$  and  $I$ ) and are labelled by two numbers  $s$  and  $I$ . These symbols are naturally to be identified with spin and isospin of the free particle with variable mass  $m$ , and, owing to  $p_0^2 \geq \kappa^2$ , one can understand the parameter  $\kappa$  (which is the boundary value of energy) as a “bare rest mass” of this particle.

The  $P(1,4)$ -invariant (in the Foldy [4] sense) equation for the wave function  $\psi(x) \equiv \psi(t, \mathbf{x}, x_4)$  of such a particle (and antiparticle) with arbitrary  $s$  and  $I$  has the form

$$\left( \beta \sqrt{\mathbf{P}^2 + P_4^2 + x^2} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_{s_3 I_3}(t, \mathbf{x}, x_4) = 0, \quad \beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

where  $-s \leq s_3 \leq s$ ,  $-I \leq I_3 \leq I$ .

Thus, the variable-mass concept discussed has made it possible to unite non-trivially the “external” ( $P(1,3)$ ) and “internal” ( $SU_2$ ) symmetries which was not successfully done by the conventional approach to the variable mass [2].

For the class II (when  $P^2 = 0$ ), in the system  $P_1 = P_2 = P_4 = 0$  we have

$$P_3^{-1}V = -\mathbf{M}\mathbf{P}', \quad P_3^{-2}W = \mathbf{P}'^2, \quad (9)$$

where  $P'_i \equiv M_{0i} + M_{i4}P_0P_4^{-1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

The generators  $\mathbf{P}'$  and  $\mathbf{M}$  are those of the algebra  $P(3)$  which are evoked by the group of translations and rotations in 3-dimensional Euclidean space. Since the spectrum of  $W$  is continuous in this case, its values are, obviously, difficult to interpret

physically in an acceptable fashion. If we put  $W = 0$  when  $V = 0$  ven if  $\mathbf{M} \neq 0$ ; an additional invariant

$$W' \equiv \mathbf{M}^2 = s(s+1)\hat{1} \quad (10)$$

appears, so that in this case all the representations are unitary and finite dimensional and are labelled by the spin  $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

The  $P(1,4)$ -invariant equation for the wave function of the particle (and antiparticle) with variable mass  $m$  and arbitrary spin  $s$  has the form

$$\left( \beta \sqrt{\mathbf{P}^2 + P_4^2} - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_{s_3}(t, \mathbf{x}, x_4) = 0. \quad (11)$$

For the class III (when  $P^2 = -\eta^2 < 0$ ), in the system  $P_0 = \mathbf{P} = 0$  we have

$$V = \pm \eta \mathbf{M} \mathbf{N}, \quad W = \eta^2 (\mathbf{N}^2 - \mathbf{M}^2), \quad (12)$$

where  $\mathbf{N} \equiv (M_{01}, M_{02}, M_{03})$ . The generators  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{N}$  are those of the algebra  $O(1,3)$  of the homogenous Lorentz group and  $V, W$  given in (12) are its invariants. Therefore, according to ref. [5], in this case all the unitary irreducible representation of  $P(1,4)$  are infinite dimensional and are labelled by the numbers  $\eta, l_0$  and  $l_1$ , where  $\eta$  is arbitrary real,  $-1 \leq l_1 \leq 1$  if  $l_0 = 0$  and  $l_1$  is imaginary if  $l_0 = \frac{1}{2}, 1, \dots$

In this case the  $P(1,4)$ -invariant equation for the wave function has the form

$$\left( \beta \sqrt{\mathbf{P}^2 + P_4^2} - \eta^2 - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_{l_3}^{l_0 l_1}(t, \mathbf{x}, x_4) = 0, \quad (13)$$

where  $l-l_0 = 0, 1, 2, \dots, -l \leq l_3 \leq l$ . We have got in this way, the infinite-dimensional equation for the wave function. The physical sence of the numbers  $\eta, l_0, l_1, l_3$  is not as clear as in the former cases.

Note, by the way, that recently the infinite-dimensional equations have been intensively discussed [6] (though the physical arguments underlying them are still rather poor). Following the authors [6], one can try to find some physical sense for the numbers  $\eta, l_0, l_1, l_3$ . However, it seems that the cases I and II can more directly be related to the problems of mass spectrum and unstable systems than the case III.

For the sake of completeness we mention that in the case IV when  $P_0 = \mathbf{P} = P_4 = 0$ , we have  $V = W = 0$ . The generators  $M_{\mu\nu}$  remained are those of the algebra  $O(1,4)$  of the homogenous De Sitter group, all representations of which are well known (see e.g. ref. [7]) and the corresponding equations are written out in ref. [8].

Here we have written down the  $P(1,4)$ -invariant equations for variable mass free particles, more exactly, for elementary systems with respect to  $P(1,4)$  (but, of course, non-elementary with respect to  $P(1,3)$ ). The construction of the quantum field theory on the basis of these equations and the introduction of interaction, in the framework of the Lagrange formalism, are performed by total analogy with the conventional theory. However, as a first step to the problems of mass spectrum and unstable systems it is expedient to introduce some interactions in the quantum mechanical equations and to study the corresponding models which is the subject of the next publications.

1. Mathews P.T., Salam A., *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 283;  
Lurcat F., Strongly decaying particles and relativistic invariance, Preprint, Orsay, 1968.
2. O'Raifeartaigh L., *Phys. Rev. Letters*, 1965, **14**, 575;  
Fushchych W.I., *Ukrainian Phys. J.*, 1968, **13**, 362.
3. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149;  
Shirokov Yu.M., *JETP (Sov. Phys.)*, 1957, **33**, 1196.
4. Foldy L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
5. Gelfand I.M., Minlos R.A., Shapiro Z.Ya., Representations of the rotation and Lorentz Groups and their applications, Moscow, Fizmathgiz, 1958 (in Russian).
6. Fronsdal C., *Phys. Rev.*, 1967, **156**, 1665;  
Nambu Y., *Phys. Rev.*, 1967, **160**, 1171;  
Takabayashi T., *Progr. Theor. Phys.*, 1967, **37**, 767.
7. Newton T.D., *Ann. Math.*, 1950, **51**, 730;  
Gelfand I.M., Naimark M.A., Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen, Akademie-Verlag, Berlin, 1957.
8. Sokolik G.A., Group methods in the theory of elementary particles, Atomizdat, Moscow, 1965 (in Russian).

# О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского

В.И. ФУЩИЧ, И.Ю. КРИВСКИЙ

The mass operator is determined as an independent dynamical variable related to the generator  $\mathcal{P}_4$  of de Sitter's inhomogeneous group  $\mathcal{P}(1, 4)$  in the Minkovski 5-space. The classification of irreducible representations of the  $\mathcal{P}(1, 4)$  algebra is given. The wave equations invariant under the  $\mathcal{P}(1, 4)$  group and describing the particles with arbitrary spin and isospin are written down in the Schrödinger–Foldy form and isospin entering the equations dynamically so as spin. The equations of the first degree with respect to  $\partial_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ ), invariant under  $\mathcal{P}(1, 4)$  that is, the equations of the Dirac and Kemmer–Duffin type are considered in detail. It is shown that the equation of the Kemmer–Duffin type in the Minkovski five-dimensional space describes a fermion of the nucleon-antinucleon type but not boson than boson.

Report presented at the Conference on Composite Models of Elementary Particle (Institute for Theoretical Physics, Kiev, Ukrainian SSR, June 1968).

Определен оператор массы как независимая динамическая переменная, связанная с генератором  $\mathcal{P}_4$  неоднородной группы де Ситтера  $\mathcal{P}(1, 4)$  в 5-мерном пространстве Минковского. Проведена классификация неприводимых представлений алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ . Выписаны волновые уравнения в форме Шредингера–Фолди, инвариантные относительно группы  $\mathcal{P}(1, 4)$ , описывающие частицы с произвольным спином и изоспином, причем изоспин входит в эти уравнения динамически, как и спин. Детально рассмотрены примеры уравнений первой степени по  $\partial_\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ ), инвариантных относительно  $\mathcal{P}(1, 4)$  — уравнения типа Дирака и Кеммера–Дэффина. Показано, что уравнение типа Кеммера–Дэффина в 5-мерном пространстве Минковского описывает не бозон, а фермион типа нуклон-антинуклон.

Работа была доложена на Рабочем совещании по составным моделям элементарных частиц, состоявшемся в ИТФ АН УССР в июне 1968 г.

## § 1. Введение. Выбор группы

Вопрос о написании физически приемлемых уравнений, в которых переменные типа изоспина, гиперзаряда входили бы динамически, на равных правах со спином, был поднят многими авторами (обзор этих работ см. в [1]). В этих работах главные усилия направлялись на объединение однородной группы Лоренца  $O(1, 3)$  с группами “внутренних” симметрий. Более последовательное решение этого вопроса, однако, требует нетривиального объединения неоднородной группы Лоренца (группы Пуанкаре  $\mathcal{P}(1, 3)$ ) с группами “внутренних” симметрий. Ожидается, что именно на этом пути удастся получить спектр масс и другие характеристики элементарных частиц.

Однако, как показано в работах [2], невозможно нетривиально объединить алгебру<sup>1</sup>  $\mathcal{P}(1, 3)$  и “внутренние” симметрии в рамках конечномерной алгебры  $G$ , если оператор массы  $M^2 \equiv P_0^2 - \vec{P}^2$  имеет дискретный спектр. В работе [3] был построен нетривиальный пример алгебры  $G \supset \mathcal{P}(1, 3)$  для случая, когда оператор

массы имеет уже полосатый спектр; но и в этом случае оказалось, что алгебра  $G$  является бесконечномерной алгеброй Ли. Рассмотрение же бесконечномерных алгебр для физических задач затруднительно как ввиду отсутствия разработанного математического аппарата таких алгебр, так и ввиду необходимости решения заведомо нелегкой задачи придания физического смысла, по крайней мере, всем ее коммутирующим генераторам. Не говоря уже о том, что вопрос о написании уравнений движения, инвариантных относительно таких алгебр, совершенно не ясен. Все это наводит на мысль, что при отыскании объединявшей конечномерной алгебры  $G$  следует, очевидно, отказаться от требования дискретности или даже полосатости спектра оператора массы, а экспериментально наблюдаемые дискретные массы пытаться получить как собственные значения оператора массы при наличии соответствующего взаимодействия.

В данной работе предлагается один из возможных способов нетривиального объединения, в терминах уравнений для волновых функций<sup>2</sup> алгебры  $\mathcal{P}(1, 3)$  с алгебрами “внутренних” симметрий в рамках конечномерной алгебры Ли, имеющих определенное физическое оправдание. Он основан на рассмотрении оператора (квадрата) массы как независимой динамической переменной, определяемой как

$$M^2 \equiv \varkappa^2 + P_4^2, \quad (1.1)$$

где  $\varkappa$  – некоторый фиксированный параметр, а  $P_4$  – оператор типа компонент 8-импульса  $\vec{P}$ , коммутирующий со всеми генераторами алгебры  $\mathcal{P}(1, 3)$ . Соотношение между энергией  $P_0$ , 8-импульсом  $\vec{P}$  и переменной массой  $M$  физической системы оставляется прежним (здесь всюду  $\hbar = c = 1$ ):

$$P_0^2 = \vec{P}^2 + M^2 \equiv P_k^2 + \varkappa^2, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (1.2)$$

Определение (1.1) делает  $P$ -пространство (одной частицы) пятимерным:  $P \equiv (P_0, \vec{P}, P_4)$ . Если  $P$ - и  $x$ -пространства по-прежнему считать взаимно сопряженными, последнее тоже будет пятимерным:  $x \equiv (x_0, \vec{x}, x_4)$ . Естественно оставить за временем  $t \equiv x_0$  и 8-координатой  $\vec{x}$  прежнюю роль, а в качестве  $x_4$  выбрать (в квантовой механике) динамическую переменную, канонически сопряженную к  $P_4$ . Далее, если не нарушать общепринятую связь между импульсным и конфигурационным пространствами, то предлагаемая концепция переменной массы требует рассмотрения группы преобразований оставляющих инвариантной пятимерную форму

$$x^2 \equiv x_0^2 - \vec{x}^2 - x_4^2 \equiv x_\mu^2, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (1.3)$$

– неоднородной группы де Ситтера, алгебру которой обозначим как  $\mathcal{P}(1, 4)$ , в отличие от алгебры  $\mathcal{P}(1, 3)$  группы Пуанкаре.

Совершенно очевидно, что принятое здесь определение оператора массы как независимой динамической переменной является более общим и нетривиальным (см. ниже) даже для случая отсутствия взаимодействия. Оно может оказаться плодотворным (или даже необходимым) при описании нестабильных частиц (систем) как не обладающих фиксированной массой.

<sup>2</sup>Как показано в [3], алгебраическая задача о подходящем вложении алгебры  $\mathcal{P}(1, 3)$  в более широкую может быть сформулирована в терминах уравнений для волновых функций, что облегчает надлежащий физический анализ объединяющей схемы.

Уместно напомнить, что идея использования пятимерного пространства в физике была высказана Ф. Клейном задолго до основания квантовой теории и рассматривалась в самых различных вариантах (обзор основных работ этого направления см., например, в монографии Румера [4]). Она интенсивно обсуждалась в общей теории относительности в связи с объединением теории тяготения и электричества, а в дальнейшем — построением волновой механики в пятимерном пространстве [4]. Одно из основных отличий нашего рассмотрения этой идеи состоит (помимо интерпретации пятой координаты) в выборе группы преобразований координат пятимерного пространства.

В § 2 данной работы найдены инварианты алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ , проведена классификация неприводимых представлений алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ , в классе  $I$ , когда  $P^2 \equiv P_\mu^2 > 0$ , найдена конкретная реализация представления для генераторов этой алгебры, выписаны волновые уравнения в форме Шредингера–Фолди, инвариантные относительно выбранной группы. В § 3 дана физическая интерпретация волновых уравнений, согласно которой уравнения в классе  $I$  описывают частицы с произвольным спином и изоспином, причем изоспин входит в эти уравнения динамически, как и спин. В § 4 проведена классификация неприводимых представлений алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  в других классах и выписаны соответствующие  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантные уравнения<sup>3</sup>. В § 5 и 6 детально рассмотрены примеры  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантных уравнений первой степени по  $\partial_\mu$  в пятимерном пространстве Минковского — уравнения типа Дирака и Кеммера–Дэффина. Любопытно отметить, что уравнение типа Кеммера–Дэффина в схеме  $\mathcal{P}(1, 4)$  описывает не бозоны, а фермионы типа нуклон-антинуклон.

## § 2. Классификация представлений алгебры $\mathcal{P}(1, 4)$ .

### Волновые уравнения в классе $I$ .

Эрмитовы генераторы  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  неоднородной группы де Ситтера удовлетворяют соотношениям

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad -i[P_\mu, J_{\nu\sigma}] = g_{\mu\nu}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\nu, \quad (2.1a)$$

$$-i[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}, \quad (2.1b)$$

где

$$g_{00} = 1, \quad g_{kl} = -\delta_{lk}; \quad \mu, \nu, \sigma, \rho = 0, 1, 2, 3, 4; \quad k, l = 1, 2, 3, 4, \quad (2.2)$$

а,  $J_{\mu\nu}$  — генераторы однородной группы де Ситтера  $O(1, 4)$ . Совокупность генераторов  $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$  полезно для дальнейшего записать в виде матрицы:

$$(J_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & J_{01} & J_{02} & J_{03} & J_{04} \\ & 0 & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ & & 0 & J_{23} & J_{24} \\ & & & 0 & J_{34} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Здесь, как в других подобных записях, соответствующие матричные элементы ниже главной диагонали не выписаны. Кроме того, для упрощения записи, нули

<sup>3</sup>Краткое содержание некоторых результатов, приведенных в § 2–4, изложено в [5].

главной диагонали в подобных матрицах будем в дальнейшем опускать. Заметим, кстати, что в отличие от случая  $O(1,3)$ , совокупность генераторов  $J_{\mu\nu}$  алгебры  $O(1,4)$  нельзя исчерпать группированием их в 3-мерные или 4-мерные векторы. Поэтому ниже чаще всего приходится иметь дело с тензорными конструкциями.

Для написания всех волновых уравнений, инвариантных относительно неоднородной группы де Ситтера  $\mathcal{P}(1,4)$  (“ $\mathcal{P}(1,4)$ -инвариантных уравнений”) и реализующих представления алгебры  $\mathcal{P}(1,4)$ , необходимо найти инварианты этой алгебры, провести классификацию представлений по значениям инвариантов и найти явный вид ее генераторов в различных представлениях. Ясно, что одним из таких инвариантов является квадрат 5-импульса:

$$P^2 \equiv P_0^2 - \vec{P}^2 - P_4^2 \equiv P_\mu^2, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (2.4)$$

Для отыскания других инвариантов рассмотрим антисимметричный тензор третьего ранга

$$U_{\mu\nu\alpha} \equiv P_\mu J_{\nu\alpha} + P_\alpha J_{\alpha\mu} + P_\alpha J_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Он имеет 10 независимых компонент, поэтому эквивалентен соответствующему антисимметричному тензору второго ранга  $w_{\mu\nu}$ , который определим как

$$w_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma} P_\alpha J_{\beta\gamma} = \frac{1}{6} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma} U_{\alpha\beta\gamma}, \quad (2.6)$$

где  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}$  — единичный полностью антисимметричный тензор пятого ранга с  $\varepsilon_{01234} = 1$ . Соответствие между компонентами тензоров (2.5) и (2.6) удобно записать в матричной форме

$$(w_{\mu\nu}) \equiv \begin{pmatrix} w_{01} & w_{02} & w_{03} & w_{04} \\ & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ & & w_{23} & w_{24} \\ & & & w_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{234} & -U_{314} & -U_{124} & -U_{321} \\ & U_{034} & U_{042} & U_{023} \\ & & U_{014} & U_{031} \\ & & & U_{012} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Заметим, что в  $\mathcal{P}(1,3)$  аналогом тензора  $w_{\mu\nu}$  является 4-вектор  $w_\mu$  (см. (2.56) в [6]).

Используя (1.1), можно показать, что имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [P_\mu, w_{\rho\sigma}] &= 0, \\ -i [J_{\mu\nu}, w_{\rho\sigma}] &= g_{\mu\sigma} w_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} w_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} w_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} w_{\mu\rho}, \end{aligned} \quad (2.8a)$$

$$-i [w_{\mu\nu}, w_{\rho\sigma}] = (g_{\mu\sigma} \varepsilon_{\nu\rho\alpha\beta\gamma} + g_{\nu\rho} \varepsilon_{\mu\sigma\alpha\beta\gamma} - g_{\mu\rho} \varepsilon_{\nu\sigma\alpha\beta\gamma} - g_{\nu\sigma} \varepsilon_{\mu\rho\alpha\beta\gamma}) P_\alpha J_{\beta\gamma};$$

$$\begin{aligned} [P_\mu, U_{\nu\rho\alpha}] &= 0, \\ -i [J_{\mu\nu}, U_{\rho\sigma\alpha}] &= g_{\mu\sigma} U_{\nu\rho\alpha} + g_{\nu\rho} U_{\mu\sigma\alpha} - g_{\mu\rho} U_{\nu\sigma\alpha} - g_{\nu\sigma} U_{\mu\rho\alpha}, \\ -i [U_{\mu\nu\alpha}, U_{\rho\sigma\gamma}] &= g_{\mu\rho} (U_{\nu\alpha\sigma} P_\gamma - U_{\nu\alpha\gamma} P_\sigma) - \mu\sigma(\nu\alpha\rho \cdot \gamma - \nu\alpha\gamma \cdot \rho) + \\ &+ \mu\gamma(\nu\alpha\rho \cdot \sigma - \nu\alpha\sigma \cdot \rho) - \nu\rho(\mu\alpha\sigma \cdot \gamma - \mu\alpha\gamma \cdot \sigma) + \nu\sigma(\mu\alpha\rho \cdot \gamma - \mu\alpha\gamma \cdot \rho) - \\ &- \nu\gamma(\mu\alpha\rho \cdot \sigma - \mu\alpha\sigma \cdot \rho) + \alpha\rho(\mu\nu\sigma \cdot \gamma - \mu\nu\gamma \cdot \sigma) - \alpha\sigma(\mu\nu\rho \cdot \gamma - \mu\nu\gamma \cdot \rho) + \\ &+ \alpha\gamma(\mu\nu\rho \cdot \sigma - \mu\nu\sigma \cdot \rho), \end{aligned} \quad (2.8b)$$

где последние слагаемые записаны схематически, например

$$\mu\gamma(\nu\alpha\rho \cdot \sigma - \nu\alpha\sigma \cdot \rho) \equiv g_{\mu\gamma} (U_{\nu\alpha\rho} P_\sigma - U_{\nu\alpha\sigma} P_\rho).$$

С помощью (2.1) и (2.8) можно проверить, что только скалярные операторы

$$V \equiv -\frac{1}{4}J_{\mu\nu}w_{\mu\nu} = -\frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J_{\mu\nu}J_{\rho\sigma}P_\alpha, \quad (2.9)$$

$$W \equiv \frac{1}{6}U_{\mu\nu\alpha}^2 = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}P_\mu^2J_{\nu\alpha}^2 - P_\mu P_\nu J_{\mu\sigma}J_{\nu\sigma} \quad (2.10)$$

коммутируют со всеми генераторами алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ , т.е. являются ее инвариантами. Можно также убедиться, что инвариантом является оператор знака энергии

$$\varepsilon = P_0/|P_0|. \quad (2.11)$$

Итак, алгебра  $\mathcal{P}(1, 4)$  имеет четыре инварианта  $P^2$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $\varepsilon$ , общих для всех ее представлений. Как видно из (2.4), (2.10), (2.11), инварианты  $P^2$ ,  $W$  и  $\varepsilon$  подобны по конструкции соответствующим инвариантам алгебры  $\mathcal{P}(1, 3)$ , тогда как инварианта типа  $V$  алгебра  $\mathcal{P}(1, 3)$  не имеет.

Как и в случае  $\mathcal{P}(1, 3)$  [7, 8], целесообразно рассмотреть четыре класса неприводимых представлений алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ , соответствующие следующим значениям инварианта  $P^2$ :

$$\begin{array}{ll} P^2 = \varkappa^2 > 0 & \text{— класс I;} \\ P^2 = -\eta^2 < 0 & \text{— класс III;} \end{array} \quad \begin{array}{ll} P^2 = 0, P \neq 0 & \text{— класс II;} \\ P = 0 & \text{— класс IV;} \end{array}$$

где  $\varkappa$  и  $\eta$  — действительные числа.

Остановимся в этом параграфе и анализе представления класса I. Удобно работать в допустимой в этом классе “системе покоя”  $P_k = 0$ . В этой системе  $P_0 = \varepsilon\varkappa$  и, как можно убедиться, тензор (2.6) редуцируется к 6-компонентному тензору: компоненты  $w_{0k} = 0$ , а остальные компоненты  $w_{kl}$  совпадают (с точностью до  $\varepsilon\varkappa$ ) с компонентами

$$S_{kl} \equiv J_{kl} \Big|_{P_k=0}$$

в указаном ниже порядке, так что его можно записать в форме  $4 \times 4$ -матрицы:

$$(w_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ & w_{23} & w_{24} \\ & & w_{34} \end{pmatrix} = -\varepsilon\varkappa \begin{pmatrix} S_{43} & S_{24} & S_{32} \\ & S_{41} & S_{13} \\ & & S_{21} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Инварианты  $V$  и  $W$  в этой системе имеют вид:

$$V = -\frac{1}{4}S_{kl}w_{kl} = \varepsilon\varkappa \vec{L}\vec{R}, \quad (2.13)$$

$$W = \frac{1}{2}w_{kl}^2 = \varkappa^2 (\vec{L}^2 + \vec{R}^2), \quad (2.14)$$

где 3-векторы

$$\vec{L} \equiv (S_{23}, S_{31}, S_{12}), \quad \vec{R} \equiv (S_{41}, S_{42}, S_{43}). \quad (2.15)$$

Напомним, кстати, что в  $\mathcal{P}(1, 3)$  4-вектор  $w_\mu$  в системе  $\vec{P} = 0$  совпадает с 3-вектором спина, компонентами которого суть операторы  $J_{ab}$ ,  $a, b = 1, 2, 3$ , в системе  $\vec{P} = 0$ , т.е. моменты  $S_{ab}$  собственных вращений (точнее говоря, моменты

“внутренних” движений). Ясно поэтому, что операторы  $J_{kl} = S_{kl}$  в системе  $P_k = 0$  тоже следует понимать как моменты некоторых “внутренних” движений.

Операторы  $J_{kl} = S_{kl}$  являются генераторами алгебры  $O_4$  группы евклидовых вращений в 4-пространстве. Эта группа и является малой группой группы  $\mathcal{P}(1, 4)$  в классе I. Поэтому задача о классификации неприводимых представлений алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  в этом классе по существу сводится к хорошо изученной (см., например, [6]) задаче о классификации неприводимых представлений алгебры  $O_4$ . Напомним, что все неприводимые представления  $D(s, t)$  группы  $O(4)$  унитарны, конечномерны и идентифицируется двумя числами  $s$  и  $t$ , возможные значения которых суть  $s, t = 0, 1/2, 1, \dots$ . Эти числа определяют собственные значения инвариантов  $\vec{S}^2$  и  $\vec{T}^2$  алгебры  $O_4$ :

$$\vec{S}^2 = s(s+1)\hat{1}, \quad \vec{T}^2 = t(t+1)\hat{1}, \quad (2.16)$$

где  $\hat{1} - (2s+1)(2t+1)$ -мерная единичная матрица, а компоненты 3-векторов  $\vec{S}$  и  $\vec{T}$  суть

$$S_a = \frac{1}{2}(S_{bc} + S_{4a}), \quad T_a = \frac{1}{2}(S_{bc} - S_{4a}), \quad (2.17)$$

где  $(a, b, c) =$  цикл  $(1, 2, 3)$ . Векторы, реализующие матричные представления  $D(s, t)$  алгебры  $O_4$ ,  $(2s+1)(2t+1)$ -мерны, их компоненты нумеруются собственными значениями  $s_3$  и  $t_3$  операторов  $S_3$  и  $T_3$  ( $-s \leq s_3 \leq s$ ,  $-t \leq t_3 \leq t$ ).

Обратим внимание, что в качестве независимых инвариантов алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  в классе I можно выбрать операторы  $P^2$ ,  $\varepsilon$ ,  $\vec{S}^2$  и  $\vec{T}^2$ , поскольку, как видно из (2.17), (2.13), (2.14),

$$\vec{S}^2 = \frac{W}{4\chi^2} + \frac{\varepsilon}{2\chi}V, \quad \vec{T}^2 = \frac{W}{4\chi^2} - \frac{\varepsilon}{2\chi}V. \quad (2.18)$$

Поэтому свойства неприводимых представлений группы  $\mathcal{P}(1, 4)$  в классе I, связанные с инвариантами  $\vec{S}^2$  и  $\vec{T}^2$ , совпадают со свойствами неприводимых представлений группы  $O_4$ .

Таким образом, все неприводимые представления  $D^\pm(s, t)$  группы  $\mathcal{P}(1, 4)$  в классе I унитарны, конечномерны и идентифицируются числами  $s$  и  $t$ , а также значением  $\chi^2$  инварианта  $P^2$  и знаком энергии  $\varepsilon = \pm 1$ . Компоненты векторов  $\Psi$ , реализующих представление  $D^\pm(s, t)$ , нумеруются числами  $s_3, t_3$ .

Для написания  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантного волнового уравнения в классе I необходимо найти конкретную реализацию представления  $D^\pm(s, t)$ , т.е. найти явный вид операторов  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$ , определенных в том или ином гильбертовом пространстве векторов  $\Psi$ , реализующих представление  $D^\pm(s, t)$ . Заметим, что задача о написании даже  $\mathcal{P}(1, 3)$ -инвариантного уравнения для произвольного спина эффективно и изящно решается, только если найден явный вид генераторов  $\mathcal{P}(1, 3)$  в канонической форме Фолди–Широкова [9, 8]. Естественно поэтому и в нашем случае найти прежде всего канонический вид типа Фолди–Широкова для генераторов  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$ .

Используя методику работ [8, 9], можно показать, что канонический вид генераторов  $\mathcal{P}(1, 4)$  для представлений  $D^\pm(s, t)$  выглядит как

$$\begin{aligned} P_0 &= \varepsilon\omega \equiv \varepsilon\sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}, & P_k &= p_k, \\ J_{kl} &= x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \\ J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{\varepsilon}{2}(x_k \omega + \omega x_k) - \frac{\varepsilon S_{kl} p_l}{\omega + \varkappa}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $x_k p_l - x_l p_k \equiv M_{kl}$  — инфинитезимальные операторы вращений в плоскостях  $(k, l)$ , операторы  $x_k$  и  $p_k$  удовлетворяют соотношениям

$$[x_k, p_l] = i\delta_{kl}, \quad [x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0, \quad k, l = 1, 2, 3, 4 \quad (2.20)$$

(так что, например, в  $x$ -представлении  $p_k = -\partial_k \equiv -i\partial/\partial x_k$ ), а  $S_{kl}$  — моменты “внутренних” движений, реализующие матричное неприводимое представление  $D(s, t)$  размерности  $(2s + 1)(2t + 1)$  алгебры  $O_4$ , о котором говорилось выше. При этом имеется в виду, что операторы (2.10) определены в гильбертовом пространстве вектор-функций  $\Psi = \Psi(\vec{x}, x_4)$  (в  $x$ -представлении или  $\Psi = \Psi(\vec{p}, p_4)$   $p$ -представлении и т.п.) со скалярным произведением

$$\begin{aligned} (\Psi, \Psi') &\equiv \int d^3x dx_4 \Psi^*(\vec{x}, x_4) \Psi'(\vec{x}, x_4) \equiv \\ &\equiv \int d^3x dx_4 \sum_{s_3, t_3} \Psi^*(\vec{x}, x_4, s_3, t_3) \Psi'(\vec{x}, x_4, s_3, t_3), \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3)$  — компоненты вектора  $\Psi(\vec{x}, x_4)$ . Разумеется, все другие виды генераторов  $\mathcal{P}(1, 4)$  представления  $D^\pm(s, t)$  унитарно эквивалентны (2.19).

Теперь уже легко доказать, что  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантное (в смысле Фолди [9]) квантово-механическое уравнение для векторов  $\Psi$  как функции времени  $t \equiv x_0$ , реализующих представление  $D^\pm(s, t)$ , имеет вид:

$$i\partial_0 \Psi = H\Psi, \quad H = P_0 = \varepsilon\sqrt{\vec{p}^2 + p_4^2 + \varkappa^2}, \quad (2.22)$$

где  $\Psi$  —  $(2s+1)(2t+1)$ -компонентный вектор, компоненты которого нумеруются числами  $s_3, t_3$ , так что, например, в  $x$ -представлении вектор  $\Psi = \Psi(x) \equiv \Psi(x_0, \vec{x}, x_4)$ , а его компонентами суть  $\Psi(x_0, \vec{x}, x_4, s_3, t_3)$ .

Обратим внимание, что время  $t = x_0$  и динамические переменные  $\vec{x}$  и  $x_4$  входят в уравнение (2.22) несимметрично. Поэтому могло бы показаться, что уравнение (2.22) не инвариантно относительно неоднородной группы де Ситтера  $\mathcal{P}(1, 4)$ . На самом же деле это уравнение инвариантно относительно  $\mathcal{P}(1, 4)$  в более общем, чем это обычно принято, смысле, а именно: под инвариантностью в смысле Фолди понимается выполнение условия

$$[(i\partial_0 - H), Q]\Psi = 0, \quad (2.23)$$

где  $\Psi$  — любое решение уравнения (2.22), а  $Q$  — любой генератор из  $\mathcal{P}(1, 4)$ , или любая их линейная комбинация, т.е. любой элемент алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ . Можно проверить, что генераторы  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  в форме (2.19) действительно удовлетворяют условию (2.23), так что уравнение (2.22) действительно  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантно. Его

решения  $\Psi$  реализуют именно неприводимое (единственное с точностью до унитарной эквивалентности) представление  $D^\pm(s, t)$ , поскольку  $\Psi$  суть  $(2s+1)(2t+1)$ -компонентные векторы и согласно (2.22) для них  $P^2\Psi = \varkappa^2\Psi$  и  $\varepsilon\Psi = \pm\Psi$ .

Заметим, кстати, что если к операторам  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  добавить операторы типа отражений (что необходимо при рассмотрении теоремы типа СРТ в нашей схеме, которое здесь не приводится), то уравнение (2.22), вообще говоря, не будет реализовывать представления такой расширенной алгебры  $\tilde{\mathcal{P}}(1, 4)$ . Неприводимые представления алгебры  $\tilde{\mathcal{P}}(1, 4)$  строятся как прямые суммы неприводимых представлений  $D^\pm(s, t)$  алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ . Соответствующие уравнения, реализующие представления алгебры  $\tilde{\mathcal{P}}(1, 4)$  нетрудно выписать, имея явный вид (2.19) генераторов  $\mathcal{P}(1, 4)$  в неприводимых представлениях  $D^\pm(s, t)$ .

Приведем здесь два примера таких уравнений, представляющих физический интерес (см. § 5 и 6). Уравнение, реализующее представления  $D^+(s, t) \oplus D^-(s, t)$ , имеет вид:

$$i\partial_0\Psi = H\Psi \equiv \beta\sqrt{\vec{p}^2 + p_4^2 + \varkappa^2}\Psi, \quad \beta \equiv \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

а явный вид генераторов  $\mathcal{P}(1, 4)$  в этом представлении совпадает с (2.19), где заменено

$$\varepsilon \rightarrow \beta, \quad S_{kl} \rightarrow \begin{pmatrix} S_{kl} & 0 \\ 0 & S_{kl} \end{pmatrix}.$$

Уравнение, реализующее представление

$$D^+(s, t) \oplus D^+(t, s) \oplus D^-(s, t) \oplus D^-(t, s),$$

имеет вид:

$$i\partial_0\Psi = H\Psi \equiv B\sqrt{\vec{p}^2 + p_4^2 + \varkappa^2}\Psi, \quad B \equiv \begin{pmatrix} \hat{1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \hat{1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\hat{1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

где точки в матрице обозначают нули. В этом представлении явный вид генераторов  $\mathcal{P}(1, 4)$  совпадает с (2.19), где заменено  $\varepsilon \rightarrow B$ , а

$$S_{ab} \rightarrow \begin{pmatrix} S_{ab} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & S_{ab} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & S_{ab} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{ab} \end{pmatrix}, \quad S_{4a} \rightarrow \begin{pmatrix} S_{4a} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & S_{4a} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & S_{4a} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{4a} \end{pmatrix}.$$

Детальное обсуждение расширенной алгебры  $\tilde{\mathcal{P}}(1, 4)$  будет предметом специального рассмотрения.

### § 3 Физическая интерпретация.

В предыдущем параграфе были получены волновые уравнения класса I, инвариантные относительно вращения и трансляций в 5-мерном пространстве Минковского. Приведем здесь возможную физическую интерпретацию изложенной выше

математической схемы, позволяющую рассматривать эти уравнения как уравнения Шредингера для волновых функций.

В  $p$ -представлении компоненты волновой функция  $\Psi$  уравнения (2.22) являются функциями шести динамических переменных соответствующего полного набора:  $\Psi(x_0, \vec{p}, p_4, s_3, t_3)$ . Как обычно, они интерпретируются как амплитуды вероятностей получения, при измерении в данный момент времени  $t = x_0$ , указанных значений полного набора. Физический смысл операторов  $\vec{P}$  и  $P_4$  приведен во введении. Выясним теперь возможный физический смысл операторов  $S_3, T_3$ .

Операторы (2.17) удовлетворяют соотношениям

$$[S_a, S_b] = iS_c, \quad [T_a, T_b] = iT_c, \quad [S_a, \vec{S}^2] = [T_a, \vec{T}^2] = [S_a, T_b] = 0. \quad (3.1)$$

Отсюда и из (2.19) ясно, что 3-векторы  $\vec{S}$  и  $\vec{T}$  можно трактовать как операторы спина и изоспина, причем, поскольку  $\vec{S}$  и  $\vec{T}$  входят в нашей схеме на равных правах, их можно трактовать и как операторы изоспина и спина соответственно. Таким образом, принятое нами определение (1.1) оператора массы как независимой динамической переменной дало возможность динамически объединить “внешнюю” ( $\mathcal{P}(1, 3)$ ) и “внутреннюю” (изоспиновую  $SU(2)_T$ ) симметрии. Действительно, в обычном подходе в качестве объединяющей группы берется группа  $\mathcal{P}(1, 3) \otimes SU(2)_T$ , так что генераторы  $SU(2)_T$  коммутируют с генераторами  $\mathcal{P}(1, 3)$  (даже при наличии взаимодействия). В нашем случае  $SU(2)_T \subset O_4 \subset \mathcal{P}(1, 4)$ , точно так же, как и  $SU(2)_S \subset O_4 \subset \mathcal{P}(1, 4)$ , т.е. здесь генераторы  $SU(2)_T$ , как и  $SU(2)_S$ , не коммутируют с генераторами  $\mathcal{P}(1, 3) \subset \mathcal{P}(1, 4)$ . Таким образом, изоспин, как и спин, действительно входит в  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантную теорию динамически.

Как было показано выше, уравнение (2.22) реализует неприводимое представление  $D^\pm(s, t)$  алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ , т.е. описывает “элементарную” относительно  $\mathcal{P}(1, 4)$  “частицу” (при  $\varepsilon = +1$  или “античастицу” при  $\varepsilon = -1$ ) с данными значениями спина  $s$ , изоспина  $t$  и параметра  $\varkappa$ . Простейшие состояния этой “частицы” задаются собственными значениями полного набора коммутирующих переменных. Ясно, что неприводимое относительно  $\mathcal{P}(1, 4)$  представление  $D^\pm(s, t)$  приводимо относительно  $\mathcal{P}(1, 3)$ , поэтому определенная здесь “элементарная частица” неэлементарна в обычном понимании (т.е. относительно  $\mathcal{P}(1, 3)$ ). Действительно, решение  $\Psi$  уравнения (2.22) с данными  $s$  и  $t$  содержит компоненты, нумеруемые не только проекцией спина  $s_3$ , но и проекцией изоспина  $t_3$ , так что фактически  $\Psi$  описывает целый мультиплет — набор состояний с различными значениями как  $t_3$ , так и  $s_3$ . Например, при  $\varepsilon = \pm 1, s = 0, t = 1/2$  векторы  $\Psi^\pm$  описывают мезонные изодублеты типа

$$\Psi^+ \equiv \begin{pmatrix} \Psi_{0,1/2}^+ \\ \Psi_{0,-1/2}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad \Psi^- = \begin{pmatrix} \tilde{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}.$$

Параметр  $\varkappa$ , являющийся пороговым значением свободной энергии  $E = \omega$  и одинаковый для всех членов данного мультиплета, можно понимать как “затравочную” массу покоя мультиплета. Конечно, введение подходящего взаимодействия в уравнение (2.22) приведет к определенному расщеплению масс членов мультиплета.

Напомним, что изоспин принято обычно связывать с зарядом. Поскольку он входит в схему  $\mathcal{P}(1, 4)$  динамически (как и спин), эту схему в данной интерпретации можно, по-видимому, рассматривать как некоторую реализацию идеи объединения общей теории относительности с теорией электромеханизма, феноменологическую в том смысле, что 5-пространство в нашем случае является плоским.

Предлагаемый подход может оказаться плодотворным для последовательного описания нестабильных систем (резонансов, частиц с нефиксированной массой) уже в рамках квантовой механики<sup>4</sup>. Известно, что при квантовомеханическом описании нестабильных систем приходится (см. например, [10] гл. 5) искать комплексные собственные значения оператора энергии, обязанного быть эрмитовым в гильбертовом пространстве волновых функций, т.е. фактически выходить за рамки гильбертова пространства, что влечет за собой нарушение таких основных принципов, как унитарность, эрмитовость и т.п. [11].

Подобные трудности отсутствуют в предлагаемом квантовомеханическом подходе. Действительно, здесь оператор массы фигурирует как независимая динамическая переменная, он эрмитов, определен в гильбертовом пространстве, поэтому можно искать его собственные значения  $m^2$ , распределения  $\rho(m^2)$  в том же гильбертовом пространстве точно так же, как ищутся собственные значения и распределения для операторов энергии, импульса и других динамических переменных. Например, если известна стационарная волновая функция  $\Psi = \{\Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3)\}$ , вообще говоря, нестабильного мультиплета (имеется в виду: решение уравнения типа (2.22) о не зависящим от времени  $x_0$  взаимодействием), то

$$\rho(m^2, s_3, t_3) = \int d^3x \left| \int dx_4 e^{-i\sqrt{m^2 - \kappa^2}x_4} \Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3) \right|^2. \quad (3.2)$$

Если кривая (3.2) с данными  $s_3, t_3$  имеет один максимум, то экспериментально наблюдаемая масса частицы с данными  $s_3, t_3$  определяется либо точкой максимума, либо из

$$\bar{m}^2 = \int d^3x dx_4 \Psi^*(\vec{x}, x_4, s_3, t_3) (p_4^2 + \kappa^2) \Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3), \quad (3.3)$$

а ее среднее время жизни  $\tau$  — из соотношения

$$\frac{\bar{m}^2}{m^2} \bar{\tau}^2 = 1. \quad (3.4)$$

Если же кривая (3.2) имеет несколько максимумов, то точки этих максимумов соответствуют экспериментально наблюдаемым массам нестабильных частиц, а их времена жизни определяются по полуширине кривой (3.2) в области соответствующих максимумов. Наконец, если  $\rho(m^2, s_3, t_3)$  содержит  $\delta$ -образную особенность в точке  $m^2 = m_0^2$ , то  $m_0$  отождествляется с массой стабильной частицы.

Важно отметить, что согласно принятой интерпретации реально наблюдаемые “свободные” частицы, как стабильные, так и нестабильные, описываются не свободным уравнением (2.22), а уравнением типа (2.22) с подходящим взаимодействием, нарушающим  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантность, но, конечно, сохраняющим  $\mathcal{P}(1, 3)$ -инвариантность<sup>5</sup>. Что касается решений свободного уравнения (2.22), то они описывают гипотетические (“голые”) состояния, которые могут и не соответствовать

<sup>4</sup>Очевидно, строгое рассмотрение подобных задач требует квантовополевого подхода, а квантовомеханический подход можно рассматривать лишь как полуфеноменологический.

<sup>5</sup>В этом смысле приведенное здесь рассмотрение  $\mathcal{P}(1, 4)$ -симметрии является лишь базой для подходящего нарушения ее — аналогично рассмотрению и нарушению  $SU(n)$ -симметрий.

никаким реальным частицам. С точки зрения такой интерпретации существуют два типа взаимодействий: взаимодействие, обуславливающее “облачение” частиц, присущее даже асимптотическим состояниям, и обычное взаимодействие, ответственное за рассеяния реальных (“облаченных”) частиц. Поэтому, в частности, 5-мерный закон сохранения, вытекающий из свободной  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантной схемы, может и не иметь реального смысла.

Подчеркнем, что приведенная здесь интерпретация схемы  $\mathcal{P}(1, 4)$  и, в частности, упомянутого выше полного набора коммутирующих переменных базировалась, главным образом, на определении оператора переменной массы как независимой динамической переменной. Эта интерпретация, однако, не претендует на единственность и законченность. В частности, вопрос о придании “пятой координате”  $x_4$  более непосредственного физического смысла, чем тот, который заложен в ее определении как динамической переменной, канонически сопряженной к массовой переменной  $P_4$ , а также операторам типа  $J_{04}$ ,  $J_{a4}$ ,  $a = 1, 2, 3$  здесь не обсуждается. Более подробное обсуждение вопросов интерпретации возможно только в связи с решением уравнений типа (2.22) с подходящими взаимодействиями, что не является предметом данной работы.

#### § 4. Волновые уравнения в других классах.

Рассмотрим теперь кратко другие классы представлений алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ . Для класса II (где  $P^2 = 0$ ,  $P \neq 0$ ) в допустимой здесь системе  $p_1 = p_2 = p_4 = 0$  тензор (2.6) выглядит как

$$(w_{\mu\nu}) = -P_3 \begin{pmatrix} \begin{array}{c|cc|c} (01) & (02) & (03) & (04) \\ \hline J_{42} & J_{14} & 0 & J_{21} \\ \hline & (12) & (13) & (14) \\ J_{04} + \varepsilon J_{43} & \varepsilon J_{24} & J_{20} + \varepsilon J_{32} & \\ \hline & & (23) & (24) \\ \varepsilon J_{41} & J_{04} + \varepsilon J_{13} & & \\ \hline & & & (34) \\ & & & \varepsilon J_{21} \end{array} \end{pmatrix}, \quad (4.1a)$$

где  $\varepsilon = P_0/P_3$ , а цифры в скобках указывают, чему равны соответствующие компоненты тензора  $w_{\mu\nu}$ . Например, символ  $J_{42}^{(01)}$  означает, что  $w_{01} = -P_3 J_{42}$ . Как видно из (4.1a) тензор  $w_{\mu\nu}$  имеет только шесть ненулевых компонентов, которые полезно записать в виде:

$$(w_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} w_{40} & w_{01} & w_{14} \\ & w_{02} & w_{24} \\ & & w_{12} \end{pmatrix} = -P_3 \begin{pmatrix} J'_{12} & J'_{13} & P'_1 \\ & J'_{23} & P'_2 \\ & & P'_3 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

где

$$\vec{L}' \equiv (J'_{23}, J'_{31}, J'_{12}) \equiv (J_{14}, J_{24}, J_{12}), \quad (4.2a)$$

$$P'_1 \equiv J_{20} + \varepsilon J_{32}, \quad P'_2 \equiv J_{01} + \varepsilon J_{13}, \quad P'_3 \equiv J_{04} + \varepsilon J_{43}. \quad (4.26)$$

Инварианты  $V$  и  $W$  в этой системе имеют вид:

$$V = -J_{14}w_{14} - J_{24}w_{24} - J_{12}w_{12} = P_3 V', \quad (4.3)$$

$$W = w_{14}^2 + w_{24}^2 + w_{12}^2 = P_3 W', \quad (4.4)$$

где

$$V' \equiv \vec{L}' \vec{P}', \quad W' \vec{P}'^2. \quad (4.5)$$

Используя (2.1), можно показать, что операторы (4.2) удовлетворяют соотношениям

$$[P'_a, P'_b] = 0, \quad i [P'_a, J'_{bc}] = \delta_{ab} P'_c - \delta_{ac} P'_b, \quad (4.6a)$$

$$i [J'_{ab}, J'_{cd}] = \delta_{ad} J'_{bc} + \delta_{bc} J'_{ad} - \delta_{ac} J'_{bd} - \delta_{bd} J'_{ac}. \quad (4.6b)$$

Отсюда видно, что операторы  $P'_a$  и  $J'_{ab}$  являются генераторами алгебры  $\mathcal{P}(3)$ , порожденной группой трансляций и вращения в трехмерном евклидовом пространстве. Инвариантами этой алгебры, как можно убедиться, являются генераторы (4.5). Согласно (4.3), (4.4), инварианты  $V$  и  $W$  алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  в этом случае совпадают (с точностью до множителя  $P_3$ ) с инвариантами алгебры  $\mathcal{P}(3)$ . Поэтому классификация неприводимых представлений алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  в классе II по существу сводится к классификации неприводимых представлений алгебры  $\mathcal{P}(3)$ . Не будем здесь останавливаться более подробно на этом случае, поскольку, как видно из (4.6) и (4.4), инварианты  $W'$  и  $W$  имеют непрерывный спектр, которому, очевидно, трудно придать приемлемый физический смысл. Рассмотрим ниже только случай  $W = 0$ .

В случае  $W = 0$  (при произвольных  $P_3$  и  $J'_{ab}$ ), согласно (4.4) и (4.5),  $P'_a = 0$ , поэтому и инвариант  $V = 0$ . Как видно из (4.1б), тензор  $w'_{\mu\nu} \equiv w_{\mu\nu}/P_3$  имеет теперь только три отличные от нуля компоненты, совпадающие с операторами  $J'_{ab}$ . Поэтому алгебра  $\mathcal{P}(1, 4)$  имеет в этом случае дополнительный инвариант

$$W'' = \frac{1}{2} J'_{ab}{}^2. \quad (4.7)$$

Согласно (4.6б) этот инвариант является инвариантом алгебры  $O_3$ :

$$W'' = s(s+1)\hat{1},$$

где  $\hat{1}$  —  $(2s+1)$ -мерная единичная матрица, а возможные значения  $s$  суть  $s = 0, 1/2, 1, \dots$ . Следовательно, классификация неприводимых представлений алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  по существу сводится здесь к классификации неприводимых представлений  $D(s)$  алгебры  $O_3$ .

Таким образом, в случае  $P^2 = 0$ ,  $W = V = 0$ ,  $P \neq 0$  все неприводимые представления  $D^\pm(s)$  группы  $\mathcal{P}(1, 4)$  унитарны, конечномерны (именно:  $(2s+1)$ -мерны) и идентифицируются знаком энергии  $\varepsilon = \pm 1$  и числом  $s$ .

Явный вид генераторов алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  для этого случая, как можно убедиться, формально совпадает с (2.19) при  $\varkappa = 0$ , но при этом  $S_{kl}$  реализуют представление  $D(s, 0)$  при  $\varepsilon = +1$  и  $D(0, s = t)$  при  $\varepsilon = -1$ ; либо  $D(0, s = t)$  при  $\varepsilon = +1$  и  $D(s, 0)$  при  $\varepsilon = -1$  алгебры  $O_4$ , т.е.  $S_{4a} = \pm \varepsilon S_{bc}$ , где  $S_{ab}$  —  $(2s+1)$ -мерные матрицы, реализующие соответствующие неприводимые представления алгебры  $O_3$ . Генераторы  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  в этом случае реализуют представление  $D^+(s, 0) = D^+(s)$  и  $D^-(0, t = s) = D^-(s)$  при  $S_{4a} = +\varepsilon S_{bc}$  или  $D^+(0, t = s) = D^+(s)$  и  $D^-(s, 0)$  при

$S_{4a} = -\varepsilon S_{bc}$ . Отсюда ясно, что число  $s$  можно отождествить либо со спином, либо с изоспином.

Таким образом, неприводимому представлению класса II для  $W = 0$  в отличие от класса I, можно сопоставить либо элементарную частицу (с переменной массой  $m = \sqrt{p_4^2}$ ), имеющую спин  $s$ , но не имеющую изоспина, либо элементарную частицу, имеющую изоспин  $t = s$ , но не имеющую спина.

$\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантное уравнение для волновой функции такой частицы (или античастицы) имеет вид:

$$i\partial_0\Psi = H\Psi, \quad H = \varepsilon\sqrt{p_k^2} \equiv \varepsilon\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (4.8)$$

где  $\Psi = \Psi(x) \equiv \Psi(x_0, \vec{x}, x_4) - (2s+1)$ -компонентная величина, компоненты которой  $\Psi(x_0, \vec{x}, x_4, s_3)$  нумеруются индексом  $s_3$ ,  $-s \leq s_3 \leq s$ .

Рассмотрим далее представления класса III, когда  $P^2 = -\eta^2 < 0$ . В допустимой здесь системе  $P_0 = \vec{P} = 0$  (в которой  $P_4 = \pm\eta$ ) тензор (2.6) имеет только шесть ненулевых компонент и выглядит как

$$(w_{\mu\nu}) = \mp\eta \begin{pmatrix} (01) & (02) & (03) \\ \hline J_{23} & J_{31} & J_{12} \\ & (12) & (13) \\ & \hline & J_{30} & J_{02} \\ & & (23) \\ & & \hline & & J_{10} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

Инварианты  $V$  и  $W$  имеют здесь вид:

$$V = -J_{01}w_{23} - J_{02}w_{31} - J_{03}w_{12} = \pm\eta\vec{L}\vec{N}, \quad (4.10)$$

$$W = -w_{01}^2 - w_{02}^2 - w_{03}^2 + w_{12}^2 + w_{13}^2 + w_{23}^2 = \eta^2(\vec{N}^2 - \vec{L}^2), \quad (4.11)$$

где

$$\vec{L} \equiv (J_{23}, J_{31}, J_{12}), \quad \vec{N} \equiv (J_{01}, J_{02}, J_{03}).$$

Как видно из (4.9) и (2.16), ненулевые компоненты тензора  $w'_{\mu\nu} \equiv \mp\eta^{-1}w_{\mu\nu}$  удовлетворяют алгебре  $O(1, 3)$  однородной группы Лоренца. Инвариантами этой алгебры, как известно, являются операторы

$$\vec{L}\vec{N} \quad \text{и} \quad \vec{N}^2 - \vec{L}^2. \quad (4.12)$$

Согласно (4.10), (4.11) эти операторы совпадают (с точностью до постоянных множителей) с инвариантами алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ . Поэтому классификация неприводимых представлений алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  сводится к классификации неприводимых представлений алгебры  $O(1, 3)$ . Все представления этой алгебры полностью изучены Гельфандом и Наймарком [12].

Напомним, что в пространстве, где реализуются неприводимые представления алгебры  $O(1, 3)$ , операторы (4.12) имеют спектр

$$\vec{L}\vec{N} = i l_0 l_1 \hat{1}, \quad \vec{N}^2 - \vec{L}^2 = -(l_0^2 + l_1^2 - 1) \hat{1}, \quad (4.13)$$

где  $\hat{1}$  — единичный оператор, а  $l_0 = 0, 1/2, 1, \dots$ ,  $l_1$  — любое число. Отсюда ясно, что в пространстве, где реализуются неприводимые представления алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ ,

$$V = \pm i\eta l_0 l_1 \hat{1}, \quad W = -\eta^2 (l_0^2 + l_1^2 - 1) \hat{1}. \quad (4.14)$$

В этом классе группа  $\mathcal{P}(1, 4)$ , как и группа  $O(1, 3)$ , имеет унитарные и неунитарные представления, в зависимости от значений чисел  $l_0, l_1$ . Причем все унитарные неприводимые представления группы  $\mathcal{P}(1, 4)$  бесконечномерны и идентифицируются числами  $\eta, l_0$  и  $l_1$ , где  $\eta$  — любое действительное число,  $-1 \leq l_1 \leq 1$  при  $l_0 = 0$  и  $l_1$  — чисто мнимое при  $l_0 = 1/2, 1, \dots$ . Представления, соответствующие всем другим значениям чисел  $l_0$  и  $l_1$ , неунитарны; среди них имеются как конечномерные, так и бесконечномерные. В соответствии с этим  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантные волновые уравнения с конечным числом компонент (конечнокомпонентные уравнения) реализуют только неунитарные представления алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ . Унитарные же представления в этом классе могут реализоваться лишь бесконечнокомпонентными уравнениями.

Отметим здесь то любопытное обстоятельство, что все представления однородной группы Лоренца  $O(1, 3)$  связаны не с представлениями общепринятой группы релятивистской симметрии — группы Пуанкаре  $\mathcal{P}(1, 3)$ , а с представлениями именно неоднородной группы де Ситтера  $\mathcal{P}(1, 4)$  в 5-пространстве Минковского.

$\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантные волновые уравнения в этом классе имеют вид:

$$\left( i\partial_0 \mp \eta \sqrt{p_k^2 - \eta^2} \right) \Psi^{(l_0, l_1)}(x_0, \vec{x}, x_4, l, l_3) = 0, \quad (4.15)$$

где  $l - l_0 = 0, 1, 2, \dots$ ,  $-1 \leq l_3 \leq l$ . Они конечнокомпонентны или бесконечнокомпонентны в зависимости от значений чисел  $l_0$  и  $l_1$ . Доказательства того, что уравнения (4.8), (4.15)  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантны и реализуют соответствующие неприводимые представления, проводятся аналогично доказательствам, приведенным в связи с уравнением (2.22).

Обратим внимание, что если мы намерены решениям  $\Psi$  уравнения (4.15) придавать физический смысл волновой функции — амплитуды соответствующей вероятности — то числа  $l_0$  и  $l_1$  должны быть такими, чтобы  $\Psi$  реализовали унитарные представления, которые, как отмечалось выше, бесконечномерны, а  $\Psi$  — бесконечнокомпонентны. В последнее время бесконечнокомпонентные уравнения интенсивно обсуждаются [13], хотя и без достаточно обоснованных аргументов в пользу их написания. В нашем же случае бесконечнокомпонентные уравнения являются неперменным следствием принятой группы симметрии. Правда, физический смысл величин  $\eta, l_0, l_1, l, l_3$  не столь ясен, как величин, фигурирующих в волновых функциях уравнений класса I и II. Следуя авторам [13], можно было бы пытаться придать какой-то физический смысл этим величинам. Однако случаи I и II имеют более непосредственное отношение к проблемам спектра масс и нестабильных систем, чем случай III.

Для полноты отметим, что в случае IV, когда  $P_0 = \vec{P} = P_4 = 0$ , имеем  $V = W = 0$ . Алгебра  $\mathcal{P}(1, 4)$  в этом случае редуцируется к алгебре  $O(1, 4)$  однородной группы де Ситтера, все представления которой известны (см., например, [14]), а соответствующие уравнения выписаны в [1].

Приведенные здесь квантовомеханические уравнения Шредингера–Фолди удобны для перехода к квазирелятивистскому приближению при учете изоспиновых

и спиновых эффектов (при введении, конечно, подходящего взаимодействия). При теоретикопольевых рассмотрениях обычно исходят из уравнений первого порядка по  $\partial_\mu$ . Такие уравнения, как показано в последующих параграфах, можно получить из выписанных в § 2 и § 4 уравнений унитарным преобразованием типа Фолди–Вотхойзена. Построение же квантовой теории поля на базе линейных по  $\partial_\mu$  уравнений и введение взаимодействий в рамках лагранжева формализма проводится в полной аналогии с обычной  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантной теорией. В заключение этого параграфа заметим, что все приведенные здесь результаты для  $\mathcal{P}(1, 4)$  без принципиальных затруднений обобщаются (исключая, конечно, вопросы интерпретации) и на группу  $\mathcal{P}(1, n)$  трансляций и вращений в  $(1 + n)$ -мерном пространстве Минковского.

### § 5. Уравнения типа Дирака

Рассмотрим простейшее уравнение, явно инвариантное относительно группы  $\mathcal{P}(1, 4)$ . Напомним, что имеется пять матриц Дирака  $\gamma_\mu$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (5.1)$$

где  $\gamma_0$  — эрмитова, а  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  — антиэрмитовы, причем

$$\gamma_0 \equiv \beta = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \quad (\text{или} \quad \gamma_4 = -\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3). \quad (5.2)$$

Уравнение Дирака в 5-пространстве Минковского имеет вид:

$$(i\gamma_\mu \delta_\mu - \varkappa)\Psi \equiv (i\gamma_0 \partial_0 + i\gamma_k \partial_k - \varkappa)\Psi = 0 \quad (5.3a)$$

или

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu + \varkappa)\Psi = 0. \quad (5.3b)$$

Уравнение (5.3) было выписано еще Дираком. Наша цель — выяснить, какое представление алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  реализует совокупность решений  $\Psi$  уравнения (5.3). При этом мы будем следовать не традиционной методике, которой обычно пользуется (см., например, [12]) и которая фактически выясняет вопрос о реализации уравнением Дирака в 4-пространстве Минковского представления не группы Пуанкаре  $\mathcal{P}(1, 3)$ , а лишь однородной группы Лоренца  $O(1, 3)$ . Заметим, кстати, что поскольку исходной группой инвариантности является именно  $\mathcal{P}(1, 3)$  (в нашем случае  $\mathcal{P}(1, 4)$ ), а не  $O(1, 3)$  ( $O(1, 4)$ ), необходимо с самого начала ставить и решать вопрос о реализации решениями того или иного уравнения представления группы  $\mathcal{P}(1, 3)$  ( $\mathcal{P}(1, 4)$ ), а не  $O(1, 3)$  ( $O(1, 4)$ ).

Здесь мы пользуемся методикой, пригодной для анализа как уравнения Дирака, так и других волновых уравнений (линейных нелинейных по  $\partial_\mu$ ), причем в произвольном  $(1 + n)$ -мерном пространстве Минковского. Она основана на математически строгом определении (2.23) понятия инвариантности волнового уравнения. Из определения (2.23) ясно, что для решения вопроса об инвариантности волнового уравнения относительно группы  $\mathcal{P}(1, n)$  необходимо найти явный вид генераторов  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  алгебры  $\mathcal{P}(1, n)$ , связанный с данным уравнением тем, что его гамильтониан  $H$  и оператор  $i\partial_0 \equiv i\partial/\partial t$  должны коммутировать с генераторами  $P_k$ ,  $J_{\mu\nu}$  как генератор  $P_0$ . Далее, зная явный вид генераторов, можно найти в

явном виде инварианты алгебры  $\mathcal{P}(1, n)$  и тем самым решить вопрос о том, какое именно представление этой алгебры реализует решения данного уравнения.

Проиллюстрируем эту методику на примере уравнения (5.3).

Запишем уравнение (5.3а) в гамильтоновой форме

$$i\partial_0\Psi = H\Psi, \quad H \equiv \alpha p_k + \beta \varkappa, \quad \alpha_k = \gamma_0\gamma_k. \quad (5.3a')$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что явный вид генераторов  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$ , удовлетворяющих соотношениям (2.1), в данном случае выглядит как

$$\begin{aligned} P_0 &= H \equiv \alpha_k p_k + \beta \varkappa, & P_k &= p_k \equiv -ip_k, \\ J_{kl} &= x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \\ J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k P_0 + P_0 x_k), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$S_{kl} \equiv \frac{i}{4}(\gamma_k \gamma_l - \gamma_l \gamma_k). \quad (5.5)$$

Заметим, что “орбитальные” и спин-изоспиновые моменты  $M_{kl}$  и  $S_{kl}$  в отдельности не коммутируют с  $H$ . Это, однако, не означает, что в свободной теории, основанной на уравнении (5.3), они не сохраняются. Это лишь означает, что в представлении Дирака (5.4) переменные  $\vec{x}$ ,  $x_4$ , от которых зависит волновая функция  $\Psi$ , нельзя трактовать как соответствующие координаты; адекватная интерпретация волновой функции возможна только в представлении Фолди–Широкова (см. § 2), где, как видно из (2.19), “орбитальные” и спин-изоспиновые моменты в отдельности коммутируют с гамильтонианом. Как известно (см., например, [15]), аналогичная ситуация с уравнением Дирака имеет место и в  $\mathcal{P}(1, 3)$ : сохраняющиеся при отсутствии взаимодействия каждый в отдельности орбитальный  $M_{ab}$  и спиновый  $S_{ab}$  моменты коммутируют с гамильтонианом только в представлении Фолди–Широкова, но не в представлении Дирака.

Имея явный вид (5.4) генераторов  $\mathcal{P}(1, 4)$ , можно проверить, что условие (2,23) выполняется, т.е. уравнение (5.3) действительно  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантно. Для конкретности дальнейших рассуждений удобно выбрать  $\gamma_\mu$  в виде:

$$\gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

где  $1$  — двумерная единичная матрица,  $\sigma_a$  — матрицы Паули, взятые в виде:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда операторы (2.17) спина и изоспина для частицы, описываемой уравнением (5.3), имеют вид

$$S_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

а их квадраты, совпадающие с инвариантами (2.18), имеют вид:

$$\vec{S}^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{T}^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Далее, инвариант  $P^2 = \varkappa$ , а инвариант — знак энергии  $\varepsilon$  совпадает (в системе  $p_k = 0$ ) с матрицей  $\beta$ .

Из формул для  $\vec{S}^2$ ,  $\vec{T}^2$ ,  $S_3$ ,  $T_3$  и  $\varepsilon = \beta$  видно, что совокупность решений уравнения (5.3а) реализует четырехмерное приводимое представление  $D^+(1/2, 0) \oplus D^-(0, 1/2)$  алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ . Таким образом, в соответствии с интерпретацией чисел  $s$  и  $t$ , уравнение Дирака (5.3а) описывает мультиплет типа

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{1/2,0}^+ \\ \Psi_{0,1/2}^- \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

где  $\Psi_{1/2,0}^+$  — спинор-изоскаляр, описывающий фермион со спином  $s = 1/2$  и изоспином  $t = 0$  (частицу типа  $\Lambda$  — гиперон), а  $\Psi_{0,1/2}^-$  — скаляр-изоспинор, описывающие антибозон с  $s = 0$  и  $t = 1/2$  (античастицу типа  $\tilde{K}$  — мезон)<sup>6</sup>.

Аналогично можно показать, что уравнение (5.3б) реализует представление  $D^-(1/2, 0) \oplus D^+(0, 1/2)$  алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ , т.е. описывает частицу типа  $K$  и античастицу типа  $\Lambda$ . Явный вид генераторов  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  в этом случае получается из (5.4) заменой  $\varkappa \rightarrow -\varkappa$  или  $\beta \rightarrow -\beta$ .

Итак, в отличие от уравнения Дирака в схеме  $\mathcal{P}(1, 3)$ , уравнение Дирака (5.3) в схеме  $\mathcal{P}(1, 4)$  не описывает симметричным образом частицы и античастицы, а значит, не будет инвариантным относительно преобразований типа  $CPT$ . Из анализа уравнений (5.3а) и (5.3б) видно, что в схеме  $\mathcal{P}(1, 4)$  уравнение, описывающее частицы и античастицы симметрично, должно реализовать представление

$$D^+\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D^+\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus D^-\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D^-\left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (5.10)$$

Оказывается, что такое уравнение имеет вид:

$$(i\Gamma_\mu \partial_\mu - \varkappa)\Psi \equiv (i\Gamma_0 \partial_0 + i\Gamma_k \partial_k - \varkappa)\Psi = 0, \quad (5.11)$$

где  $8 \times 8$ -матрицы  $\Gamma_\mu$  суть

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Явный вид генераторов  $\mathcal{P}(1, 4)$  для (5.11) выгладит как

$$\begin{aligned} P_0 &= \mathcal{H} \equiv \Gamma_0 \Gamma_k p_k + \Gamma_0 \varkappa, & P_k &= p_k, \\ J_{kl} &= M_{kl} + S_{kl}, \\ J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k P_0 + P_0 x_k), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где

$$S_{kl} \equiv \frac{i}{4}(\Gamma_k \Gamma_l - \Gamma_l \Gamma_k) = \begin{pmatrix} S_{kl} & 0 \\ 0 & S_{kl} \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

<sup>6</sup>Заметим, кстати, что более содержательно было бы назвать бозон типа  $K$  не изодублетом, а спиносинглет-изодублетом, а фермион типа  $\Lambda$  — спиnodублет-изосинглетом.

Из явного вида соответствующих  $8 \times 8$ -матриц  $\vec{S}^2$ ,  $\vec{T}^2$ ,  $S_3$ ,  $T_3$  и  $\varepsilon = \Gamma_0$  видно, что уравнение (5.11) действительно реализует представление (5.10), т.е., что волновая функция  $\Psi$  (восьмикомпонентный спинор) имеет вид:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{1/2,0}^+ \\ \Psi_{0,1/2}^+ \\ \Psi_{1/2,0}^- \\ \Psi_{0,1/2}^- \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Восьмикомпонентное уравнение (5.11) является объединением четырехкомпонентных уравнений (5.3а) и (5.3б). Действительно, беря  $\Gamma'_\mu = Q\Gamma_\mu Q^+$ , где

$$Q \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \gamma_0 & 1 - \gamma_0 \\ 1 - \gamma_0 & 1 + \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

получим

$$\Gamma'_k = \begin{pmatrix} \gamma_k & 0 \\ 0 & \gamma_k \end{pmatrix}, \quad \Gamma'_0 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix}, \quad \Psi' = \begin{pmatrix} \Psi_{1/2,0}^+ \\ \Psi_{0,1/2}^- \\ \Psi_{1/2,0}^- \\ \Psi_{0,1/2}^+ \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Заметим, что подобное объединение уравнений Дирака в схеме  $\mathcal{P}(1,3)$  тривиально: восьмикомпонентное уравнение с матрицами  $\Gamma_a$ ,  $\Gamma_0$  (или  $\Gamma'_a$ ,  $\Gamma'_0$ ), как и уравнение с

$$\Gamma''_a = \begin{pmatrix} \gamma_a & 0 \\ 0 & \gamma_a \end{pmatrix}, \quad \Gamma''_0 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_0 \end{pmatrix},$$

реализует представление  $2[D^+(1/2) \oplus D^-(1/2)]$  алгебры  $\mathcal{P}(1,3)$ .

Волновая функция уравнения (5.11) (или даже (5.3)) описывает непривычные мультиплеты: она объединяет в один мультиплет фермионы и бозоны. Например,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Lambda \\ K \\ \tilde{\Lambda} \\ \tilde{K} \end{pmatrix}.$$

Это, конечно не означает, что уравнение (5.11) неудовлетворительно с точки зрения, например, закона сохранения барионного числа. Последний лишь накладывает ограничения на возможные виды взаимодействий.

Как отмечалось выше, для адекватной физической интерпретации волновой функции  $\Psi$  как функции координат  $\vec{x}$ ,  $x_4$  необходимо перейти от представления Дирака к представлению Фолди. Этот переход осуществляется в помощью унитарного преобразования

$$U = \exp\left(-i \frac{A_k p_k}{2p} \operatorname{arctg} \frac{p}{\varkappa}\right), \quad p \equiv \sqrt{p_k^2}, \quad (5.18)$$

где

$$A_k = \begin{cases} i\gamma_k, & \text{для уравнения (5.3)} \\ i\Gamma_k, & \text{для уравнения (5.11)}. \end{cases} \quad (5.19)$$

В представлении Фолди уравнения (5.3), (5.11) имеют вид:

$$i\partial_0\Psi = B\sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}\Psi, \quad (5.20)$$

где  $B = \gamma_0, -\gamma_0, \Gamma_0$  для уравнений (5.3а), (5.3б), (5.11) соответственно. Явные виды (5.4), (5.13) генераторов  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  переходят при этом преобразовании в (2.19), где нужно положить  $\varepsilon = \gamma_0, -\gamma_0, \Gamma_0$  для случаев (5.3а), (5.3б), (5.11) соответственно, а операторы  $S_{kl}$  задаются формулами (5.5) и (5.14) для уравнение (5.3) и (5.11) соответственно.

### § 6. Уравнение типа Кеммера-Дэффина

Рассмотрим теперь аналог уравнений, описывающих в схеме  $\mathcal{P}(1, 4)$  бозоны со спином 0 и 1, а именно, уравнения в 5-пространстве Минковского вида

$$(\beta_\mu\partial_\mu + \varkappa)\varphi \equiv (\beta_k\partial_k + \beta_5\partial_5 + \varkappa)\varphi = 0, \quad (6.1)$$

где  $\partial_5 \equiv i\partial/\partial x_5 \equiv -i\partial/\partial t \equiv -i\partial_t$ , а пять эрмитовых матриц  $\beta_\mu$  удовлетворяют алгебре Кеммера-Дэффина-Петье (КДП):

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\lambda + \delta_{\lambda\nu}\beta_\mu, \quad \mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (6.2)$$

Наинизшее представление алгебры (6.2) реализуется  $6 \times 6$ -матрицами вида

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & \beta_2 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ \beta_3 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, & \beta_4 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \\ \beta_5 &= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где точки обозначают нули. Удобно записать (6.3) схематически в виде табл. 1. В этой таблице указано, какие элементы матриц равны единице (все остальные равны нулю). Для сравнения напомним, что наинизшее представление алгебры КДП в  $\mathcal{P}(1, 3)$  (т.е. для  $\mu \leq 4$ ) реализуется четырьмя  $5 \times 5$ -матрицами.

Таблица 1

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5

С помощью изложенной в § 5 методики можно показать, что уравнение (6.1) с матрицами (6.3) реализует представление

$$D^+(0, 0) \oplus D^-(0, 0) \oplus D(1/2, 1/2), \quad (6.4)$$

где по первым двум слагаемым преобразуются “существенные” (essential) компоненты вектора  $\varphi$ , на которых оператор энергии отличен от нуля, а по остальным двум — “лишние” (redundant) компоненты вектора  $\varphi$ , на которых оператор энергии равен нулю. Последние не имеют физического смысла, но, как и в  $\mathcal{P}(1, 3)$ , они возникают во всех линейных по  $\partial_\mu$  уравнениях, за исключением уравнений типа Дирака. Преобразование Фолди в таких случаях не только разделяет состояния по знаку энергии, но и дает возможность инвариантным способом отбросить лишние компоненты.

Таким образом, уравнение (5.1) с матрицами (6.3), которое является линейризованным уравнением Клейна–Гордона в 5-пространстве Минковского, описывает частицы с  $s = t = 0$ .

Остановимся более детально на весьма интересном случае — уравнении (6.1) с  $15 \times 15$ -матрицами  $\beta_\mu$ , реализующими алгебру (6.2). Эти матрицы можно выбрать, например, в виде, схематически записанном в табл. 2, где указаны лишь отличные от нуля элементы матриц  $\beta_\mu$ , равные  $\pm 1$ .

Таблица 2

$\beta_1$		$\beta_2$		$\beta_3$		$\beta_4$		$\beta_5$	
4, 15	15, 4	3, 15	15, 3	2, 15	5, 12	1, 15	15, 1	1, 14	14, 1
7, 14	14, 7	6, 14	14, 6	5, 14	14, 5	-5, 13	-13, 5	-2, 13	-13, 2
9, 13	13, 9	8, 13	13, 8	-8, 12	-12, 8	-6, 12	-12, 6	-3, 12	-12, 3
10, 12	12, 10	-10, 11	-11, 10	-9, 11	-11, 9	-7, 11	-11, 7	-4, 11	-11, 4

Выясним теперь, какое представление реализует совокупность решений  $\varphi$  уравнения (6.1) с матрицами  $\beta$  табл. 2.

Используя методику, разработанную в [16] для приведения уравнения Кеммера–Дэффина в  $\mathcal{P}(1, 3)$  к форме Шредингера, можно показать, что уравнение (6.1) эквивалентно уравнению

$$i\partial_t\varphi = H\varphi, \quad H = S_{5k}p_k + \beta_5\kappa, \quad (6.5)$$

где

$$S_{5k} \equiv i(\beta_5\beta_k - \beta_k\beta_5), \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Легко убедиться, что вследствие (6.2) эрмитовы матрицы

$$S_{\mu\nu} \equiv i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu) \quad (6.6)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям для генераторов алгебры  $O_5$ , т.е. реализуют 15-мерное представление этой алгебры. Используя явный вид матриц  $\beta_\mu$  табл. 2, находим, что величина, соответствующая инварианту  $P^2$  в  $\mathcal{P}(1, 4)$ , имеет вид:

$$P^2 \equiv H^2 - p_k^2 = \varkappa^2 \beta_5^2 = \varkappa^2 \begin{pmatrix} 1^4 & & & \\ \hline & 0^6 & & \\ \hline & & 1^4 & \\ \hline & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

где верхние индексы в матрице обозначают размерности единичных и нулевых матриц, а матрицы  $S_{kl}$  имеют вид, схематически записанный в табл. 3, где указаны лишь отличные от нуля элементы матриц  $iS_{kl}$ , равные  $\pm 1$ .

Таблица 3

$iS_{12}$		$iS_{13}$		$iS_{14}$	
3, 4	-4, 3	2, 4	-4, 2	1, 4	-4, 1
6, 7	-7, 6	5, 7	-7, 5	-5, 9	9, 5
8, 9	-9, 8	-8, 10	10, 8	-6, 10	10, 6
-11, 12	12, 11	-11, 13	-13, 11	-11, 14	14, 11
$iS_{23}$		$iS_{24}$		$iS_{34}$	
2, 3	-3, 2	1, 3	-3, 1	1, 2	-2, 1
5, 6	-6, 5	-5, 8	8, 5	6, 8	-8, 6
9, 10	-10, 9	7, 10	-10, 7	7, 9	-9, 7
-12, 13	13, 12	-12, 14	14, 12	-13, 14	14, 13

Из табл. 3 видно, что  $S_{kl}$  имеет следующий квазидиагональный вид:

$$S_{kl} = \begin{pmatrix} S_{kl}^4 & & & \\ \hline & S_{kl}^6 & & \\ \hline & & S_{kl}^4 & \\ \hline & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

где  $S_{kl}^4$  и  $S_{kl}^6$  реализуют, соответственно, 4-мерное и 6-мерное представления алгебры  $O_4$ . Далее, квадраты векторов спина и изоспина, компоненты которых суть

$$S_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} + S_{4a}), \quad T_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} - S_{4a}),$$

имеют вид

$$\vec{S}^2 = \vec{T}^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}1^4 & & & \\ \hline & 1^6 & & \\ \hline & & \frac{3}{4}1^4 & \\ \hline & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

а квадраты компонент  $S_3, T_3$  равны

$$S_3^2 = T_3^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}1^4 & & & & \\ & 0 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}1^4 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Из (6.9) и (6.10) видно, что  $15 \times 15$ -матрицы  $S_{kl}$  из (6.6), имеющие вид (6.8), реализуют представление

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D(1, 0) \oplus D(0, 1) \oplus D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D(0, 0) \quad (6.11)$$

алгебры  $O_4$ .

Для установления того, какое именно представление алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  реализуется решениями уравнения (6.1) с  $15 \times 15$ -матрицами  $\beta_\mu$ , необходимо диагонализировать оператор знака энергии, который (в системе  $p_k$ ) совпадает с  $\beta_5$ . Это осуществляется с помощью преобразования

$$\beta'_\mu = A\beta_\mu A^{-1}, \quad (6.12)$$

где отличные от нуля матричные элементы матриц  $A$  и  $A^{-1}$  символически записаны в табл. 4 и 5: например, символ "2.5,9" в табл. 5 означает, что  $(2A^{-1})_{5,9} = 2$ , т.е.  $(A^{-1})_{5,9} = 1$ , а символ "−11,4" означает, что  $(A^{-1})_{11,4} = -1/2$ .

Таблица 4

	1, 1	−1, 14	2, 2	−2, 13	3, 3	−3, 12	4, 4	−4, 11
$A$	5, 1	5, 14	6, 2	6, 13	7, 3	7, 12	8, 4	8, 11
	9, 5	10, 6	11, 7	12, 8	13, 9	14, 10	15, 15	

Таблица 5

	1, 1	1, 5	2, 2	2, 6	3, 3	3, 7	4, 4	4, 8
$2A^{-1}$	2.5, 9	2.6, 10	2.7, 11	2.8, 12	2.9, 13	2.10, 12	2.15, 5	
	11, 4	11, 8	−12, 3	12, 7	−13, 2	−13, 6	−14, 1	14, 5

В этом представлении

$$\varepsilon = \beta'_5 = \begin{pmatrix} 1^4 & & \\ & -1^4 & \\ & & 0^7 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Из формул (6.7), (6.9), (6.10) и (6.13) видно, что уравнение (6.1) с  $15 \times 15$ -матрицами  $\beta_\mu$  реализует представление

$$D^+\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D^-\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D(1, 0) \oplus D(0, 1) \oplus D(0, 0), \quad (6.14)$$

где по первым двум слагаемым преобразуются существенные компоненты вектора  $\varphi$ , реализующие указанные представления алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$ , а по остальным двум преобразуются лишние компоненты. Разумеется, физический смысл имеют только восемь компонент, реализующие представление  $D^+(1/2, 1/2) \oplus D^-(1/2, 1/2)$ , которые инвариантным образом отделяются от семи лишних компонент с помощью преобразования типа Фолди:

$$U = \exp\left(-i\frac{\beta_k p_k}{2p} \operatorname{arctg} \frac{p}{\varkappa}\right), \quad p \equiv \sqrt{p_k^2}. \quad (6.15)$$

При этом преобразовании уравнение (6.1) с  $15 \times 15$ -матрицами расщепляется на два независимых уравнения: одно — для существенных компонент  $\Psi(x_0, \vec{x}, x_4, s_3, t_3)$ ,  $s_3, t_3 = \pm 1/2$ , совпадающее с уравнением (2,24); а другое — для лишних компонент  $\varphi(x_0, \vec{x}, x_4, s_3, t_3)$ ,  $s_3, t_3 = 0, \pm 1$ , и  $\varphi_0(x_0, \vec{x}, x_4)$ , не имеющих физического смысла.

Таким образом, уравнение Кеммера–Дэффина в 5-мерном пространстве Минковского описывает симметричным образом фермионы и антифермионы со спином и изоспином  $s = t = 1/2$  (мультиплеты типа спинодублет-изодублет), т.е., например, системы типа нуклон-антинуклон  $(N, \tilde{N})$ .

Здесь мы ограничились рассмотрением  $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантных уравнений типа Дирака и Кеммера–Дэффина. Аналогично могут быть рассмотрены и другие линейные по  $\partial_\mu$  уравнения в 5-мерном пространстве, например, уравнения типа Рарита–Швингера, Паули–Фирца и др. При этом формализм Рарита–Швингера, развитый для нахождения уравнений для частиц с произвольным спином в  $\mathcal{P}(1, 3)$ , легко обобщается и на случай группы  $\mathcal{P}(1, 4)$ . Это связано с наличием пяти матриц  $\gamma_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ , удовлетворяющих алгебре (5.1), причем в формализме Рарита–Швингера для  $\mathcal{P}(1, 4)$  равноправно используются все пять матриц  $\gamma_\mu$ . Заметим, кстати, что в случае алгебры КДП (6.2) ситуация иная; не существует пятой  $10 \times 10$ -матрицы, удовлетворяющей алгебре (6.2).

В заключении отметим, что общий вид линейных по  $\partial_\mu$   $\mathcal{P}(1, 4)$ -инвариантных уравнений выглядит как

$$(B_\mu \partial_\mu + \varkappa)\Phi = 0, \quad (6.16)$$

где эрмитовы матрицы  $B_\mu$  удовлетворяют алгебре

$$\begin{aligned} [B_\mu, J_{\alpha\rho}] &= g_{\mu\alpha} B_\rho - g_{\mu\rho} B_\alpha, \\ B_\mu B_\nu B_\lambda - B_\mu B_\lambda B_\nu - B_\nu B_\lambda B_\mu + B_\lambda B_\nu B_\mu &= \delta_{\mu\nu} B_\lambda - \delta_{\lambda\nu} B_\mu. \end{aligned} \quad (6.17)$$

В зависимости от конкретной реализации этой алгебры уравнение (6.16) описывает частицы с теми или иными значениями спина  $s$  и изоспина  $t$ . Эти уравнения, однако, содержат много лишних компонент. Выяснение того, какое именно представление алгебры  $\mathcal{P}(1, 4)$  реализует уравнение (6.16) с теми или иными матрицами алгебры (6.17), а также выделением инвариантным образом существенных компонент проводится с помощью методики (6.1) Кеммера-Дэффина.

1. Соколик Г.А., Групповые методы в теории элементарных частиц, Атомиздат, М., 1965.
2. O'Reifertaigh L., *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **14**, 575;  
Jost R., *Helv. Phys. Acta.*, 1966, **39**, 369.
3. Фущич В.И., *УФЖ*, 1968, **13**, 878.
4. Румер Ю.Б., Исследования по 5-оптике, Физматгиз, М., 1956.
5. Fushchych W.I., Krivski I.Yu., *Nucl. Phys.*, 1968, **17**, 79.
6. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, М., 1963.
7. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149.
8. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
9. Foldy L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
10. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М., Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, Физматгиз, М., 1967.
11. Mathews P.T., Salam A., *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 283.
12. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я., Представление группы Лоренца, Физматгиз, М., 1958.
13. Fronsdal C., *Phys. Rev.*, 1967, **156**, 1665;  
Nambu Y., *Phys. Rev.*, 1967, **160**, 1171;  
Takabayasi T., *Prog. Theor. Phys.*, 1967, **37**, 767;  
Stoyanov D., Todorov I., ICTP, preprint IC/67/58.
14. Newton T.D., *Ann., Math.*, 1950, **51**, 730.
15. Foldy L., Wouthuysen S., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
16. Case K.M., *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 1513.

# Equations of motion in odd-dimensional spaces and $T$ -, $C$ -invariance

W.I. FUSHCHYCH

The properties of the equation of Dirac type in three-dimensional and five-dimensional Minkowski space-time with respect to time reflection (in sense of Pauli and Wigner) as well as to the operation of charge conjugation are investigated.  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -invariance of Dirac equation for the cases of four components (in three-dimensional space) and eight components (in five-dimensional space) is established. Within the framework of the Poincaré group a relativistic equation is suggested which describes the movement of a particle with non-fixed (indefinite) mass in external electromagnetic field.

Reported at the Seminar in Institute for Theoretical Physics, Kiev, Ukrainian SSR.

Исследованы свойства уравнения типа Дирака в трехмерном и пятимерном пространствах Минковского относительно отражения времени (в смысле Паули и Вигнера) и операции зарядового сопряжения. Показано, что четырехкомпонентное (в трехмерном пространстве) и восьмикомпонентное (в пятимерном пространстве) уравнения Дирака  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантны. В рамках группы Пуанкаре предложено релятивистское уравнение, описывающее движение частицы с нефиксированной (неопределенной) массой во внешнем электромагнитном поле.

Работа была доложена на семинаре в Институте теоретической физики АН УССР.

## Introduction

F. Klein and later de Broglie pointed out the usefulness of spaces with more than four dimensions for the construction of the physical theories. This idea was intensively developed in 1930–1940 years by many authors who tried to unify the gravitation and electromagnetic theories. Nowadays it is widely developed in connection with the extension of the Poincaré group ( $\mathcal{P}(1,3)$ ) as well as with idea of combining  $\mathcal{P}(1,3)$  with group of internal symmetries (a review of this works can be found in [1]).

In the works [2] the mass operator was proposed to be defined as one like momentum or angular momentum operator, i.e. we proposed to define the mass operator to be not a Casimir operator but the generator of a group which has the Poincaré group as its subgroup. For such a group in papers [3, 4] the inhomogeneous de Sitter group is chosen — a group of rotations and translations in 5-dimensional flat Minkowski space-time with the square-mass operator being related to the generator  $P_4$  (of group  $\mathcal{P}(1,4)$ ) in such a way

$$M^2 = \kappa^2 + P_4^2.$$

In the present work the  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -invariance properties of the simplest equations invariant under the group  $\mathcal{P}(1,4)$  are investigated.

### § 1. Dirac equation within $\mathcal{P}(1, 4)$ scheme and $P$ -, $T$ -, $C$ -transformations

The simplest equations invariant under  $\mathcal{P}(1, 4)$  group are Dirac equations which in the Hamilton form can be written down as following:

$$H^+ \Psi^+(t, \vec{x}) = i \frac{\partial \Psi^+(t, \vec{x})}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$H^- \Psi^-(t, \vec{x}) = i \frac{\partial \Psi^-(t, \vec{x})}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$H^\pm \equiv \alpha_k p_k \pm \beta \varkappa, \quad p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (1.3)$$

$$\alpha_k = \gamma_0 \gamma_k, \quad \beta = \gamma_0, \quad \vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

where  $\gamma_\mu$  are five four-dimensional Dirac matrices ( $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

The invariance of equation (1.1) (or (1.2)) under space-inversion  $x_k \rightarrow -x_k$  is obvious since in  $(1+4)$ -dimensional Minkowski space-time this inversion is reduced to a rotation.

Let us clear up now the question of the invariance of the equation (1.1) (or (1.2)) under the time reflection ( $t \rightarrow -t$ ) and charge conjugation. To this aim we write down the generators of the group  $\mathcal{P}(1, 4)$  defined of the solutions of the equations (1.1) and (1.2) explicitly

$$P_0 = H^+, \quad P_k = p_k, \quad (1.4)$$

$$J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \frac{i}{2} \alpha_l \alpha_k,$$

$$J_{0k} = x_0 p_k - \frac{1}{2} (x_k P_0 + P_0 x_k),$$

$$[x_k, p_l] = i \delta_{kl}, \quad [x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0.$$

According to Pauli the time-reflection operator  $T^p$  satisfies the conditions

$$T^p \Psi(t, \vec{x}) = \tau^p \Psi(-t, \vec{x}), \quad (T^p)^2 = 1, \quad (1.5)$$

$$[T^p, P_0]_+ = 0, \quad [T^p, P_k]_+ = 0, \quad [T^p, J_{kl}]_- = 0, [T^p, J_{0k}]_+ = 0, \quad (1.6)$$

where  $\tau^p$  is a  $(4 \times 4)$ -matrix.

According to Wigner the time-reflection operator  $T^w$  must satisfy the following conditions

$$T^w \Psi(t, \vec{x}) = \tau^w \Psi^*(-t, \vec{x}), \quad (T^w)^2 = 1, \quad (1.7)$$

$$[T^w, P_0] = 0, \quad [T^w, P_k]_+ = 0, \quad [T^w, J_{kl}]_+ = 0, [T^w, J_{0k}] = 0, \quad (1.8)$$

where  $\tau^w$  is a  $(4 \times 4)$  matrix.

Finally the charge-conjugation operator must satisfy the conditions<sup>1</sup>

$$C \Psi(t, \vec{x}) = \tau^c \Psi^*(t, \vec{x}), \quad C^2 = 1, \quad (1.9)$$

<sup>1</sup>In general the squares of operators  $T^p$ ,  $T^w$  and  $C$  are equal to unity to within a multiplicative factor of unit modulus.

$$[C, P_0]_+ = [C, P_k]_+ = 0, \quad [C, J_{\mu\nu}]_+ = 0, \quad (1.10)$$

where  $\tau^c$  is a  $(4 \times 4)$  matrix.

Matrices  $\tau^p$ ,  $\tau^w$  and  $\tau^c$  can be represented in following form

$$\tau^p = a_{\mu}^p \alpha_{\mu} + a_{\mu\nu}^p \alpha_{\mu} \alpha_{\nu}, \quad \mu < \nu, \quad (1.11)$$

$$\tau^w = a_{\mu}^w \alpha_{\mu} + a_{\mu\nu}^w \alpha_{\mu} \alpha_{\nu}, \quad \mu < \nu, \quad (1.12)$$

$$\tau^c = a_{\mu}^c \alpha_{\mu} + a_{\mu\nu}^c \alpha_{\mu} \alpha_{\nu}, \quad \mu < \nu, \quad (1.13)$$

where  $a_{\mu}$ ,  $a_{\mu\nu}$  are the arbitrary numbers ( $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

Using (1.11) and (1.13) one can immediately verify that the relations (1.6) and (1.10) are satisfied only for the zero-matrices  $\tau^p$  and  $\tau^c$ . Relation (1.7) is satisfied if  $\tau^w = \alpha_1 \cdot \alpha_3$ .

Thus, the equation (1.1) or (1.2) is  $T^p$ -,  $C$ -noninvariant but  $P$ ,  $T^w$ -invariant. This means that the four-component Dirac equations in five-dimensional scheme are not  $PTC$ -invariant as it was pointed out in [4, 5].

This result is a consequence of the fact that in contrary to the usual Dirac equation (1.1) (or (1.2)) do not describe a particle and antiparticle. In fact the generators of the group  $\mathcal{P}(1, 4)$  given in the form (1.4) defined on the manifold of all solutions of equations (1.1) and (1.2) realize the representations

$$D^+(1/2, 0) \oplus D^-(0, 1/2), \quad (1.14)$$

$$D^+(0, 1/2) \oplus D^-(1/2, 0) \quad (1.15)$$

respectively. As it is commonly known, the usual Dirac equation describes a particle and antiparticle and on the manifold of all its solutions the representation  $D^+(1/2) \oplus D^-(1/2)$  is realized of group  $\mathcal{P}(1, 3)$ .

Starting from the equation (1.1) (or (1.2)) and using Bargman–Wigners method [6] one can describe some class of equations invariant under the  $\mathcal{P}(1, 4)$  group and the time reflection in sense of Wigner, however they are noninvariant under  $T^p$  and  $C$  operations.

Hence we see that (1.1) (or (1.2)) as well as the class of the Bargman–Wigner type equations (derived from (1.1) or (1.2)) are  $T^w$ -invariant, but  $T^p$ -,  $C$ -noninvariant.

It may seen in this connection that any theory which is built up in five-dimensional Minkowski space-time is always  $PTC$ -noninvariant [5]. Though actually it is not so. In fact, let us consider equation

$$H\Psi(t, \vec{x}) = i \frac{\partial \Psi(t, \vec{x})}{\partial t}, \quad \Psi(t) \equiv \Psi(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \Psi^+(t, \vec{x}) \\ \Psi^-(t, \vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

where

$$H \equiv \tilde{\alpha}_k p_k + \tilde{\beta} \varkappa, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (1.17)$$

$$\tilde{\alpha}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \alpha_k \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

On the manifold of solutions of this equations operators  $T^w$ ,  $T^p$  and  $C$  are defined as:

$$T^p \Psi(t) = \tilde{\tau}^p \Psi(-t), \quad T^w \Psi(t) = \tilde{\tau}^w \Psi^*(-t), \quad C \Psi(t) = \tilde{\tau}^c \Psi^*(t), \quad (1.18)$$

$$\tilde{\tau}^p = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tau}^w = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tau}^c = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

One can immediately verify that the relations (1.16), (1.8) and (1.10) actually satisfy for the equation (1.16). It means that the equation (1.16) is  $T^w$ -,  $T^p$ -,  $C$ - and  $PTC$ -invariant. That is also clear from the fact that equation (1.16) realizes representation

$$D^+(1/2, 0) \oplus D^-(1/2, 0) \oplus D^+(0, 1/2) \oplus D^-(0, 1/2). \quad (1.20)$$

Starting from (1.16) and generalizing the Bargman–Wigner method on  $\mathcal{P}(1, 4)$  group one can describe all the equations of Bargman–Wigner type which are  $PTC$ -invariant [7].

Thus in case of five dimensions one has to choose for the basic equation on eight-component equation (1.16) but not a four-component equation (1.1) or (1.2).

If one puts in (1.1)  $\varkappa = 0$ , then such four-component equation is  $T^p$ -,  $C$ -invariant and in this case:

$$\tau^p = \gamma_0, \quad \tau^c = \alpha_2 \alpha_4, \quad \tau^w = \alpha_1 \alpha_3. \quad (1.21)$$

Equation (1.1)

$$\alpha_k p_k \Psi^\pm(t, \vec{x}) = i \frac{\partial \Psi^\pm(t, \vec{x})}{\partial t} \quad (1.1')$$

describes a particle whose spin is 1/2 but the mass is non-fixed since

$$M^2 \tilde{\Psi}(t, \vec{p}) = p_4^2 \tilde{\Psi}(t, \vec{p}) = m^2 \tilde{\Psi}(t, \vec{p}), \quad -\infty < p_4 < \infty, \quad 0 \leq m^2 \leq \infty. \quad (1.22)$$

Here  $\tilde{\Psi}(t, \vec{p})$  is the Fourier-image of function  $\Psi(t, \vec{x})$ .

From what was performed above it reveals that in  $\mathcal{P}(1, 4)$  scheme it is possible to describe a particle with non-fixed mass (i.e. the particles of resonance type) the spin of which is fixed.

## § 2. Equation for a particle with non-fixed mass on $\mathcal{P}(1, 3)$ group

In this section we show how one can write down the relativistic equation of motion for a particle with the non-fixed mass within the framework of Poincaré group. Usually elementary particle either stable or unstable whose spin is  $s$ , is associated with a Hilbert space  $R^s(m)$  in which an irreducible representation of the Poincaré group  $\mathcal{P}(1, 3)$  is realized. Such a correspondence is unjustified one since we cannot attribute the definite mass to the unstable particle. Following [2, 8] let us attribute to an unstable particle (resonance) a Hilbert space  $R^s$  with the direct integral of spaces  $R^s(m)$ , i.e.

$$R^s = \int \oplus R^s(m) g^s(m^2) dm^2, \quad (2.1)$$

where function  $g^s(m^2)$  is not equal to zero only within the interval  $[m_1^2, m_2^2]$  which characterizes the spread (indefinite) of mass of a particle.

According to (2.1) each vector from  $R^s$  can be represented as

$$\Psi^s(t, \vec{x}) = \int \oplus \Psi^s(t, \vec{x}, m) g^s(m^2) dm^2, \quad (2.2)$$

$$\Psi^2(t, \vec{x}, m) \in R^s(m), \quad \vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3),$$

$$P_\mu^2 \Psi^s(t, \vec{x}, m) = m^2 \Psi^s(t, \vec{x}, m), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

$$P_\mu^2 \Psi^s(t, \vec{x}) = \int \oplus m^2 \Psi^s(t, \vec{x}, m) g^s(m^2) dm^2. \quad (2.4)$$

The generators of the Poincaré group on vectors (2.2) are defined in such a way

$$P_\mu \Psi^s(t, \vec{x}) = \int \oplus P_\mu \Psi^s(t, \vec{x}, m) g^s(m^2) dm^2, \quad (2.5)$$

$$J_{\mu\nu} \Psi^s(t, \vec{x}) = \int \oplus J_{\mu\nu} \Psi^s(t, \vec{x}, m) g^s(m^2) dm^2. \quad (2.6)$$

The Dirac equation for the function  $\Psi^{s=1/2}(t, \vec{x})$  is:

$$\left( i\gamma_0 p_0 + i\gamma_k p_k - \sqrt{p_\mu^2} \right) \Psi^{s=1/2}(t, \vec{x}) = 0. \quad (2.7)$$

One can easily see now that (2.7) can be reduced to the usual Dirac equation if one formally replaces the function  $g^{s=1/2}(m^2)$  in (2.2) by  $\delta(m^2 - m_0^2)$ . The generators of  $\mathcal{P}(1, 3)$  group defined by (2.5) and (2.6) on the manifold of solutions of eq. (2.7) are given by (1.4), where

$$P_0 \equiv H \equiv \alpha_k p_k + \beta \sqrt{p_\mu^2}. \quad (2.8)$$

We can write down the equation of motion for a particle with indefinite mass, which interacts with the external electromagnetic field in form

$$\left( i\gamma_0 \pi_0 + i\gamma_k \pi_k - \sqrt{\pi_\mu^2} \right) \Psi^{s=1/2}(t, \vec{x}) = 0, \quad (2.9)$$

where  $\pi_\mu \equiv p_\mu - eA_\mu$ . It is clear that equation (2.9) essentially differs from the usual Dirac equation which describes the motion of a particle with fixed mass in the electromagnetic field. A detailed analysis of equation (2.9) will be performed in a forthcoming work.

Lurcat [8] pointed out, that interpretation of function  $\Psi^s(t, \vec{x})$  as a wave function of particle is not correct.

More appropriate is to characterize the unstable system by the density matrix (operator). In the Schrödinger picture the equation of motion for the density matrix looks like

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho],$$

where  $H$  is defined by (2.8).

Equation (2.7) as well as the usual Dirac equation, is  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -invariant.

### § 3. Equation for the flat particle and $T$ -, $C$ -invariance

To clear up how can extend the obtained above (sec. 1) results upon any arbitrary group  $\mathcal{P}(1, 2n+1)$  let us consider in this section equations of motion which are invariant under  $\mathcal{P}(1, 2)$  group (the group of rotations and translations in three-dimensional Minkowski space).

The simplest equations invariant under  $\mathcal{P}(1, 2)$  are:

$$H^+ \Psi^+(t, x_1, x_2) = i \frac{\Psi^+(t, x_1, x_2)}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$H^- \Psi^-(t, x_1, x_2) = i \frac{\Psi^-(t, x_1, x_2)}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$H^\pm = \alpha_k p_k \pm \beta \varkappa, \quad k = 1, 2, \quad (3.3)$$

$$\alpha_1 = \sigma_1, \quad \alpha_2 = \sigma_2, \quad \beta = \sigma_3, \quad p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k},$$

Here  $\Psi(t, x_1, x_2)$  is a two-component spinor, and  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  are Pauli matrices.

Taking into account that in this case

$$\tau^p = a^p \cdot 1 + \vec{a}^p \vec{\sigma}, \quad \tau^w = a^w \cdot 1 + \vec{a}^w \sigma, \quad \tau^c = a^c \cdot 1 + \vec{a}^c \sigma \quad (3.4)$$

and arguing in a way similar to that of sec. 1, we reveal that equation (3.1) or (3.2) is  $T^p$ -,  $T^w$ - and  $PTC$ -noninvariant but  $P$ - and  $C$ -invariant.

Equation

$$H \Psi(t, x_1, x_2) = i \frac{\partial \psi(t, x_1, x_2)}{\partial t}, \quad (3.5)$$

$$\Psi(t) \equiv \Psi(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \Psi^+(t, \vec{x}) \\ \Psi^-(t, \vec{x}) \end{pmatrix}, \quad H = \tilde{\alpha}_k p_k + \tilde{\beta} \varkappa, \quad k = 1, 2,$$

$$\tilde{\alpha}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \alpha_k \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

is  $T^p$ -,  $T^w$ - and  $C$ -invariant as well as equation (1.16) is, i.e. it is  $PTC$ -invariant, and for matrices and  $\tau^p, \tau^w$  we have

$$\tilde{\tau}^p = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tau}^w = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tau}^c = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Thus equations of (1.1), (3.1) type and a whole class of equations of Bargman–Wigner type which are derived from the equations of (1.1) type are invariant under the limited groups:

$\mathcal{P}(1, 2)$  are  $T^p$ -,  $T^w$ -,  $T^w C$ -noninvariant and  $C$ -invariant;

$\mathcal{P}(1, 4)$  are  $T^p$ -,  $C$ -,  $T^w C$ -noninvariant and  $T^w$ -,  $T^p C$ -invariant;

$\mathcal{P}(1, 6)$  are  $T^p$ -,  $T^w$ -,  $T^p C$ -,  $T^w C$ -noninvariant and  $C$ -invariant;

$\mathcal{P}(1, 8)$  are  $T^p$ -,  $T^w$ -,  $T^w C$ -noninvariant and  $T^w$ -,  $T^p C$ -invariant.

⋮

To prove the assertions given above in the case of arbitrary  $\mathcal{P}(1, 2n+1)$  group one has to carry out the very similar procedure to that we employed for  $\mathcal{P}(1, 4)$  group and to use the fact that Dirac matrices  $\gamma^{(2n+1)}$  of group  $\mathcal{P}(1, 2n)$  are related with those  $\gamma^{(2n-1)}$  of group  $\mathcal{P}(1, 2n-2)$  by

$$\left( \gamma_\mu^{(2n+1)}, \gamma_{2n}^{(2n+1)}, \gamma_{2n+1}^{(2n+1)} \right) = \left( \gamma_\mu^{(2n-1)} \otimes \sigma_2, 1 \otimes \sigma_3, 1 \otimes \sigma_1 \right),$$

$$\mu = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Putting in (3.1) and (3.2)  $\varkappa = 0$  one sees that equation (3.1) coincides with (3.2) and such equation is  $C$ -,  $T$ -invariant, and  $\tau^p = \sigma_3$ ,  $\tau^w = \sigma_2$ .

1. Hegerfeldt G.C., Henning J., *Fortschr. Phys.*, 1968, **16**, 9.
2. Фушич В.И., *Украинский физ. журн.*, 1968, **13**, 363; 1967, **12**, 741.
3. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79.
4. Фушич В.И., Кривский И.Ю., О волновых уравнениях в 5-мерном пространстве Минковского, Препринт ИТФ-68-72, Киев, 1968.
5. Rosen S.P., *J. Math. Phys.*, 1968, **9**, 1593.
6. Bargman Y., Wigner E., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1948, **34**, 211.
7. Фушич В.И., Сокур Л.П., Препринт ИТФ-69-33, Киев, 1969.
8. Lurcat F., *Phys. Rev.*, 1968, **173**, 1461.
9. Brauer B., Weyl H., *Am. J. Math.*, 1935, **57**, 447.

# On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkowski space

W.I. FUSHCHYCH, I.Yu. KRIVSKY

This paper is a continuation and elaboration of our brief notice [1] where some approach to the variable-mass problem was proposed. Here we have found a definite realization of irreducible representations of the inhomogeneous group  $P(1, n)$ , the group of translations and rotations in  $(1+n)$ -dimensional Minkowski space, in two classes (when  $P_0^2 - P_k^2 > 0$  and  $P_0^2 - P_k^2 < 0$ ). All  $P(1, n)$ -invariant equations of the Schrödinger–Foldy type are written down. Some equations of physical interpretation of the quantal scheme based on the inhomogeneous de Sitter group  $P(1, 4)$  are discussed.

The analysis of the Dirac and Kemmer–Duffin type equations in the  $P(1, 4)$  scheme is carried out. A concrete realization of representations of the algebra  $P(1, 4)$  connected with this equations, is obtained. The transformations of the Foldy–Wouthuysen type for this equations are found. It is shown that in the  $P(1, 4)$  scheme of the Kemmer–Duffin type equation describes a fermion multiplet like the nucleon-antinucleon.

## 1. Introduction

We recall here the initial points of our approach of the variable-mass problem proposed in ref. [1]:

(i) The square of the variable-mass operator is defined as an independent dynamical variable:

$$M^2 \equiv \varkappa^2 + P_4^2, \quad (1)$$

where  $\varkappa$  is a fixed parameter and  $P_4$  is an operator similar to the components of the three-momentum  $\mathbf{P}$ , which commutes with all the generators of the algebra  $P(1, 3)$  of the Poincaré group.

(ii) The relation between the energy  $P_0$ , three-momentum  $\mathbf{P}$  and variable-mass  $M$  of a physical system remains conventional (here  $\hbar = c = 1$ ):

$$P_0^2 = \mathbf{P}^2 + M^2 \equiv P^2 + \varkappa_k^2, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

(iii) The spaces  $p \equiv (p_0, p_1, \dots, p_4)$  and  $x = (x_0, x_1, \dots, x_4)$  are assumed to be plane and reciprocally conjugated. It follows then from (i), (ii) and (iii) that the generalized relativistic group symmetry is an inhomogeneous de Sitter group<sup>1</sup>  $P(1, 4)$ , i.e. the group of translations and rotations in five-dimensional Minkowski space. This group is a minimal extension of the conventional group of relativistic symmetry: the Poincaré group  $P(1, 3)$ .

In sect. 2 a definite realization of irreducible representations for the generators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  of the algebra  $P(1, n)$  with arbitrary  $n$  is carried out, which made it possible to give a proof of the  $P(1, n)$ -invariance of the Schrödinger–Foldy type equations

Nuclear Physics B, 1969, **14**, P. 573–585.

<sup>1</sup>Algebras and groups connected with them are designated here with the same symbols.

given in ref. [1] for  $n = 4$ . Some questions of a physical interpretation of a quantal scheme based on the group  $P(1, 4)$ , are considered in sect. 3. Sects. 4 and 5 answer the question which representations of the group  $P(1, 4)$  are realized by two types of equations linear in  $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$  — the Dirac and Kemmer–Duffin type equations.

## 2. Realizations of the algebra $P(1, n)$ representations

For the sake of generality all considerations are made here not for the de Sitter group  $P(1, 4)$  but for the group  $P(1, n)$  of translations and rotations in  $(1 + n)$ -dimensional Minkowski space which leaves the form

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 \equiv x_0^2 - x_k^2 \equiv x_\mu^2, \\ \mu &= 0, 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3)$$

unchanged, where  $x_\mu$  are differences of point coordinates of this space.

Commutation relations for the generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  of the algebra  $P(1, n)$  are chosen in the form

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad -i[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\rho, \quad (4a)$$

$$-i[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}, \quad (4b)$$

where  $g_{00} = 1$ ,  $-g_{kl} = \delta_{kl}$ ,  $P_\mu$  are operators of infinitesimal displacements and  $J_{\mu\nu}$  are operators of infinitesimal rotations.

In refs. [2–5] all irreducible representations of the Poincaré group  $P(1, 3)$  are studied and the concrete realization for the generators of its algebra is found. The methods are generalized here for the case of the group  $P(1, n)$ .

For representations of the class I ( $P^2 \equiv P_0^2 - P_k^2 > 0$ ) when the group  $O(n)$  of rotations in  $n$ -dimensional Euclidean space is the little group of the group  $P(1, n)$ , the generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  are of the form

$$\begin{aligned} P_0 &= p_0 \equiv \varepsilon\sqrt{p_k^2 - \varkappa^2}, \quad P_k = p_k, \\ J_{kl} &= x_{[k}p_{l]} + S_{kl}, \quad x_{[k}p_{l]} \equiv x_k p_l - x_l p_k, \\ J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k p_0 + p_0 x_k) - \frac{S_{kl} p_l}{p_0 + \varkappa}, \end{aligned} \quad (5)$$

where the operators  $x_k$  and  $p_k$  are defined by the relations

$$[x_k, p_l] = i\delta_{kl}, \quad [x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0, \quad (6)$$

and  $S_{kl}$  are matrices realizing irreducible representations of the algebra  $O(n)$  which have been studied in ref. [6].

For representations of the class III ( $P^2 = P_0^2 - P_k^2 < 0$ ) when the little group of the group  $P(1, n)$  is already a non-compact group  $O(1, n - 1)$  of rotations in  $[1 + (n - 1)]$ -dimensional pseudo Euclidean space, the generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  are of the form

$$\begin{aligned} P_0 &= p_0 \equiv \pm\sqrt{p_k^2 - \eta^2}, \quad P_k = p_k, \quad J_{ab} = x_{[a}p_{b]} + S_{ab}, \\ J_{an} &= x_{[a}p_{n]} - \frac{S_{ab}p_b - S_{a0}p_0}{p_n + \eta}, \quad J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}(x_a p_0 + p_0 x_a) + S_{0a}, \\ J_{0n} &= x_0 p_n - \frac{1}{2}(x_n p_0 + p_0 x_n) - \frac{S_{0a}p_a}{p_n + \eta}, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $a, b = 1, \dots, n - 1$ ,  $\eta$  is a real constant, the operators  $x_k, p_k$  are defined by relations (6) as before, and the operators  $(S_{0a}, S_{ab})$  are generators of the algebra  $O(1, n - 1)$  in corresponding irreducible representations, which have been studied by Gelfand and Grayev [7].

Formulae (5) and (7) give the irreducible representations of the algebra  $P(1, n)$  in the Schrödinger picture: a representation space for an irreducible representation is constituted from the solutions  $\Psi(x_0)$  of the Schrödinger–Foldy type equation

$$i\partial_0\Psi(x_0) = P_0\Psi(x_0). \quad (8)$$

The solutions  $\Psi(x_0)$  are vector functions  $\Psi(x_0) = \Psi(x_0, x_1, \dots, x_n)$  in  $x$ -representation for eq. (6) or  $\Psi(x_0) = \tilde{\Psi}(x_0, p_1, \dots, p_n)$  in  $p$ -representation for eq. (6) etc., and their components are also functions of auxiliary variables  $s_3, t_3, \dots$  (“spin” variables) — eigenvalues of generators of Cartan’s subalgebra of the algebra  $O(n)$  in the case (5) or  $O(1, n - 1)$  in the case (7).

Eq. (8) is  $P(1, n)$ -invariant: the manifold of all the solutions of eq. (8) is invariant under transformations from the group  $P(1, n)$ . This is the consequence of the condition

$$[(i\partial_0 - P_0), Q]\Psi = 0 \quad (9)$$

being valid for any generator  $Q$  of  $P(1, n)$  defined by eqs. (5) or (7).

In the Heisenberg picture where vector functions  $\Psi$  of a representation space for a representation of  $P(1, n)$  do not depend on the time  $x_0$  (and are the solutions of the equation  $P_0\Psi = E\Psi$ ), formulae for the generators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  are obtained by dropping the terms with  $x_0$ , and eq. (8) is replaced by

$$i\partial_0 Q = [Q, P_0]_- \quad (10)$$

for any operators  $Q$  as functions of  $x_k, p_k, S$ .

Since in class I the little group of the group  $P(1, n)$  is the compact group  $O(n)$ , all the irreducible representations of the group  $P(1, n)$  are here unitary and finite-dimensional (concerning a set of “spin” indexes  $s_3, t_3, \dots$ ), and the solutions of the corresponding equation (8) have here finite number of components. In accord with the representations of the little group  $O(1, n - 1)$ , in class III the group  $P(1, n)$  has both finite- and infinite-dimensional representations. We emphasize that all the unitary representations are here infinite-dimensional, and the solutions of the corresponding eq. (8) have here infinite number of components.

Note at the end of this section that the problems of classification and realization of representations of an arbitrary inhomogeneous group  $P(m, n)$  can similarly, without principal difficulties, be reduced to problems of classification and realization of corresponding representations of homogeneous group of the types  $O(m', n')$ .

### 3. Physical interpretation

Here we deal only with the inhomogeneous de Sitter group  $P(1, 4)$  which is a minimal extension of the Poincaré group  $P(1, 3)$ . We discuss the main topics of the physical interpretation of a quantal scheme based on the group  $P(1, 4)$ . This group is the most attractive one because it will succeed to give a clear physical meaning to a complete set of commuting variables.

In the  $p$ -representation for eq. (6) a component of the wave function  $\Psi$  — a solution of eq. (9) with  $n = 4$  — is a function of six dynamical variables of the corresponding complete set:  $\Psi(x_0, \mathbf{p}, p_4, s_3, t_3)$  where  $\mathbf{p}$  and  $p_4$  are eigenvalues of the operators  $\mathbf{P}$  and  $P_4$  and their physical meaning has been discussed in the introduction;  $s_3$  and  $t_3$  are eigenvalues of the third components of the operators  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$  and  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3)$  where

$$S_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} + S_{4a}), \quad T_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} - S_{4a}), \quad (11)$$

$(a, b, c) = \text{cycl}(1, 2, 3)$ . These operators satisfy the relations

$$[S_a, S_b] = iS_c, \quad [T_a, T_b] = iT_c, \quad [S_a, \mathbf{S}^2] = [T_a, \mathbf{T}^2] = [S_a, T_b] = 0. \quad (12)$$

The operators

$$\mathbf{S}^2 = \frac{W}{4p^2} + \frac{V}{2\sqrt{p^2}}, \quad \mathbf{T}^2 = \frac{W}{4p^2} - \frac{V}{2\sqrt{p^2}} \quad (13)$$

are invariant both of  $P(1, 4)$  and  $O(4)$  (in class I) or  $O(1, 3)$  (in class III). Note that in irreducible representations of class I we have

$$\mathbf{S}^2 = s(s+1)\hat{1}, \quad \mathbf{T}^2 = t(t+1)\hat{1}, \quad (14)$$

where  $s, t = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \dots$  and  $\hat{1}$  is the  $(2s+1)(2t+1)$ -dimensional unit matrix.

The irreducible representations  $D^\pm(s, t, \varkappa^2)$  of the group  $P(1, 4)$ , identified by fixed numbers  $s, t, \varkappa^2$  and  $\varepsilon = \pm 1$  (i.e., by values of the corresponding invariants of  $P(1, 4)$ ), allow us to introduce the concept of “elementary particle” in the quantum scheme based on the group  $P(1, 4)$  possible states of an “elementary particle” (when  $\varepsilon = +1$ ) or “antiparticle” (when  $\varepsilon = -1$ ) with given values of  $s, t$  and  $\varkappa^2$ , are states which constitute the representation space for the irreducible representation  $D^\pm(s, t, \varkappa^2)$  of the group  $P(1, 4)$ . As it is seen from eq. (2),  $\varkappa$  is the boundary value of the energy  $P_0$ ; the physical meaning of  $s$  and  $t$  is dictated by the relations (12): they allow to interpret the operators  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{T}$  as the spin and isospin operators. Thus, the components  $\psi(x_0, \mathbf{p}, p_4, s_3, t_3)$  are interpreted as the probability amplitude of finding (by measuring at a given instant  $x_0$ ) the indicated values of three-momentum  $\mathbf{p}$ , mass  $m = \sqrt{p_4^2 + \varkappa^2}$  and third components of spin  $s_3$  and isospin  $t_3$ .

It is clear that an irreducible representation  $D^\pm(s, t, \varkappa^2)$  of the group  $P(1, 4)$  is reducible with respect to  $P(1, 3) \subset P(1, 4)$ ; therefore the “elementary particle” defined here, is not elementary in the conventional sense (i.e., with respect to the group  $P(1, 3)$ ). The vector function of the representation space for  $D^\pm(s, t, \varkappa^2)$  describes, in fact, a multiplet of particles with different  $t_3$ ,  $-t \leq t_3 \leq t$  (and, of course, with different  $s_3$ ,  $-s \leq s_3 \leq s$ ); the parameter  $\varkappa$  is then a “bare” rest mass of the given multiplet.

The  $P(1, 4)$  quantum scheme in our interpretation may be found successful for a consequent description of unstable systems (resonances, particles or systems with non-fixed mass) already in the framework of the quantal approach<sup>2</sup> without breaking down such fundamental principles as unitarity, hermiticity etc. Indeed, here the mass

<sup>2</sup>The consequent consideration of such problems demands, obviously, the quantum field approach, but a quantal approach can be regarded as half-phenomenological.

operator is an independent dynamical variable eq. (1), it is Hermitian, and the problem of unstable systems is, in fact, reduced to the problem of calculation quantities like distributions

$$\rho(m^2, s_3, t_3) \equiv \int d^3x \left| \int dx_4 e^{-i\sqrt{m^2 - \varkappa^2}x_4} \Psi(x_0, \dots, x_4, s_3, t_3) \right|^2, \quad (15)$$

where  $\psi$  are solutions of an equation of the type (8) with a suitable interaction. The positions and forms of maxima of the distribution  $\rho(m^2)$  define experimentally observed masses and lifetimes of unstable particles, and singularities of  $\rho(m^2)$  define masses of stable particles.

It is important to emphasize that in accord with our interpretation, the particles experimentally observed are described not by the free equation (8), but by an equation of the type (8) with a suitable interaction which may break the  $P(1, 4)$ -invariance, but, of course, conserves the  $P(1, 3)$ -invariance<sup>3</sup>. As for solutions of the free equation (8), they are some hypothetical (“bare”) states which may not correspond to any real particles. From the viewpoint of this interpretation there are two types of interactions: interactions which cause a “dressing” of particles and are inherent even in asymptotical states, and usual interactions which cause a scattering processes of real (“dressed”) particles. Therefore, in particular, the five-dimensional conservation law following from the free  $P(1, 4)$ -invariant scheme, may have no real sense.

We emphasize that the interpretation of the  $P(1, 4)$ -scheme proposed does not pretend to be the only one and complete. The more detailed discussions of interpretation problems are possible only in connection with solutions of suitable models of interactions in this scheme, what is not the subject of this article.

#### 4. The Dirac-type equations

A characteristic feature of eqs. (8) is that they do not contain any redundant components. However, in this equation the differential operators  $\partial_k \equiv \partial/\partial x_k$  enter under the square root, therefore they are considered not to be appropriate for introducing interactions and for theoretical field considerations. Let us consider the simplest equation of first order in  $\partial_\mu$ , manifestly invariant under the group  $P(1, 4)$ .

Remind that there are five Dirac matrices  $\gamma_\mu$  satisfying the relations

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, 4, \quad (16)$$

where

$$\gamma_0 \equiv \beta = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \quad \text{or} \quad \gamma_4 = -\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \quad (17)$$

The Dirac equation in the Minkowski five-space is of the form

$$(i\gamma_\mu \delta_\mu - \varkappa)\psi \equiv (i\gamma_0 \partial_0 + i\gamma_k \partial_k - \varkappa)\psi = 0 \quad (18a)$$

or

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu + \varkappa)\psi = 0. \quad (18b)$$

Eqs. (18) were written down long ago by Dirac [8]. It is clear that they are invariant under the inhomogeneous de Sitter group. Our aim is to find out which

<sup>3</sup>In this sense the consideration of  $P(1, 4)$  symmetry here presented is only a base for its suitable violation — analogously to considerations and violations of  $SU(n)$  symmetries.

representation of the group  $P(1, 4)$  is realized in the representation space of solutions of eq. (18). Here we shall not follow the conventional method which is ordinary used (see, e.g., refs. [9, 10]) and which in fact answers only the question which representation of the homogeneous Lorentz group  $O(1, 3)$  is realized by the Dirac equation in the Minkowski four-space but does not answer the question of representation of the Poincaré group  $P(1, 3)$ .

Here we deal with the method suitable for analysis both of the Dirac equation and of other wave equations (linear and non-linear with respect to  $\partial_\mu$ ) and besides in arbitrary  $(1+n)$ -dimensional Minkowski space. The method is based on definition (9) of the invariance of the wave equation. It is clear from this definition that to answer the question whether a wave equation is invariant under the group  $P(1, n)$ , one has to find an explicit form of generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  of the algebra connected with the equation in such a way that its Hamiltonian  $H$  and the operator  $i\partial_o \equiv i\partial/\partial t$  must commute with the generators  $P_k$ ,  $J_{\mu\nu}$  exactly just as the generator  $P_0$  does. Further, if the explicit form of the generators are found, one can find the invariants of the group  $P(1, n)$  in the explicit form; their eigenvalues will answer the question which representation of the group is realized by solutions of this equation.

Let us illustrate the method for the case of eq. (18a). Rewrite eq. (18a) in the Hamiltonian form

$$i\partial_0\psi = H\psi, \quad H \equiv \alpha_k p_k + \beta \varkappa, \quad \alpha_k = \beta \gamma_k. \quad (18a')$$

It can, be immediately verified that in this case the explicit form of generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  satisfying the relations of the algebra  $P(1, 4)$ , is given by

$$\begin{aligned} P_0 = H &\equiv \alpha_k p_k + \beta \varkappa, & P_k &= p_k \equiv -i\partial_k, \\ J_{kl} &= x_{[k} p_{l]} + S_{kl}, & J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k P_0 + P_0 x_k), \end{aligned} \quad (19)$$

where

$$S_{kl} \equiv \frac{i}{4}(\gamma_k \gamma_l - \gamma_l \gamma_k). \quad (20)$$

We choose  $\gamma_\mu$  in the form

$$\gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ -\sigma_a & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 \equiv \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Then the spin and isospin operators for the particle described by eqs. (18), are of the form

$$S_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} + S_{4a}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} - S_{4a}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a \end{pmatrix}, \quad (22)$$

and their squares coinciding with the invariants of the group  $P(1, 4)$ , are of the form

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Further, the invariant  $P^2 = \varkappa^2$  and the invariant  $\varepsilon$  is the sign of energy coincides (in the "rest frame"  $p_k = 0$ ) with the matrix  $\beta$ .

It is clearly seen from  $\mathbf{S}^2$ ,  $\mathbf{T}^2$ ,  $S_3$ ,  $T_3$  and  $\varepsilon = \beta$  that the manifold of solutions of eq. (18a) constitutes the representation space for the four-dimensional reducible representation  $D^+(\frac{1}{2}, 0) \oplus D^-(0, \frac{1}{2})$  of the group  $P(1, 4)$ . Thus, in accord with our interpretation of the numbers  $s$  and  $t$  the Dirac equation (18a) describes a multiplet

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{\frac{1}{2}, 0}^+ \\ \psi_{0, \frac{1}{2}}^- \end{pmatrix}, \quad (24)$$

where  $\psi_{\frac{1}{2}, 0}^+$  is a spinor-isoscalar describing a fermion with the spin  $s = \frac{1}{2}$  and isospin  $t = 0$  (a particle like the  $\Lambda$  hyperon) and  $\psi_{0, \frac{1}{2}}^-$  is a scalar-isospinor describing an antiboson with  $s = 0$  and  $t = \frac{1}{2}$  (an antiparticle like the  $\bar{K}$  meson)<sup>4</sup>.

It can analogously be shown that eq. (18b) realizes the representation  $D^-(\frac{1}{2}, 0) \oplus D^+(0, \frac{1}{2})$  of the group  $P(1, 4)$ , i.e., describes a multiplet like  $(K, \tilde{\Lambda})$ . In this case the explicit form of the operators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  is obtained from eq. (19) by the replacement  $\varkappa \rightarrow -\varkappa$  or  $\beta \rightarrow -\beta$ .

Thus, in contrast to the Dirac equations in the  $P(1, 3)$  scheme, the Dirac equations (18) in the  $P(1, 4)$  scheme do not describe particles and antiparticles symmetrically and therefore they will not be invariant under transformations of type  $PTC$ .

It can be perceived from the analysis of eqs. (18a) and (18b) that in the  $P(1, 4)$  scheme the equation describing particles and antiparticles symmetrically, must realize the representation

$$D^+\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D^+\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus D^-\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D^-\left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (25)$$

We have found that such an equation is of the form

$$(i\Gamma_\mu \partial_\mu - \varkappa)\Psi \equiv (i\Gamma_0 \partial_0 + i\Gamma_k \partial_k - \varkappa)\Psi = 0, \quad (26)$$

where the  $8 \times 8$  matrices are

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

In the case of eq. (26) the explicit form of the generators of  $P(1, 4)$  is obtained from eq. (19) by the replacement  $\gamma_\mu \rightarrow \Gamma_\mu$ . One can see from the explicit form the  $8 \times 8$  matrices  $\mathbf{S}^2$ ,  $\mathbf{T}^2$ ,  $S_3$ ,  $T_3$  and  $\varepsilon = \Gamma_0$  that eq. (26) actually realizes the representation (25), i.e., that the wave function  $\Psi$  (eight-component spinor) has the form

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\frac{1}{2}, 0}^+ \\ \psi_{0, \frac{1}{2}}^+ \\ \psi_{0, \frac{1}{2}}^- \\ \psi_{\frac{1}{2}, 0}^- \end{pmatrix}, \quad (28)$$

<sup>4</sup>Note that it would be more appropriate to call the boson-like  $K$  a spinosinglet-isodoublet, and the fermion-like  $\Lambda$  a spinodoublet-isosinglet.

Note, that in the  $P(1,4)$  scheme just the eight-component equation (26) (but not the four-component equations (18)) symmetrically describes particles and antiparticles and is therefore  $PTC$  invariant (more detailed see refs. [11, 16]).

It is easy to see that the eight-component equation (26) is the unification of the four-component equations (18a) and (18b). Of course, in the  $P(1,3)$  scheme such a unification of the Dirac equations is trivial. However, in the  $P(1,4)$  scheme the unification is not trivial: the matrices  $\Gamma_0, \Gamma_k$  obey the relations (16), but they are not matrices of a reducible representation of the Dirac algebra eq. (16) since, in particular,  $\Gamma_0 \neq \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$ , i.e., the condition (17) is not satisfied. The  $8 \times 8$  matrices  $\Gamma_0, \Gamma_k$  together with the two other matrices

$$\Gamma_5 = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma_0 \\ \gamma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

obey the commutation relations of Clifford algebra in six-dimensional space, the additional condition

$$\Gamma = -i\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6 \quad (17')$$

being valid, and realize its irreducible representation. It is of interest to note that the eight-component equation of the Dirac type

$$(i\Gamma_\mu\partial_\mu - \varkappa)\Phi \equiv (i\Gamma_0\partial_0 + i\Gamma_1\partial_1 + \dots + i\Gamma_6\partial_6 - \varkappa)\Phi = 0 \quad (30)$$

realizes a representation of the group  $P(1,6)$ .

The wave function of eq. (26) (or even eqs. (18)) describes an unusual multiplet: it unificates fermions and bosons into a multiplet. For example,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Lambda \\ K \\ \bar{\Lambda} \\ \bar{K} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

This circumstance is not unsatisfactory for eq. (26) from the viewpoint of, for example, the baryon number conservation law. The latter only causes some restrictions on possible forms of interactions. In the  $P(1,4)$  scheme the baryon number operator can be defined as usually (as a number of fermions  $\psi_{\frac{1}{2},0}^+$  minus a number of antifermions  $\psi_{\frac{1}{2},0}^-$ ). It is remarkable that the wave function (28) describes symmetrically both fermions and isofermions. Therefore in the  $P(1,4)$  scheme we can naturally define the operator of hypercharge as a number of isofermions  $\psi_{0,\frac{1}{2}}^+$  minus a number of anti-isofermions  $\psi_{0,\frac{1}{2}}^-$ . This allows eq. (26) to be considered as a fundamental equation for the dynamical approach to the classification scheme of d'Espagnat and Prentki [12].

As in the case of the Dirac equation in the  $P(1,3)$  scheme [13], in order to give an adequate physical interpretation of the wave function  $\Psi$  as a function of  $\mathbf{x}, x_4$ , one has to transit from the Dirac representation to the Foldy representation. The transition is performed by the unitary transformation

$$U = \exp\left(-i\frac{A_k p_k}{2p} \arctg \frac{p}{\varkappa}\right), \quad p = \sqrt{p_k^2}, \quad (32)$$

where  $A_k = i\gamma_k$  for eqs. (18) and  $A_k = i\Gamma_k$  for eq. (26).

In the Foldy–Shirokov representation eqs. (18) and (26) are of the form

$$i\partial_0\Psi = B\sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}\Psi, \quad (33)$$

where  $B = \gamma_0, -\gamma_0, \Gamma_0$  for eqs. (18a), (18b) and (26) correspondingly.

After the transformation (32), the formulae for the generators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  coincide with eq. (5) for  $n = 4$ , if the replacement  $\varepsilon \rightarrow B$  is made there.

### 5. The Kemmer–Duffin equations

Let us consider now an analogue of equations describing bosons with spin 0 and 1 in the  $P(1, 3)$  scheme, namely, the equations in Minkowski five-space which are of the form

$$(\beta_\mu\partial_\mu + \varkappa)\Phi = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (34)$$

where five Hermitian matrices  $\beta_\mu$  obey the algebra of the Kemmer–Duffin–Petiau type (KDP):

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\lambda + \delta_{\lambda\nu}\beta_\mu. \quad (35)$$

This algebra has three irreducible representations. The lowest representation is realized by  $6 \times 6$  matrices. The non-zero element of these matrices are schematically written down in table 1 where, for example, “1,6” denotes  $(\beta_1)_{1,6} = 1$ . Remind for comparison that the lowest representation of KDP algebra in the  $P(1, 3)$  scheme (i.e., when  $\mu \leq 4$ ) is realized by  $5 \times 5$  matrices.

Table 1  
The unit elements of  $6 \times 6$  matrices

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5

It can be shown by means of the method used in sect. 4 that eq. (34) with the  $6 \times 6$  matrices (35) realizes the representation

$$D^+(0, 0) \oplus D^-(0, 0) \oplus D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (36)$$

where the first two representations are realized by principal components of the vector function  $\Phi$ , on which the energy operator has non-vanishing eigenvalues, and the last representation is realised by redundant components of the vector function  $\Phi$ , on which the eigenvalues of the energy operator are equal to zero. These last have no physical sense but they are presented in all linear, with respect to  $\partial_\mu$ , equations, except for the Dirac-type equations. In such cases the Foldy–Wouthuysen transformation does not only split the states with positive and negative energies, but also makes it possible to omit the redundant components by an invariant way.

Thus, eq. (34) with the  $6 \times 6$  matrices (35), which can be obtained by a linearization procedure of the Klein–Gordon equation in the Minkowski five-space for a scalar, describes particles and antiparticles with  $s = t = 0$ .

Consider now a very interesting case: eq. (34) with the  $15 \times 15$  matrices  $\beta_\mu$  realizing an irreducible representation of algebra (35). These matrices can be taken, for example, in the form schematically given by table 2 where only the non-zero elements of the matrices  $\beta_\mu$  equal to  $\pm 1$ , are written down.

Now we shall find out what representation of the groups  $O(4)$  and  $P(1, 4)$  is realized by solutions  $\Phi$  of eq. (34) with matrices  $\beta_\mu$  of table 2.

Using the method proposed in ref. [14] for reducing the Kemmer-Duffin equations in the  $P(1, 3)$  scheme to the Schrödinger form, one can verify that eq. (34) is equivalent to the equation

$$i\partial_0\Phi = H\Phi, \quad H = S_{5k}p_k + \beta_5\kappa, \quad (37)$$

where

$$S_{5k} \equiv i(\beta_5\beta_k - \beta_k\beta_5), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Using eq. (35) it is easy to verify that the Hermitian matrices

$$S_{\mu\nu} \equiv i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu), \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (38)$$

obey the commutation relations for the generators of algebra, i.e., they realize a fifteen-dimensional representation of this algebra. The explicit form of the matrices  $\beta_\mu$  given by table 2 allows to find the quantity corresponding to the invariant  $P^2$  of  $P(1, 4)$

$$P^2 \equiv H^2 - p_k^2 = \kappa^2\beta_5^2, \quad \beta_5^2 = \begin{pmatrix} 1^4 & & & \\ & 0^6 & & \\ & & 1^4 & \\ & & & 0^1 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

where the upper indexes denote the dimensionality of the matrices. Table 2 allows us also to find the matrices  $S_{kl}$ .

Table 2  
Non-zero elements of  $15 \times 15$  matrices  $\beta_\mu$  equal to  $\pm 1$ .

$\beta_1$		$\beta_2$		$\beta_3$		$\beta_4$		$\beta_5$	
4, 15	15, 4	3, 15	15, 3	2, 15	5, 12	1, 15	15, 1	-1, 14	-14, 1
7, 14	14, 7	6, 14	14, 6	15, 14	14, 55	-5, 13	-13, 5	-2, 13	-13, 2
9, 13	13, 9	8, 13	13, 8	-8, 12	-12, 8	-6, 12	-12, 6	-3, 12	-12, 3
10, 12	12, 10	-10, 11	-11, 10	-9, 11	-11, 9	-7, 11	-11, 7	-4, 11	-11, 4

One can clearly see from the explicit form of diagonal matrices  $S^2, T^2, S_3, T_3, \varepsilon = \beta_5$  that eq. (34) with  $15 \times 15$  matrices  $\beta_\mu$  realize the representation

$$D^+\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D^-\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D(1, 0) \oplus D(0, 1) \oplus D(0, 0), \quad (40)$$

where the first two representations of the group  $P(1, 4)$  are realized by eight principal components of the vector function  $\Phi$  and the last three representations of the group

$O(4)$  are realized by seven redundant components of the vector function  $\Phi$ . Of course, only the eight components realizing the representation

$$D^+ \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \oplus D^- \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (41)$$

have a physical sense. From the seven redundant components the eight principal can be separated by transformation of the Foldy–Wouthuysen type

$$U = \exp \left( -i \frac{\beta_k p_k}{2p} \operatorname{arctg} \frac{p}{\varkappa} \right), \quad p \equiv \sqrt{p_k^2}. \quad (42)$$

This transformation splits in an invariant way eq. (34) with  $15 \times 15$  matrices into two independent equations, the first being for the principle components  $\psi(x_0, \mathbf{x}, x_4, s_3, t_3)$ ,  $s_3, t_3 = \pm \frac{1}{2}$  and coincide with eq. (8) in ref. [1], and the second being for redundant components  $\phi(x_0, \mathbf{x}, x_4, s_3, t_3)$ ,  $s_3, t_3 = 0, \pm 1$ , and  $\phi_0(x_0, \mathbf{x}, x_4)$  having no physical sense.

Thus, the Kemmer–Duffin equation (34) in Minkowski five-space with  $15 \times 15$  matrices describes symmetrically fermions and antifermions with spin and isospin  $s = t = \frac{1}{2}$  (multiplets of the type spinodoublet-isodoublet), i.e., for example, the systems of particles like a nucleon-antinucleon  $(N, \bar{N})$ . This equation is, of course,  $PTC$  invariant.

As it was mentioned above, in five-space the algebra KDP eq. (35) has three irreducible representations. The third irreducible representation is realized by  $20 \times 20$  matrices  $\beta_\mu$ . We do not present here the explicit form of the matrices and the analysis of the equation connected with them. Not only that the principal components of the wave function of this equation realize the representation

$$D^+(1, 0) \oplus D^-(1, 0) \oplus D^+(0, 1) \oplus D^-(0, 1) \quad (43)$$

of the group  $P(1, 4)$ , i.e., describe a meson multiplet like  $(\pi, \omega)$ , and is  $PTC$  invariant as well.

In this paper we have made the analysis of  $P(1, 4)$ -invariant equations of the Dirac and Kemmer–Duffin type. The analysis of another linear on  $\partial_\mu$  equations in five-dimensional space, for example, equations of the Rarita–Schwinger type, Pauli–Fierz type and other, can be made analogously. It is interesting to note that the Rarita–Schwinger formalism developed in the  $P(1, 3)$  scheme for finding equations for particles with arbitrary spin, can be generalized on the case of the  $P(1, 4)$  scheme without any difficulties. This is because of there are five matrices  $\gamma_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$ , obeying the algebra (16), and in the Rarita–Schwinger formalism for the  $P(1, 4)$  scheme all the five matrices are equal in rights. Note that in the case of the KDP algebra (35) the situation is another: there is no fifth  $5 \times 5$  or  $10 \times 10$  matrix  $\beta_5$  obeying the algebra (35).

It should finally be noted that the general form of the  $P(1, n)$ -invariant equation linear in  $\partial_\mu$  is

$$(B_\mu \partial_\mu + \varkappa) \Phi = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n, n+1, \quad (44)$$

where the operators  $B_\mu$  are defined by the relations

$$[B_\mu, S_{\rho\sigma}]_- = \delta_{\mu\rho} B_\sigma - \delta_{\mu\sigma} B_\rho, \quad \mu, \rho, \sigma = 1, \dots, n+1. \quad (45)$$

For the representation of class I the operators  $B_\mu$  are finite-dimensional, for those of class III the operators  $B_\mu$  can be both finite- and infinite-dimensional. Definite forms of operators  $B_\mu$  can be found by the method proposed in ref. [15].

For the case of the group  $P(1,4)$  eqs. (44) referred to either  $B_\mu$  or  $S_{\mu\nu}$  describe particles with either values of spin  $s$  or isospin  $t$ . These equations, however, contain a lot of redundant components. The analysis of eqs. (44) with matrices  $B_\mu$  answering the question which representation of the group  $P(1,4)$  is realized by the equation, and the  $P(1,4)$ -invariant split of the equation in principal and redundant parts, can be made with the help of the method illustrated here for the case of the Kemmer-Duffin equations (34).

As was shown in ref. [16], eq. (44) or any equation on the group  $P(1,4)$  is invariant under the discrete operators  $P, T, C$  if  $\Phi$  transforms by the following representation of the group  $P(1,4)$

$$D^+(s, t) \oplus D^-(s, t) \oplus D^+(t, s) \oplus D^-(t, s). \quad (46)$$

1. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79.
2. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149.
3. Shirokov Yu.M., *JETP (Sov. Phys.)*, 1957, **33**, 1196.
4. Joos H., *Fortschr. Phys.*, 1962, **10**, 65.
5. Foldy L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
6. Gelfand I.M., Zeitlin M., *DAN USSR*, 1950, **71**, 1017.
7. Gelfand I.M., Grayev M.I., *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo obshchestva*, 1959, **8**; *Izv. AN USSR, Ser. Math.*, 1965, **29**, 5.
8. Dirac P.A.M., *Proc. Roy. Soc. A*, 1936, **155**, 447.
9. Gelfand I.M., Minlos R.A., Shapiro Z.Ya., Representations of the rotation and Lorentz group and their applications, Moscow, Fizmatgiz, 1958 (in Russian).
10. Umezawa H., *Quantum field theory*, North-Holland, Amsterdam, 1956.
11. Fushchych W.I., Preprint ITF 69-17, Kiev, 1969.
12. d'Espagnat B., Prentki J., *Phys. Rev.*, 1955, **99**, 328.
13. Foldy L., Wouthuysen S., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
14. Case K.M., *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 1513.
15. Fushchych W.I., *Ukrain. Phys. J.*, 1966, **8**, 907.
16. Fushchych W.I., *J. Theor. Math. Phys.*, to be published.

# On representations of the inhomogeneous de Sitter group and on equations of the Schrödinger–Foldy type

W.I. FUSHCHYCH, I.Yu. KRIVSKY

This paper is a continuation and elaboration of our works [1] where some approach to the variable-mass problem were proposed. Here we have found a concrete realization of irreducible representations of the inhomogeneous group  $P(1, n)$  — the group of translations and rotations in  $(1 + n)$ -dimensional Minkowski space in two classes (when  $P_0^2 - P_k^2 > 0$  and  $P_0^2 - P_k^2 < 0$ ). All the  $P(1, n)$ -invariant equations of the Schrödinger–Foldy type are written down. Some questions of a physical interpretation of the quantum, mechanical scheme based on the inhomogeneous de Sitter group  $P(1, n)$  are discussed.

Report presented at the Conference on Composite Models of Elementary Particles (Institute for Theoretical Physics, Kiev, Ukrainian SSR, June 1968).

Данная работа является продолжением и развитием работ [1], где был предложен определенный подход к проблеме переменной массы. Здесь построена конкретная реализация неприводимых представлений неоднородной группы  $P(1, n)$  вращения и трансляций в  $(1 + n)$ -мерном пространстве Минковского в двух классах (когда  $P_0^2 - P_k^2 > 0$  и  $P_0^2 - P_k^2 < 0$ ). Выписаны  $P(1, n)$ -инвариантные уравнения типа Шредингера–Фолди. Рассмотрены некоторые вопросы физической интерпретации квантовомеханической схемы, основанной на неоднородной группе де Ситтера  $P(1, 4)$ .

Работа была доложена на Рабочем совещании по составным моделям элементарных частиц, состоявшемся в ИТФ АН УССР в июне 1968 г.

## 1. Introduction

Recall here the initial points of our approach to the variable mass problem proposed in ref. [1]:

A. The square of variable mass operator is defined as an independent dynamical variables

$$M^2 \equiv \varkappa^2 + P_4^2, \quad (1)$$

where  $\varkappa$  is a fixed parameter and  $P_4$  is an operator like the components of three-momentum  $\vec{P}$ , which commutes with all the generators of the algebra  $P(1, 3)$  of the Poincaré group.

B. The relation between the energy  $P_0$ , three-momentum  $\vec{P}$  and variable-mass  $M$  of a physical system is remained to be conventional (here everywhere  $\hbar = c = 1$ ):

$$P_0^2 = \vec{P}^2 + M^2 \equiv P_k^2 + \varkappa^2, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

C. The spaced  $p \equiv (p_0, p_1, \dots, p_4)$  and  $x \equiv (x_0, x_1, \dots, x_4)$  are assumed to be plane and reciprocally conjugated. It follows then from A, B and C that the generalized

relativistic group symmetry is the inhomogeneous de Sitter group<sup>1</sup>  $P(1,4)$  — the group of translations and rotations in five-dimensional Minkowski space. This group is a minimal extension of the conventional group of relativistic symmetry — the Poincaré group  $P(1,3)$ .

In this paper we shall present a further studying of the approach proposed in ref. [1]. In particular, the main assertions which were briefly formulated in ref. [1], are generalized here and their detail proofs are given. In Section 2 a concrete realization of irreducible representations for the generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  of the algebra  $P(1,n)$  with arbitrary  $n$  carried out, which made it possible to give a proof of the  $P(1,n)$ -invariance of the Schrödinger–Foldy type equations written down in ref. [1] for  $n = 4$ . Some questions of a physical interpretation of quantum mechanical scheme based on the group  $P(1,4)$  are considered in Section 3.

## 2. Realizations of the algebra representations

For the sake of generality all the considerations are made here not for the de Sitter group  $P(1,4)$  but for the group  $P(1,n)$  of translations and rotations in dimensional Minkowski space, which leaves unchanged, the form

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 \equiv x_0^2 - x_k^2 \equiv x_\mu^2, \\ \mu &= 0, 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $x_\mu$  are differences of point coordinates of this space.

Commutation relations for the generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  of the algebra  $P(1,n)$  are chosen in the form

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad -i[P_\mu, J_{\nu\sigma}] = g_{\mu\nu}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\nu, \quad (4a)$$

$$-i[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}, \quad (4b)$$

where  $g_{00} = 1$ ,  $-g_{kl} = \delta_{kl}$ ,  $P_\mu$  is Kroneker symbol,  $P_\mu$  are operators of infinitesimal displacements and  $J_{\mu\nu}$  are operators infinitesimal rotations in planes  $(\mu\nu)$ .

Authors of refs. [2–5] have studied all the irreducible representations of the Poincaré group  $P(1,3)$  and have found the concrete realization for the generators of its algebra. Their methods we generalize here for the case of group  $P(1,n)$ . But all the treatments are carried out in more general and compact form then it was done even for the case of  $P(1,3)$ .

For representations of the class I ( $P^2 \equiv P_0^2 - P_k^2 > 0$ ) when the group  $O(n)$  of rotations in a  $n$ -dimensional Euclidean space is the little group of the group  $P(1,n)$ , the generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  are of the form

$$\begin{aligned} P &= p \equiv (p_0, p_1, \dots, p_n) \equiv (p_0, p_k), \\ J_{kl} &= x_{[k}p_{l]} + S_{kl}, \quad J_{0k} = x_{[0}p_{k]} - \frac{S_{kl}p_l}{\sqrt{p^2 + p_k^2} + \sqrt{p^2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

where

$$P^2 \equiv p^2 \equiv p_0^2 - p_k^2 > 0, \quad x_{[\mu}p_{\nu]} \equiv x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,$$

<sup>1</sup>The algebras and groups connected with them are designated here with the same symbols.

operators  $x_\mu, p_\mu$  are defined by relations

$$[x_\mu, p_\mu] = -ig_{\mu\nu}, \quad [x_\mu, x_\nu] = [p_\mu, p_\nu] = 0, \quad (6)$$

and  $S_{kl}$  are matrices realizing irreducible representations  $D(s, t, \dots)$  of the algebra  $O(n)$  which have been completely studied in ref. [6] (here the numbers  $s, t, \dots$  are numbers which identify a correspondence irreducible representations of the algebra  $O(n)$ ). Using (6) and relations for the generators  $S_{kl}$  (which are not written down here), one can immediately verify that (5) actually satisfy the relations (4). Since in this class the little group of the group  $P(1, n)$  coincides with the compact group  $O(n)$ , all the irreducible representations of the group  $P(1, n)$  are here unitary and finite-dimensional (concerning a set of "spin" indexes  $s_3, t_3, \dots$ ).

A concrete form of the operators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  which are defined by Eqs. (5), depends on a choice of concrete form of matrices  $S_{kl}$  and operators  $x_\mu, p_\mu$  which are defined by relations (6). The concrete form of the operators  $x_\mu, p_\mu$  and  $S_{kl}$  depends on what of operators, constituting a complete set of commuting dynamical variables are operators of multiplication ("diagonal operators"). The sets  $(P_0, P_1, \dots, P_n, S_3, T_3, \dots)$  or  $(x_0, x_1, \dots, x_n, S_3, T_3, \dots)$  are examples of such a complete sets where  $S_3, T_3, \dots$  are all the independent commuting generators of the algebra  $O(n)$ . In the general case a complete set of dynamical variables is constructed from the corresponding number of commuting combinations of operators  $x_\mu, p_\mu$  and  $S_{kl}$ . Different concrete forms of operators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  which are defined by the choice of other complete set as diagonal, are connected by unitary transformations. The form (5) for the generators is the most general in the sense that it is not bound to the choice of concrete complete set as diagonal.

A few words about a space of vectors  $\Psi$ , in which the operators (5) are defined. It is an Hilbert space of vector-functions depending on the eigenvalues of operators of a diagonal complete set. For instance, in the  $x$ -representation where the operators  $x_\mu$  are diagonal (i.e., are operators of multiplication) and, as it follows from relations (6),  $p_\mu = ig_{\mu\nu}\partial_\nu$ ,  $\partial_\nu \equiv \partial/\partial x_\nu$  the operators (5) are defined in the Hilbert space of the vector-function  $\Psi = \Psi(x) = \Psi(x_0, x_1, \dots, x_n)$  of  $(1+n)$  independent variables  $x_\mu$ . The components of a vector  $\Psi$  are functions not only of  $x_0, x_1, \dots, x_n$  but also of auxiliary variables  $s_3, t_3, \dots$ , i.e., are functions  $\Psi(x_0, x_1, \dots, x_n, s_3, t_3, \dots)$ , where  $s_3, t_3, \dots$  are eigenvalues of "spin" operators  $S_3, T_3, \dots$  and, as it is known, take discrete values. In  $p$ -representation where  $p_\mu$  are operators of multiplication and, according to (6),  $x_\mu = ig_{\mu\nu}\partial/\partial p_\nu$  vector-functions are  $\Psi = \tilde{\Psi}(p) \equiv \tilde{\Psi}(p_0, p_1, \dots, p_n)$  and their components are  $\tilde{\Psi}(p_0, p_1, \dots, p_n, s_3, t_3, \dots)$ . The scalar product of vectors  $\Psi$  is defined as

$$\begin{aligned} (\Psi, \Psi') &\equiv \int d^{1+n}x \Psi^+(x)\Psi'(x) = \\ &= \int d^{1+n}x \sum_{s_3, t_3, \dots} \Psi^*(x, s_3, t_3, \dots)\Psi'(x, s_3, t_3, \dots) = \\ &= \int d^{1+n}p \tilde{\Psi}^+(p)\tilde{\Psi}'(p) = \int d^{1+n}p \sum_{s_3, t_3, \dots} \tilde{\Psi}^*(p, s_3, t_3, \dots)\tilde{\Psi}'(p, s_3, t_3, \dots), \end{aligned} \quad (7)$$

where  $d^{1+n}x = dx_0 dx_1 \dots dx_n$ ,  $\Psi$  and  $\tilde{\Psi}$  being connected by Fourier-transformations.

For representations of the class III ( $P^2 = P_0^2 - P_k^2 < 0$ ) when the little group of the group  $P(1, n)$  is already uncompact group  $O(1, n-1)$  of rotations in  $1 + (n-1)$ -dimensional pseudo-Eukclidean space, the generators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  are of the form

$$\begin{aligned}
 P &= p \equiv (p_0, p_k) = (p_0, p_a, p_n), \\
 J_{ab} &= x_{[a}p_{b]} + S_{ab}, & J_{an} &= x_{[a}p_{n]} - \frac{S_{ab}p_b - S_{a0}p_0}{\sqrt{-p^2 - p_a^2 + p_0^2} + \sqrt{-p^2}}, \\
 J_{0a} &= x_{[0}p_{a]} + S_{0a}, & J_{0n} &= x_{[0}p_{n]} - \frac{S_{0a}p_a}{\sqrt{-p^2 - p_a^2 + p_0^2} + \sqrt{-p^2}},
 \end{aligned} \tag{8}$$

where  $a, b = 1, 2, \dots, n-1$  the operators  $x_\mu, p_\mu$  are defined by relations (6) as before and the operators  $(S_{0a}, S_{ab})$  are generators of the algebra  $O(1, n-1)$  in corresponding irreducible representations which have been well studied by Gelfand and Grayev [7].

Components of vector-functions, in the space of which the operators (8) are defined, are the functions of variables  $s_3, t_3, \dots$  (besides of variables  $x_\mu$  or  $p_\mu$ , of course) which are the eigenvalues of the corresponding independent commute generators of the algebra  $O(1, n-1)$ . In contrast to the case I, in this case the variables  $s_3, t_3, \dots$  may take both discrete and continual values. Remind (see ref. [7]) that the group  $O(1, n-1)$  has both unitary and nonunitary representations, all the unitary representations being infinite-dimensional (in the last case the "spin" variables  $s_3, t_3, \dots$  take continual values). In accordance with this, among the representations of the group  $P(1, n)$  in the class III there will be both unitary (only infinite-dimensional) and nonunitary (finite- and infinite-dimensional) irreducible representations.

Now we shall give here a recipe of constructing the representations of the class III from those of the class I.

Note first that if operators  $P, J$  realize representation of the algebra  $P(1, n)$ , then operators  $\tilde{P}, \tilde{J}$  being defined by means of

$$(P_0, P_a, P_n) = (-i\tilde{P}_n, \tilde{P}_a, i\tilde{P}_0), \tag{9a}$$

$$\left( \begin{array}{c|c} J_{0a} & J_{0n} \\ \hline J_{ab} & J_{an} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} -i\tilde{J}_{na} & \tilde{J}_{n0} \\ \hline \tilde{J}_{ab} & i\tilde{J}_{a0} \end{array} \right), \tag{9b}$$

realize a representation of the algebra  $P(1, n)$  too. To proof this assertion, it is enough to verify that from the commutation relations (4) for  $P, J$  and from definitions (9), it follows that the operators  $\tilde{P}, \tilde{J}$  satisfy the commutation relations (4) too.

Define, further, the operators  $\tilde{x}, \tilde{p}$  and  $\tilde{s}$  by means of the following relations

$$(x_0, x_a, x_n) = (-i\tilde{x}_n, \tilde{x}_a, i\tilde{x}_0), \tag{10a}$$

from

$$(p_0, p_a, p_n) = (-i\tilde{p}_n, \tilde{p}_a, i\tilde{p}_0), \tag{10b}$$

$$(S_{ab}, S_{an}) = (\tilde{S}_{ab}, i\tilde{S}_{a0}). \tag{10c}$$

From (6) and (10a), (10b) it follows that operators  $\tilde{x}, \tilde{p}$  satisfy the relations (6) too, whereas the operators  $(\tilde{S}_{0a}, \tilde{S}_{ab})$  defined by Eqs. (10c) satisfy the commutation

relations for the generators of the algebra  $O(1, n-1)$ , as soon as the  $S_{kl}$  satisfy the commutation relations for the generators of the algebra  $O(n)$ .

Rewrite now the operators (3) in the form

$$\begin{aligned} P &= (p_0, p_a, p_n), & J_{ab} &= x_{[a}p_{b]} + S_{ab}, & J_{0n} &= x_{[a}p_{n]} + S_{an}, \\ J_{0a} &= x_{[0}p_{a]} - \frac{S_{ab}p_b + S_{an}p_n}{p_0 + \sqrt{p_0^2 - p_a^2 - p_n^2}}, & J_{0n} &= x_{[0}p_{n]} - \frac{S_{na}p_a}{\sqrt{p_0^2 - p_a^2 - p_n^2}}. \end{aligned} \quad (5')$$

Using the definitions (9) and (10) corresponding to the schematic substitution " $i0 \leftrightarrow n$ " when the operators with the symbol 2 " $\sim$ " are getting from the operators without the symbol " $\sim$ ", we obtain from (5):

$$\begin{aligned} P &\equiv (\tilde{p}_0, \tilde{p}_a, \tilde{p}_n) = (-ip_n, p_a, ip_0), \\ \tilde{J}_{ab} &= \tilde{x}_{[a}\tilde{p}_{b]} + \tilde{S}_{ab}, & i\tilde{J}_{a0} &= \tilde{x}_{[a}\tilde{p}_{0]} + i\tilde{S}_{a0}, \\ -i\tilde{J}_{na} &= -i\tilde{x}_{[n}\tilde{p}_{a]} - \frac{\tilde{S}_{ab}\tilde{p}_b - \tilde{S}_{a0}\tilde{p}_0}{-i\tilde{p}_n + \sqrt{-\tilde{p}_n^2 - \tilde{p}_a^2 + \tilde{p}_0^2}}, \\ \tilde{J}_{n0} &= \tilde{x}_{[n}\tilde{p}_{0]} - \frac{i\tilde{S}_{0a}\tilde{p}_a}{-i\tilde{p}_n + \sqrt{-\tilde{p}_n^2 - \tilde{p}_a^2 + \tilde{p}_0^2}}. \end{aligned} \quad (8')$$

By virtue of Eqs. (10a), we have  $\tilde{P}^2 = -P^2 < 0$ , so that (8') realizes a representations of the class III as soon as (5) realizes a representation of the class I. Omitting in (8') the symbol " $\sim$ ", we obtain (8).

Since all the representations of the class I are finite-dimensional, such a recipe allows to obtain only finite-dimensional representations of the class III (i.e., not all the representations of this class). If, however, getting (8) from (8'), the operators  $(\tilde{S}_{0a}, \tilde{S}_{ab})$  will be substituted by operators  $(S_{0a}, S_{ab})$  realizing an infinite-dimensional representation of the algebra  $O(1, n-1)$ , we obtain the corresponding infinite-dimensional representation of the algebra  $P(1, n)$ . Thus it is shown that the formula (8) defines all the representations of the class III of the algebra  $P(1, n)$ .

The representations of the class II ( $P^2 = 0$ ,  $P \neq 0$ ) requires a special treatment. However, in the case when one of invariants of the algebra  $P(1, n)$ , namely, the invariant

$$W \equiv \frac{1}{2} P_\mu J_{\nu\alpha}^2 - P_\mu P_\nu J_{\mu\sigma} J_{\nu\sigma},$$

vanishes, the representations of the class II are particular cases of representations of the class I, and formulaes for the generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  are obtained from (5) by the limit procedure  $p^2 \rightarrow 0$ . The detailed discussion of all the representations of the class II is not given here. As to the class IV ( $P = 0$ ), in this case the group  $P(1, n)$  reduces to the group  $O(1, n)$ , therefore the problem of classification and realization of representations of the algebra  $P(1, n)$  reduces to the problem of classification and realization of representations of the algebra  $O(1, n)$  already studied in ref. [7].

Let us discuss now a role of the variable  $x_0$ . If we mean possibility to Interpret vectors  $\Psi$  constituting the representation space for the group  $P(1, n)$ , as state vectors of the physical system (see below Section 3), we must interpret  $x_0$  as the time, i.e., as a parameter which is not an operator and which therefore is not to be included in a

complete set dynamical variables. It means that, for instance, in the  $x$ -representation a vector-function  $\Psi$  is a function of only  $n$  dynamical variables:  $\Psi = \Psi(x_1, \dots, x_n)$ . If the condition C of the Section 1 is not to be violated, the number of independent dynamical variables in  $p$ -representation coincides with those in  $x$ -representation, i.e., not all the dynamical variables  $p_0, p_1, \dots, p_n$  are independent. For the representations in which the invariant  $P^2$  is a fixed constant, the latter are connected by the relation

$$p^2 \equiv p_0^2 - p_k^2 = \varkappa^2 > 0, \quad p_0^2 - p_k^2 = -\eta^2 < 0 \quad (11)$$

for the class I and III respectively. One can, for example, chose

$$p_0 = \varepsilon \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2} \quad \text{and} \quad p_0 = \varepsilon \sqrt{p_k^2 - \eta^2}, \quad \varepsilon = \frac{p_0}{|p_0|} \quad (12)$$

for I and III. Then in  $p$ -representation  $\Psi = \tilde{\Psi}(p_1, \dots, p_n)$ . Of course, one can accept that  $\Psi = \varphi(p_0, p_1, \dots, p_n)$ , but under the condition (11), so that

$$\Psi = \varphi(p_0, p_1, \dots, p_n) = \sqrt{2p_0} \tilde{\Psi}(p_1, \dots, p_n) \delta(p^2 - a^2), \quad a = \varkappa^2, -\eta^2. \quad (13)$$

In the space of vector-functions  $\Psi$  discussed the scalar product can be defined by  $P(1, n)$ -invariant way:

$$\begin{aligned} (\Psi, \tilde{\Psi}) &= \int d^{1+n} p \varphi^+(p_0, p_1, \dots, p_n) \varphi'(p_0, p_1, \dots, p_n) = \\ &= \int d^n p \tilde{\Psi}^+(p_1, \dots, p_n) \tilde{\Psi}'(p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (14)$$

The operators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  defined in this space of vector-functions  $\Psi$ , have the form (5) and (8) where the substitution

$$x_{[0]p_k} \rightarrow -\frac{1}{2}(x_k p_0 + p_0 x_k), \quad (15)$$

is made,  $p_0$  is defined by (12),  $x_k$  and  $p_k$  are defined by relations

$$[x_k, p_l] = i\delta_{kl}, \quad [x_k, x_l] = [p_k, p_l] = 0, \quad (6')$$

while  $S_{kl}$  and  $(S_{0a}, S_{ab})$  are the same as in the formulae (5) and (8).

Thus, the “quantum mechanical” representation (of the Foldy–Shirokov [3, 5] type) of the generators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  of the algebra  $P(1, n)$  is of the form:

For the class I

$$\begin{aligned} P &= (p_0, p_k), \quad p_0 \equiv \varepsilon \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}, \\ J_{kl} &= x_{[k]p_l] + S_{kl}, \quad J_{0k} = -\frac{1}{2}(x_k p_0 + p_0 x_k) - \frac{S_{kl} p_l}{p_0 + \varkappa}; \end{aligned} \quad (16)$$

For the class III

$$\begin{aligned} P &= (p_0, p_k), \quad p_0 \equiv \varepsilon \sqrt{p_k^2 - \eta^2}, \\ J_{ab} &= x_{[a]p_b] + S_{ab}, \quad J_{an} = x_{[a]p_n] - \frac{S_{ab} p_b - S_{a0} p_0}{p_n + \eta}, \\ J_{0n} &= -\frac{1}{2}(x_n p_0 + p_0 x_n) - \frac{S_{0a} p_a}{p_n + \eta}, \quad J_{0a} = -\frac{1}{2}(x_a p_0 + p_0 x_a) + S_{0a}. \end{aligned} \quad (17)$$

Since operators  $Q = x_k, p_\mu, S, P_\mu, J_{\mu\nu}$  of (16) and (17) are defined on the space of vectors  $\Psi$  not depending on the time  $x_0$ , the representations (16) and (17) are, in fact, the representations of the algebra  $P(1, n)$  in the Heisenberg picture where for the operators  $Q$  as functions of the time  $x_0$ , the equation of motion

$$i\partial_0 Q = [Q, P_0] \quad (18)$$

is postulated.

In the Schrödinger picture vectors  $\Psi$  depends explicitly on the time  $x_0$  as on a parameter (but not as on a dynamical variable!) and for this dependence the equation of the Schrödinger–Foldy type is postulated

$$i\partial_0 \Psi(x_0) = P_0 \Psi(x_0), \quad (19)$$

where  $P_0$  is defined by (12) and in  $x$ -representation  $\Psi(x_0) = \Psi(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , in  $p$ -representation  $\Psi(x_0) = -\varphi(x_0, p_0, p_1, \dots, p_n)$  under the condition (11) or  $\Psi(x_0) = \Psi(x_0, p_1, \dots, p_n)$  etc. These functions are vector-functions, the manifold of which constitutes the representation space for irreducible representations of the group  $P(1, n)$  in the Schrödinger picture. It is clear therefore that their components are functions not only on  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (or  $x_0, p_1, \dots, p_n$  etc.) but also on “spin” variables  $s_3, t_3, \dots$  discussed above in connection with representations of homogeneous group  $O(n)$  and  $O(1, n-1)$ . In accordance with the domain of definition of “spin” variables  $s_3, t_3, \dots$  in different classes, the equation (19) is finite-component or infinite-component. In the class I, where “spin” variables  $s_3, t_3, \dots$  take only discrete and finite values, all the equations (19) are finite-component and their solutions  $\Psi$  realises the unitary representations (i.e., vectors  $\Psi$  are normalizable). In the class III we have both finite-component and infinite-component equations, but unitary representations can be realized only on the solutions of the infinite-component equations.

One can suspect that owing to standing out of the time  $x_0$  in the equation (19), the last is not invariant under the group  $P(1, n)$  discussed. For the equation (19) the conventional demand of invariance under the given group is equivalent to the demand that the manifold of its solutions is invariant under this group (i.e., that any of its solution under transformations from  $P(1, n)$  remains a solution of it but, generally speaking, another one). The mathematical formulation of this requirement is to satisfy the condition

$$[(i\partial_0 - P_0), Q]\Psi = 0, \quad (20)$$

where  $\Psi$  is any of solutions of Eq. (19) and  $Q$  is any generator of  $P(1, n)$  or any linear combination of them, i.e., any element of the algebra  $P(1, n)$ . Therefore the generators  $Q = P_\mu, J_{\mu\nu}$  must have such a form that both the relations (4) and the condition (20) must be satisfied. One can immediately verify that such operators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  are given by formulas (5) and (8) where, however, the substitution

$$x_{[0p_k]} \rightarrow x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k p_0 + p_0 x_k) \quad (15')$$

is made and operators  $x_k, p_\mu$  are defined by (6') and (12).

Thus, the “quantum mechanical” representation of the generators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  of the algebra  $P(1, n)$  in the Schrödinger picture have the form:

For the class<sup>2</sup> I

$$\begin{aligned}
 P &= (p_0, p_k), & p_0 &= \varepsilon \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}, \\
 J_{kl} &= x_{[k} p_{l]} + S_{kl}, & J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k p_0 + p_0 x_k) - \frac{S_{kl} p_l}{p_0 + \varkappa};
 \end{aligned}
 \tag{16'}$$

For the class III

$$\begin{aligned}
 P &= (p_0, p_k), & p_0 &= \varepsilon \sqrt{p_k^2 - \eta^2}, \\
 J_{ab} &= x_{[a} p_{b]} + S_{ab}, & J_{an} &= x_{[a} p_{n]} - \frac{S_{ab} p_b - S_{a0} p_0}{p_n + \eta}, \\
 J_{0a} &= x_0 p_a - \frac{1}{2}(x_a p_0 + p_0 x_a) + S_{0a}, \\
 J_{0n} &= x_0 p_n - \frac{1}{2}(x_n p_0 + p_0 x_n) - \frac{S_{0a} p_a}{p_n + \eta}.
 \end{aligned}
 \tag{17'}$$

It should be emphasized that in the Schrödinger picture the operators do not depend on the time  $x_0$ , except of the operators  $J_{0k}$ . These last depend on the time  $x_0$  only by due to the presence of the term  $x_0 p_k$ ; it is just the presence of the term  $x_0 p_k$  to satisfy the invariance condition (20) of the equation (19).

Note in the end of this section that last years the problem of using in physics some groups like  $P(m, n)$ ,  $O(m, n)$  etc. as groups of generalised symmetry, was repeatedly arised (see, for instance, ref. [8] and refs. in ref. [9]). The consequent physical analysis of a quantum scheme based on either unified group, is in fact possible only after a mathematical analysis of representations of this group and equations connected with it, like the analysis made here for the group  $P(1, n)$ . The method used here for studying the representations of the group  $P(1, n)$ , is extend on the groups  $P(m, n)$  without special difficulties. Thus the problem of classification of representations and realization of an inhomogeneous group  $P(m, n)$  is in fact reduced to the problem of classification and realization of homogeneous groups of the type  $O(m', n')$  already studied in ref. [7].

### 3. Physical interpretation

Last years many attempts of using different groups like  $O(m, n)$ ,  $P(m, n)$  as relativizing internal symmetry groups like  $SU(n)$ , were undertaken. The problem of a relativistic generalization of an internal symmetry group is in fact connected with finding a total symmetry group  $G$  containing non-trivially the Poincaré group  $P(1, 3)$  (the group of “external” symmetry) and a group of “internal” symmetry like  $SU(n)$ . As it is shown in refs. [10], it is impossible non-trivially to unity the algebra  $P(1, n)$  and the algebra of “internal” symmetries in the framework of a finite-dimensional algebra Lie  $G$ , if the spectrum of the mass operator  $M^2 \equiv P_0^2 - \vec{P}^2$  is discrete. In ref. [11] a non-trivial example of the algebra  $G \supset P(1, 3)$  was constructed for the case when the spectrum of the mass operator is already stripe; but the algebra  $G$  was found to be infinite-dimensional in this case too. The consideration of the infinite-dimensional algebras for the physical purposes is difficult both owing to the absence

<sup>2</sup>Our formulae (16') for generators  $P_\mu$ ,  $J_{\alpha\beta}$  in the case  $P^2 > 0$  coincide with the corresponding formulae (B.25–28) in ref. [5] if the last are rewritten in the tensor form.

of developed mathematical apparatus of such algebras and owing to the necessity of solving a very difficult problem of physical interpretation of all the commuting generators, the number of which is infinite. Do not speak about that the question of writing down equations of motions, invariant under such an algebras, is quite not clear. All this circumstances prompt that, to find a finite-dimensional algebra  $G \subset P(1,3)$  of a total symmetry group, we have to refuse from the demand of the discreteness or even striplicity of the mass spectrum. In this case one can propose many groups as total symmetry groups (the groups of the type  $P(m,n)$ ). However, in a  $G = P(m,n), O(m,n)$ , as like as in cases of other groups which are groups of coordinate transformations in spaces of great dimensions, it still arises a difficult problem of necessity to give a physical interpretation to the great number of commuting operators.

Below we deal only with the inhomogeneous de Sitter group  $P(1,4)$  which is a minimal extension of the Poincaré group  $P(1,3)$ . Here we discuss a main topics of physical interpretation of a quantum mechanical scheme based on this group. The group  $P(1,4)$  is the most attractive because of in this case it is a success to give a clear physical meaning to a complete set of commuting variables.

In  $p$ -representation a component of the wave function  $\Psi$  — the a solution of the equation (19) with  $n = 4$  is a function of six dynamical variables of corresponding complete set:

$$\Psi(x_0, \vec{p}, p_4, s_3, t_3).$$

As usually, this component is interpreted as the probability amplitude of finding (by measuring at the given moment of the time  $t = x_0$ ) the indicated values  $\vec{p}$ ,  $p_4$ ,  $s_3$ ,  $t_3$  of the complete set  $\vec{P}$ ,  $P_4$ ,  $S_3$ ,  $T_3$ . The physical meaning of the operators  $\vec{P}$  and  $P_4$  is given in Section 1. We discuss below the definition and physical meaning of the operators  $S_3$ ,  $T_3$  in the class I.

Remind that in the case of  $P(1,3)$  the operators  $S_{kl}$   $k, l = 1, 2, 3$  in (16') which constitute the spin vector  $\vec{S} = (S_{23}, S_{31}, S_{12})$ , are generators of the group  $O(3)$  (the little group of the group  $P(1,3)$  in the class I) and they are interpreted as an angular momenta of proper rotations. More exactly they should be interpreted as an angular momenta which are connected with intrinsic (internal) motion because when  $\vec{P} = 0$ , the angular momenta  $J_{kl}$  do not vanish but reduce to the spin angular momenta  $S_{kl}$ .

In the case of  $P(1,4)$  there are six angular momentum operators, which describe the internal motion of particle (i.e., the motion when  $\vec{p} = p_4 = 0$ ):  $J_{kl}/\vec{p}=p_4 = S_{kl}$ ,  $k, l = 1, \dots, 4$ . The operators  $S_{kl}$  are generators of the group  $O(4)$  (the little group of the group  $P(1,4)$ ) in the class I). They can be combined into two 3-dimensional vectors  $\vec{S}$  and  $\vec{T}$  defined by components

$$S_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} + S_{4a}), \quad T_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} - S_{4a}), \quad (21)$$

where  $(a, b, c) = \text{cycl}(1, 2, 3)$ . These components satisfy the relations

$$\begin{aligned} [S_a, S_b] &= iS_c, & [T_a, T_b] &= iT_c, \\ [S_a, \vec{S}^2] &= [T_a, \vec{T}^2] = [S_a, T_b] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Reminded that  $\vec{S}^2$  and  $\vec{T}^2$  are the invariants of the algebra  $O(4)$  being for irreducible representations  $D(s, t)$  of this algebra

$$\vec{S}^2 = s(s+1)\hat{1}, \quad \vec{T}^2 = t(t+1)\hat{1}, \quad (23)$$

where  $s, t = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$  and  $\hat{1}$  is the  $(2s+1)(2s+1)$ -dimensional unit matrix. It was just the relations (22) and (23) to allow us [1] to interpret 3-vectors  $\vec{S}$  and  $\vec{T}$  as the spin and isospin operators.

It is clear from (16') that in the representations of the class I the generators of the algebra  $P(1, 4)$  are constructed not only from the spin operators but also from the isospin operators (and, of course, of  $x_k$  and  $p_k$ ). In this sense in quantum mechanic scheme based on the group  $P(1, 4)$  the spin and isospin are presented on the same foot, unlike from the case of conventional theory. Furthermore, unlike from to the latter, in our case both the spin and isospin are entered dynamically. Indeed, in the conventional approach the group  $P(1, 3) \otimes SU(2)_T$  is taken as the total symmetry group, so that the generators of  $SU(2)_T$  commute with the generators of  $P(1, 3)$  (even in the presence of interactions). The group  $P(1, 4)$  which we taken as a total symmetry group, is not isomorphic to the group  $P(1, 3) \otimes SU(2)_T$  furthermore, as in can be seen from (21) and (16'),  $SU(2)_T \subset O(4) \subset P(1, 4)$  as like as  $SU(2)_S \subset O(4) \subset P(1, 4)$ , and the isospin operators (as like as the spin operators) do not commute with  $P(1, 3) \subset P(1, 4)$ .

The manifold of solutions of the equation (19) realizes in the case discussed the irreducible representation  $D^\pm(s, t)$  of the algebra  $P(1, 4)$ , where the sings “ $\pm$ ” refer to the values  $\varepsilon = \pm 1$  of the invariant – the sign of energy, the numbers as  $s$  and  $t$  determine the eigenvalues of the invariants

$$\vec{S}^2 = \frac{W}{4p^2} + \frac{V}{2\sqrt{p^2}}, \quad \vec{T}^2 = \frac{W}{4p^2} - \frac{V}{2\sqrt{p^2}}, \quad (24)$$

which are invariants both of  $P(1, 4)$  and  $O(4)$ .

In quantum scheme based on  $P(1, 4)$ , possible states of an “elementary particle” (when  $\varepsilon = +1$ ) or “antiparticle” (when  $\varepsilon = -1$ ) with given values of  $s$ ,  $t$  and  $p^2 = \varkappa^2$  are states which constitute the representation space for an irreducible representation  $D^\pm(s, t)$  of the group  $P(1, 4)$ . This is just the definition of the elementary particle in the  $P(1, 4)$ -quantum scheme. The simplest states of this particle are identified by eigenvalues of complete set of comuting variables. It is clear that the representation  $D^\pm(s, t)$ , irreducible with respect to  $P(1, 4)$ , is reducible with respect to  $P(1, 3) \subset P(1, 4)$  therefore the “elementary particle” defined here, is not elementary in the conventional sense (i.e., with respect to the group  $P(1, 3)$ ). Indeed, a solution  $\Psi$  of Eq. (19) with given  $s$  and  $t$  contains componets identified not only by values of the 3-component  $s_3$  of spin but also by values of the 3-components  $t_3$ , of isospin, so that the vector  $\Psi$  describes in fact the whole multiplet – the set of states with different values of  $t_3$ ,  $-t \leq t_3 \leq t$  (and, of course, of  $s_3$ ,  $s \leq s_3 \leq s$ ). For example, the vector  $\Psi^\pm$  with  $\varepsilon \pm 1$ ,  $s = 0$  and  $t = \frac{1}{2}$  describes a meson isodoublet like

$$\Psi^+ \equiv \begin{pmatrix} \Psi_{(0, \frac{1}{2})}^+ \\ \Psi_{(0, -\frac{1}{2})}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad \Psi^- = \begin{pmatrix} \tilde{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}.$$

The parameter  $\varkappa$  (the threshold value of the free state energy or the “bare” rest mass) is the same for all the members of the given multiplet. Of course, the introduction

of a suitable interaction into the equation (19) leads to the mass splitting within a multiplet.

The approach proposed may be found successful for a consequent description of unstable systems (resonances, particles or systems with non-fixed mass) already in the framework of the quantum mechanics<sup>3</sup>. As it is known, the conventional quantum mechanical approach deals with finding complex eigenvalues of energy operators which must be Hermitian in a Hilbert space of wave functions, i.e., in fact, one must go out of the framework of Hilbert space; the latter is connected with breaking of such a fundamental principles as unitarity, hermiticity etc. [12].

There are no similar difficulties in the quantum mechanical approach proposed. Indeed, here the mass operator is an independent dynamical variable (1), it is Hermitian, defined in the Hilbert space; therefore one can find its eigenvalues  $m^2$  and distributions  $\rho(m^2)$  in the same Hilbert space, as like as they find eigenvalues and distributions for operators of energy, momentum and other dynamical variables. For example, if we have a stationary wave function  $\Psi = \{\Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3)\}$  of, generally speaking, an unstable multiplet (we meant: a solution of an equation of the type (19) with an interaction not depending on the time  $x_0$ ) then

$$\rho(m^2, s_3, t_3) = \int d^3x \left| \int dx_4 e^{-i\sqrt{m^2 - \kappa^2}x_4} \Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3) \right|^2. \quad (25)$$

If the distribution (25) with the given  $s_3, t_3$  has one maximum, the experimentally observed mass of the particle with given  $s_3, t_3$  is defined either by the position of the maximum or form

$$\bar{m}^2 = \int d^3x dx_4 \Psi^*(\vec{x}, x_4, s_3, t_3) (p_4^2 + \kappa^2) \Psi(\vec{x}, x_4, s_3, t_3) \quad (26)$$

and its mean lifetime  $\tau$  is defined from

$$\bar{m}^2 \bar{\tau}^2 = 1. \quad (27)$$

If the distribution (25) has more than one maximum, the position of them defines an experimentally observed masses of unstable particles and the semi-widths of the distribution (25) in the regions of maximums define the lifetimes of corresponding unstable particles. If, finally,  $\rho(m^2, s_3, t_3)$  has a  $\delta$ -like singularity in a point  $m^2 = m_0^2$ , the  $m_0$  is identified with the mass of a stable particle.

It is important to emphasize that in accord with our interpretation, the particles experimentally observed are described not by the free equation (19), but by an equation of the type (19) with a suitable interaction which may breakdown the  $P(1, 4)$ -invariance, but, of course conserves the  $P(1, 3)$ -invariance<sup>4</sup>. As for solutions of the free equation (19) they are some hypothetical ("bare") states which may not correspond, to any real particles. From view point of this interpretation there are two types of interactions: interactions which cause a "dressing" of particles and are inherent even in asymptotical states, and usual interactions which cause a scattering processes of real ("dressed") particles. Therefore, in particular, the 5-dimensional

<sup>3</sup>The consequent consideration of such problems demands, obviously, the quantum field approach, but a quantum mechanical approach can be regarded as a half-phenomenology.

<sup>4</sup>In this sense the consideration of  $P(1, 4)$ -symmetry here presented is only a base for its suitable violation — analogously to considerations and violations of  $SU(n)$ -symmetries.

conservation law following from the free  $P(1,4)$ -invariant scheme; may have not a real sense.

In the interpretation of the  $P(1,4)$ -scheme proposed we automatically have the  $SU(2)_T$ -systematic of particles. In contrast to the conventional systematics, our one is a dynamical in the sense that for compaund model like those of Fermi–Yang, Goldhaber–Györgyi–Kristy and others we can write down an equation in which spin and isospin variables are mixed non-trivially.

Emphasize, that the interpretation of the  $P(1,4)$ -scheme proposed and, in particular, of the complete set of commuting variables mentioned above, was mainly based on the definition (1) of the varlable-mass operator as an independent dynamical variable. This interpretation does not pretend, of course, to be the only one and complete. In particular, the problem of giving the “fifth coordinate”  $x_4$  the more immediate physical sense than that one laying under its definition as a dynamical variable canonically conjugated to the mass variable  $p_4$ , and the same problem refers to operators like  $J_{04}$ ,  $J_{a4}$ ,  $a = 1, 2, 3$  we do not discusse here. The more detail discussion of these problem is possible only in connection with considerations of solutions of equations like Eq. (19) with sutable interactions what is not a subject of this article.

Here we have considered the  $P(1,n)$ -invariant equations of the Schrödinger–Foldy type in an arbitrary dimensional Minkowski space, in which the differential operators  $\partial_k \equiv \partial/\partial x_k$  of the “space” variables are presented under square root. This equations describing the positive and negative states separately, are suitable for quasirelativistic quantum mechanical considerations (e.g., for calculations of spin-isospin effects in  $P(1,4)$ -invariant equations with interactions included). Theoretic-field considerations are usually based on equations of first order on  $\partial_\mu$ . The general form of  $P(1,n)$ -invariant linear on  $\partial_\mu$  equation is

$$(B_\mu \partial_\mu \pm \varkappa) \Phi^\pm = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n, n+1, \quad (28)$$

where the operators  $B_\mu$  are defined by the relations

$$[B_\mu, J_{\rho\sigma}] = \delta_{\mu\rho} B_\sigma - \delta_{\mu\sigma} B_\rho, \quad (\mu, \rho, \sigma = 1, \dots, n+1). \quad (29)$$

For the representation of the class I the operators  $B_\mu$  are finite-dimensional; for those of the class III the operators  $B_\mu$  can be both finite- and infinite-dimensional. Concrete forms of operators  $B_\mu$  can be founed by the method proposed in ref. [13].

In this paper we have not considered the problem of invariance of the equation (28) as to discrete transformations, that is relatively to

$$x'_k = -x_k, \quad x'_0 = -x_0. \quad (30)$$

This problem has been investigated by one of us [14]. As it is shown in [14] the equation (28) for  $n = 2m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , is neither invariant as to transformations (30) nor

$$x'_0 = -x_0, \quad x'_k = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2m. \quad (31)$$

Thus, in the field theory constructed on the basis of the groups  $P(1,2)$ ,  $P(1,4)$ ,  $P(1,6)$  and so on the theorem  $CPT$  may be broken down. It should be emphasized, however, that the direct of the manifold of solutions  $\{\Phi^+\}$  and  $\{\Phi^-\}$   $T$ -,  $CPT$ -invariant.

1. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79;  
Фушич В.И., Кривский И.Ю., Препринт ИТФ-68-72, Киев, 1968.
2. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149.
3. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
4. Joos H., *Fortschr. Phys.*, 1962, **10**, 65.
5. Foldy L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
6. Гельфанд И.М., Цейтлин М., *ДАН СССР*, 1950, **71**, 1017.
7. Гельфанд И.М., Граев М.И., *Труды Московского математического общества*, 1959, **8**; *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1965, **29**, 5.
8. Hederfledt G.C., Henning J., *Fortschr. Phys.*, 1968, **16**, 491.
9. Соколик Г.А., Групповые методы в теории элементарных частиц, Атомиздат, М., 1965.
10. O'Raifeartaigh L., *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **14**, 575;  
Jost R., *Helv. Phys. Acta*, 1966, **39**, 369.
11. Фушич В.И., *Укр. физ. журн.*, 1968, **13**, 362.
12. Mathews P.T., Salam A., *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 283.
13. Фушич В.И., *Укр. фіз. журн.*, 1966, **8**, 907.
14. Фушич В.И., *Письма ЖЭТФ*, 1969.

# Уравнения Баргмана–Вигнера на неоднородной группе де Ситтера

В.И. ФУЩИЧ, Л.П. СОКУР

In the paper the equations of the Bargman–Wigner type invariant under the inhomogeneous de Sitter group  $P(1,4)$  (the rotation and translation group in the five-dimensional plane Minkovski space) are constructed. A detailed group-theoretical analysis of these equations is carried out. The explicit form of the generators of the group  $P(1,4)$  is derived for the case when the basic invariants of this group  $P^2 = W = V = 0$ . The question of the invariance of the Bargman–Wigner equations under the  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -transformation is considered.

Report presented at the 3d Conference on Axiomathical Field Theory and Theory of Elementary Particles (Institute for Theoretical Physics, Kiev, Ukrainian SSR, April 1969).

В работе построены уравнения типа Баргмана–Вигнера, инвариантные относительно неоднородной группы де Ситтера (группы вращений и трансляций в пятимерном плоском пространстве Минковского)  $P(1,4)$ . Проведен детальный теоретико-групповой анализ этих уравнений. Найден явный вид генераторов группы  $P(1,4)$  в том случае, когда основные инварианты этой группы  $P^2 = W = V = 0$ . Рассмотрен вопрос об инвариантности уравнений Баргмана–Вигнера относительно  $T$ -,  $P$ -,  $C$ -преобразований.

Работа была доложена на 3-ем Рабочем совещании по аксиоматической теории поля и теории элементарных частиц, состоявшемся в ИТФ АН УССР в апреле 1969 г.

## Введение

Идея использования пространств размерности выше, чем четыре, интенсивно обсуждалась в физике довольно давно в связи с объединением теории тяготения и электричества, а также в связи с построением волновой оптики в пятимерном пространстве (обзор этих работ см. [1]). В настоящее время эта идея вновь широко обсуждается в результате объединения группы Пуанкаре  $P(1,3)$  с группами “внутренних симметрий” [2]. Полагают, что на этом пути удастся получить спектр масс и другие характеристики элементарных частиц. Расширение четырехмерного пространственно-временного континуума может оказаться также плодотворным для описания нестабильных систем (резонансов) [3]. В связи с этим представляет интерес детально рассмотреть одно из таких расширений.

В настоящей работе обсуждается минимальное расширение четырехмерного пространства — 5-мерное пространство Минковского, в котором в качестве группы симметрии выбирается группа вращений и трансляций. Таким образом, группой симметрии в 5-мерном плоском пространстве Минковского является неоднородная группа де Ситтера, которую обозначим через  $P(1,4)$ . Ясно, что группа  $P(1,4)$  содержит в качестве подгруппы группу Пуанкаре  $P(1,3)$ , поэтому теория, построенная на основе группы  $P(1,4)$ , будет определенным обобщением релятивистской квантовой механики. Для построения основ квантовой механики, основывающейся на группе  $P(1,4)$ , в качестве первого шага необходимо написать уравнения

движения “частицы” (системы относительно  $P(1, 3)$ ), инвариантные относительно группы  $P(1, 4)$ . Все уравнения типа Шредингера–Фолди на группе  $P(1, 4)$  описаны в работе [4].

В § 1, 2 данной работы построены уравнения типа Баргмана–Вигнера, инвариантные относительно группы  $P(1, 4)$  в том случае, когда один из инвариантов группы  $P(1, 4)$   $P^2 = P_\mu^2 > 0$ . Рассмотрены детально два примера таких уравнений, описывающих нуклон и систему типа  $(K^*, \Sigma)$ .

В § 3 найдены уравнения типа Баргмана–Вигнера для случая  $P^2 = P_\mu^2 = 0$ , т.е. построены уравнения, описывающие свободное движение частицы с нефиксированной массой, но с фиксированным спином. Найден явный вид генераторов группы  $P(1, 4)$  в этом случае.

В § 4 изучены свойства уравнений Дирака относительно пространственного и временного отражений, а также операции зарядового сопряжения.

В § 5, положив в основу восьмикомпонентное уравнение Дирака, получены уравнения типа Баргмана–Вигнера, которые инвариантны относительно  $C$ -,  $P$ -,  $T$ -преобразований. Детально рассмотрено одно из таких уравнений.

### § 1. Уравнения типа Баргмана–Вигнера (случай $P^2 = \varkappa^2 > 0$ )

1. Генераторы группы  $P(1, 4)$  удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, & [P_\mu, J_{\nu\sigma}] &= i(g_{\mu\nu}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}), \\ g_{00} &= 1, & g_{kl} &= -\delta_{kl}; \quad \mu = 0, 1, \dots, 4; \quad k, l = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Операторы Казимира для этой группы строятся из генераторов  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  и имеют вид [3]:

$$P^2 = P_0^2 - \vec{P}^2 - P_4^2 \equiv P_\mu^2, \quad (1.2)$$

$$V = \frac{1}{4}J_{\mu\nu}w_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

$$W = \frac{1}{6}v_{\mu\nu\sigma}^2 = \frac{1}{2}w_{\mu\nu}^2, \quad (1.4)$$

$$\varepsilon = \frac{P_0}{|P_0|}, \quad (1.5)$$

где

$$v_{\mu\nu\sigma} = P_\mu J_{\nu\sigma} + P_\nu J_{\sigma\mu} + P_\sigma J_{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

$$w_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho\eta}P_\sigma J_{\rho\eta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho\eta}v_{\sigma\rho\eta}, \quad (1.7)$$

$\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho\eta}$  — единичный полностью антисимметричный псевдотензор пятого ранга.

Малой группой в классе I ( $P^2 > 0$ ) группы  $P(1, 4)$  является группа  $O(4)$ , генераторы которой будут обозначаться как  $S_{kl}$ :

$$S_{kl} = J_{kl} \Big|_{P_k=0}, \quad (1.8)$$

$$[S_{kl}, S_{ij}] = i (\delta_{ki} S_{lj} + \delta_{lj} S_{ki} - \delta_{kj} S_{li} - \delta_{li} S_{kj}). \quad (1.9)$$

Группа  $O(4)$  локально изоморфна группе  $O_S(3) \otimes O_T(3)$ , откуда следует, что группа  $P(1, 4)$  является нетривиальным объединением группы Пуанкаре и изотопической группы внутренних симметрий, поскольку, в свою очередь, группа  $O(3)$  локально изоморфна группе  $SU(2)$ . Отметим, что группу  $O_T(3)$  можно, вообще говоря, связывать с  $W$ -спином [5]. В дальнейшем, однако, с группой  $O_T(3)$  мы будем связывать изоспин, а не  $W$ -спин.

В системе отсчета  $P_k = 0$ , инварианты  $V$  и  $W$  связаны с инвариантами группы  $O(4)$  следующими соотношениями:

$$V = \varepsilon \varkappa \left( \vec{S}^2 - \vec{T}^2 \right), \quad (1.10)$$

$$W = 2\varkappa \left( \vec{S}^2 + \vec{T}^2 \right), \quad (1.11)$$

где операторы  $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$  и  $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$  определены соотношениями

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \epsilon_{abc} S_{bc} + S_{4a} \right), \\ T_a &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \epsilon_{abc} S_{bc} - S_{4a} \right), \quad (a, b, c = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Все неприводимые представления класса I унитарны, конечномерны и задаются числами  $s$ ,  $t$  и  $\varepsilon$  (знак энергии). Операторы  $\vec{S}^2$ ,  $\vec{T}^2$  и  $\varepsilon$  для неприводимых представлений  $P(1, 4)$  кратны единичным операторам

$$\vec{S}^2 = s(s+1)1, \quad \vec{T}^2 = t(t+1)1, \quad \varepsilon = \varepsilon \cdot 1, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (1.13)$$

Числа  $s$  и  $t$  (могут принимать только целые и полуцелые положительные значения) отождествляются со спином и изоспином частицы соответственно. Неприводимое представление класса I будем обозначать в дальнейшем через  $D^{(\varepsilon)}(s, t)$ .

**2.** В пятимерной схеме, как и в четырехмерной, имеется два уравнения Дирака:

$$p^\mu \gamma_\mu \Psi^+(t, x) = \varkappa \Psi^+(t, x), \quad (1.14)$$

$$p^\mu \gamma_\mu \Psi^-(t, x) = -\varkappa \Psi^-(t, x), \quad x \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (1.15)$$

или

$$H^+ \Psi^+(t, x) = i \frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial t}, \quad (1.14')$$

$$H^- \Psi^-(t, x) = i \frac{\partial \Psi(t, x)}{\partial t}, \quad (1.15')$$

$$H^\pm \equiv \gamma_0 \gamma_k p_k \pm \gamma_0 \varkappa = \alpha_k p_k \pm \beta \varkappa,$$

где  $\gamma_\mu$  — пять четырехрядных матриц, которые удовлетворяют соотношениям

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2g_{\mu\nu}, \quad \gamma_0 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \quad (1.16)$$

$\gamma_0$  — эрмитова;  $\gamma_k$  — антиэрмитова.

Характерной особенностью пятимерной схемы (в отличие от четырехмерной) является неэквивалентность между собой уравнений (1.14) и (1.15), т.е. не существует матрицы  $A$ , которая бы устанавливала однозначное соответствие между уравнениями (1.14) и (1.15). Эта особенность приводит к тому, что уравнение (1.14) или (1.15), как будет показано,  $PTC$ -неинвариантно. Таким образом, в схеме  $P(1, 4)$  существует два различных уравнения Дирака.

На решениях уравнений (1.14) и (1.15) реализуется следующие представления группы  $P(1, 4)$ :

$$\begin{aligned} P_0^\pm &\equiv H^\pm = \gamma_0 \gamma_k p_k \pm \gamma_0 \varkappa, & P_k &= p_k, \\ J_{kl} &= x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, & S_{kl} &= \frac{i}{4} [\gamma_k, \gamma_l]_-, \\ J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2} [x_k, H^\pm]_+. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Можно выбрать такое представление  $\gamma_\mu$ -матриц, когда операторы  $S_a$  и  $T_a$  принимают вид:

$$S_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

где  $\sigma_a$  — матрицы Паули.

Исходя из (1.18), нетрудно найти явный вид операторов  $\vec{S}^2$  и  $\vec{T}^2$  и доказать, что уравнения (1.14) и (1.15) реализуют представления

$$D^{(+)} \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \oplus D^{(-)} \left( 0, \frac{1}{2} \right) \quad (1.19)$$

и

$$D^{(+)} \left( 0, \frac{1}{2} \right) \oplus D^{(-)} \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \quad (1.20)$$

группы  $P(1, 4)$  соответственно.

Найдем, далее, уравнение, описывающее свободное движение частицы произвольного спина и изospина  $s$  и  $t$ . Если непосредственно использовать методику Баргмана–Вигнера [6], применительно к уравнению (1.14) или (1.15), то, как будет ясно из дальнейшего, мы не сможем получить уравнений для произвольных  $s$  и  $t$ . Поэтому необходимо несколько изменить метод Баргмана–Вигнера (Б–В), применительно к схеме  $P(1, 4)$ .

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} p^\mu \gamma_\mu^{(m)} \Psi &= \varkappa \Psi, \\ p^\mu \gamma_\mu^{(n)} \Psi &= -\varkappa \Psi, \end{aligned} \quad (1.21)$$

которую удобно привести к шредингеровской форме

$$\begin{aligned} p_0 \Psi &= H \Psi = \left( \gamma_0^{(m)} \gamma_k^{(m)} p_k + \gamma_0^{(m)} \varkappa \right) \Psi, \\ p_0 \Psi &= H \Psi = \left( \gamma_0^{(n)} \gamma_k^{(n)} p_k - \gamma_0^{(n)} \varkappa \right) \Psi, \end{aligned} \quad (1.21')$$

где  $m = 1, 2, \dots, M$ ;  $n = M + 1, M + 2, \dots, M + N$ ;  $M$  и  $N$  — два целых числа.

Матрицы  $\gamma_\mu^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, M + N$ ) определяются как

$$\gamma_\mu^{(i)} = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes \gamma_\mu \otimes \dots \otimes 1, \quad (1.22)$$

где кронекеровское произведение (1.22) содержит  $M + N$  сомножителей, причем  $\gamma_\mu$  входят в это произведение в качестве  $i$ -го сомножителя. Все остальные сомножители (1.22) являются единичными матрицами размерности  $(4 \times 4)$ .

Из инвариантности уравнений (1.21) относительно преобразований из группы  $P(1, 4)$  следует, что если  $\{\Psi\}$  — пространство, решений этой системы уравнений, тогда на  $\{\Psi\}$  реализуется некоторое представление группы  $P(1, 4)$ . По отношению к малой группе  $O(4)$ , элемент  $\Psi \in \{\Psi\}$  является некоторым мультиспинором, компоненты которого  $\Psi(t, x; \xi_1, \dots, \xi_m, \dots, \xi_M, \xi_{M+1}, \dots, \xi_{M+N})$  определяются значениями  $M + N$  дискретных переменных  $\xi_i$  ( $\xi_i = 1, 2, 3, 4$ ). Хотя операторы  $p^\mu \gamma_\mu^{(i)}$  определены на каждом элементе из прямого произведения

$$\prod_{m=1}^M \otimes \{\Psi^+\}_m \cdot \prod_{n=M+1}^{M+N} \otimes \{\Psi^-\}_n \equiv \{F\}, \quad (1.23)$$

где  $\Psi^+$  и  $\Psi^-$  — решения уравнений (1.14) и (1.15) с компонентами  $\Psi^+(t, x; \xi_m)$  и  $\Psi^-(t, x; \xi_n)$ , соответственно, решением уравнений (1.21) будет не каждый элемент из пространства (1.23).

Действительно, из вида уравнений (1.21) легко убеждаемся, что если  $\Psi \in \{\Psi\}$ , тогда все  $\Psi$  принадлежат одинаковым собственным значениям  $P^2$ :

$$P^2 \Psi = \varkappa^2 \Psi. \quad (1.24)$$

Таким образом,  $\{\Psi\} \subset \{F\}$ , но  $\{\Psi\} \neq \{F\}$ , поскольку известно, что  $F$  разлагается в интегральную сумму инвариантных относительно  $P(1, 4)$  подпространств. Как будет видно из дальнейшего, на элементы  $\{\Psi\}$  налагаются, помимо (1.24), еще дополнительные условия (см. (1.37)).

Генераторы группы  $P(1, 4)$ , действующего в пространстве  $\{\Psi\}$ , можно определить, учитывая (1.17), (1.23) и условие (1.24), следующим образом:

$$\begin{aligned} P_0 = H &= \frac{1}{2} [\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_k]_- \cdot p_k + \varkappa \tilde{\gamma}_0, & P_k &= p_k, \\ J_{kl} &= (x_k p_l - x_l p_k) + \tilde{S}_{kl}, & J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2} (H x_k + x_k H), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где

$$\tilde{\gamma}_\mu = \sum_{m=1}^M \binom{m}{\mu} \gamma_\mu^{(m)} - \sum_{n=M+1}^{M+N} \binom{n}{\mu} \gamma_\mu^{(n)}, \quad (1.26)$$

$$\tilde{S}_{kl} = \sum_{i=1}^{M+N} S_{kl}^{(i)} = \frac{i}{4} [\tilde{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_l]_-. \quad (1.27)$$

В выражении (1.27) (и везде в дальнейшем) верхний индекс  $(i)$  имеет тот же самый смысл, что и в формуле (1.22), т.е.

$$S_{kl}^{(i)} \equiv 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes S_{kl} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1,$$

<sup>(i)</sup> в  $S_{kl}$  входит всего  $M + N$  сомножителей, а единственный, отличный от 1 сомножитель  $S_{kl}$  ( $S_{kl} \equiv \frac{i}{4}[\gamma_k, \gamma_l]_-$ ), стоит на  $i$ -ом месте.

Упорядоченное множество дискретных переменных  $\{\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{M+N}\}$ , которыми нумеруются компоненты вектора  $\Psi$ , разобьем на два подмножества

$$\{\xi_1, \dots, \xi_m, \dots, \xi_M\} \equiv \{m\}, \quad \{\xi_{M+1}, \dots, \xi_n, \dots, \xi_{M+N}\} \equiv \{n\}$$

и заметим, что система (1.21), а также генераторы (1.25) инвариантны относительно перестановок переменных  $\xi$  внутри каждого из упорядоченных подмножеств  $\{m\}$  и  $\{n\}$ . Поэтому можно считать, что решение уравнений (1.21) обладает некоторой симметрией относительно операций перестановок

$$\xi_m \leftrightarrow \xi_{m'}, \quad \xi_m, \xi_{m'} \in \{m\} \quad (1.28')$$

и относительно

$$\xi_n \leftrightarrow \xi_{n'}, \quad \xi_n, \xi_{n'} \in \{n\}. \quad (1.28'')$$

Будем находить только те решения уравнений (1.21), которые обладают полной симметрией относительно операции (1.28') и операции (1.28''). Докажем, что в этом случае, пространство решений  $\{\Psi\}$  реализует представление

$$D^{(+)}\left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right) \otimes D^{(-)}\left(\frac{N}{2}, \frac{M}{2}\right) \quad (1.29)$$

группы  $P(1, 4)$ .

Для этой цели, осуществим над уравнениями (1.21) преобразование Фолди-Войтхойзена-Перси [7, 8]

$$\Psi \rightarrow \Phi = U\Psi, \quad (1.30)$$

$$U = \prod_{m=1}^M U^{(m)+} + \prod_{n=M+1}^{M+N} U^{(n)-}, \quad (1.31)$$

где операторы  $U^{(m)+}$ ,  $U^{(n)-}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} U^{(m)+} &= [2\omega(\omega + \varkappa)]^{-1/2} \left( \omega + \varkappa + \gamma_k^{(m)} p_k \right), \\ U^{(n)-} &= [2\omega(\omega + \varkappa)]^{-1/2} \left( \omega + \varkappa - \gamma_k^{(n)} p_k \right), \quad \omega = \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Как видно из определения матрицы  $\gamma_\mu^{(i)}$  (1.22), эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \left[ \gamma_\mu^{(i)}, \gamma_\nu^{(i')} \right]_- &= 0, \quad \text{если } i \neq i', \\ \left[ \gamma_\mu^{(i)}, \gamma_\nu^{(i)} \right]_+ &= 2g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \left[ U^+, H \right] &= 0, & \text{если } m \neq i, \\ \left[ U^-, H \right] &= 0, & \text{если } n = i, \\ U^+ H \left( U^+ \right)^{-1} &= \gamma_0 \omega, \\ U^- H \left( U^- \right)^{-1} &= -\gamma_0 \omega. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Преобразованием (1.30) система (1.21') приводится к виду

$$\begin{aligned} p_0 \Phi &= \omega \gamma_0 \Phi, \\ p_0 \Phi &= -\omega \gamma_0 \Phi. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Поскольку оператор  $U$  коммутирует с операциями вида (1.28') и (1.28''), волновая функция  $\Phi$  будет обладать той же самой симметрией, что и волновая функция  $\Psi$ . Мы выбираем те же самые обозначения для дискретных переменных, определяющих компоненты вектора  $\Phi \in \{\Phi\}$  ( $\{\Phi\}$  — пространство решений системы (1.35)), так что компонента  $\phi$  вектора  $\Phi$  обозначается как

$$\phi \equiv \phi(t, x; \xi_1, \dots, \xi_m, \dots, \xi_M, \xi_{M+1}, \dots, \xi_n, \dots, \xi_{M+N}) \equiv \phi(\xi_m \in \{m\}, \xi_n \in \{n\}),$$

причем предполагается полная симметрия относительно перестановок внутри каждой из совокупностей  $\{m\}$  и  $\{n\}$ .

Генераторы (1.25) преобразованием  $U$  приводятся к виду:

$$\begin{aligned} P'_0 &= \omega \tilde{\gamma}_0, & P'_k &= p_k, & J'_{kl} &= (x_k p_l - x_l p_k) + \tilde{S}_{kl}, \\ J'_{0k} &= x_0 p_k - \frac{\tilde{\gamma}_0}{2} [\omega, x_k]_+ + \frac{\tilde{\gamma}_0 p_l}{\omega + \varkappa} \tilde{S}_{kl}, \end{aligned} \tag{1.36}$$

где  $x_\mu$ ,  $p_\mu$ ,  $\tilde{S}_{kl}$  — те же самые операторы, которые входят в (1.25).

Покажем теперь, что вектор  $\Phi \in \{\Phi\}$  определяется только через  $2(M+1)(N+1)$  своих компонент. Приравнивая левые части уравнений (1.35), получим следующие условия на  $\Phi$

$$\gamma_0^{(m)} \Phi = \gamma_0^{(m')} \Phi, \tag{1.37a}$$

$$\gamma_0^{(n)} \Phi = \gamma_0^{(n')} \Phi, \tag{1.37б}$$

$$\gamma_0^{(m)} \Phi = -\gamma_0^{(n)} \Phi, \tag{1.37в}$$

которые сужают пространство  $\{F' | P^2 F = \varkappa^2 F'\}$  к пространству решений  $\{\Phi\}$ , где  $F' = UF$ . Действительно, если расписать условия (1.37a)–(1.37в), как условия для компонент  $\phi$  и выбрать представление  $\gamma_\mu$  матриц, где  $\gamma_0$  — диагональна с элементами  $(1, 1, -1, -1)$ , тогда условие (1.37a) будет означать, что только те компоненты

$\phi$  отличны от нуля, у которых все переменные  $\xi_m \in \{m\}$  принимают либо значения  $\xi_m = 1, 2$ , либо значения  $\xi_m = 3, 4$ . Условие (1.37б) требует того же самого для переменных  $\xi_n \in \{n\}$ . Условие (1.37в) показывает, что если переменные  $\xi_m$  принимают значения 1, 2, тогда переменные  $\xi_n$  должны принимать значения 3, 4 и, наоборот, если  $\xi_m = 3, 4$ , тогда  $\xi_n = 1, 2$ , в противном случае компонента  $\phi \equiv 0$ . Таким образом, отличны от нуля лишь следующие компоненты  $\Phi$  (если конечно  $\Phi$  — решение уравнений (1.35)):

$$\begin{aligned}\Phi^{(+)} &= \{\Phi^{(+)}(\xi_m = 1, 2; \xi_n = 3, 4)\}, \\ \Phi^{(-)} &= \{\Phi^{(-)}(\xi_m = 3, 4; \xi_n = 1, 2)\}.\end{aligned}\quad (1.38)$$

В (1.38) знаком  $(\pm)$  обозначены компоненты векторов  $\Phi$ , которые принадлежат собственным значениям  $\pm 1$  инварианта  $\varepsilon' = \tilde{\gamma}_0$  ( $\varepsilon'$  — инвариант знака энергии в представлении Фолди–Войтхойзена–Широкова).

Удобно переобозначить ненулевые компоненты векторов (1.38) через  $\phi_{r,g}^{(+)}(t, x)$  и  $\phi_{g,r}^{(-)}(t, x)$ , где числа  $r, g$  равны числу переменных  $\xi$ , принимающих у данной компоненты значение 1 и 3 соответственно. Ясно, что компоненты (1.38) симметричного мультиспинора  $\Phi$  взаимно однозначно соответствуют компонентам в обозначениях  $\phi_{r,g}$ . У компонент  $\phi^{(\pm)}$  индексы  $r, g$  могут принимать следующие целочисленные значения:

$$\begin{aligned}\phi_{r,g}^{(+)} &: 0 \leq r \leq M, \quad 0 \leq g \leq N; \\ \phi_{g,r}^{(-)} &: 0 \leq g \leq M, \quad 0 \leq r \leq N.\end{aligned}\quad (1.39)$$

Теперь нетрудно подсчитать, что размерность пространства  $\{\Phi\}$  (а значит и  $\{\Psi\}$ ) равна  $2(M+1)(N+1)$ .

Операторы  $\tilde{S}_3, \tilde{T}_3, \tilde{T}_a^2$  и  $\tilde{S}_a^2$  диагональны на симметризованных векторах с компонентами (1.39) (или (1.38)). Если через  $f_{r,g}^{(+)}$  и  $f_{g,r}^{(-)}$  обозначить элементы базиса пространства  $\{\Phi\}$ , тогда на этих элементах операторы  $\tilde{S}_3, \tilde{T}_3, \tilde{T}_a^2$  и  $\tilde{S}_a^2$  принимают следующие собственные значения:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_3 f_{r,g}^{(+)} &= \left(r - \frac{M}{2}\right) f_{r,g}^{(+)}, & \tilde{T}_3 f_{r,g}^{(+)} &= \left(g - \frac{N}{2}\right) f_{r,g}^{(+)}, \\ \tilde{S}_a^2 f_{r,g}^{(+)} &= \frac{M}{2} \left(\frac{M}{2} + 1\right) f_{r,g}^{(+)}, & \tilde{T}_a^2 f_{r,g}^{(+)} &= \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1\right) f_{r,g}^{(+)}, \\ \tilde{S}_3 f_{g,r}^{(-)} &= \left(r - \frac{N}{2}\right) f_{g,r}^{(-)}, & \tilde{T}_3 f_{g,r}^{(-)} &= \left(g - \frac{M}{2}\right) f_{g,r}^{(-)}, \\ \tilde{S}_a^2 f_{g,r}^{(-)} &= \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1\right) f_{g,r}^{(-)}, & \tilde{T}_a^2 f_{g,r}^{(-)} &= \frac{M}{2} \left(\frac{M}{2} + 1\right) f_{g,r}^{(-)}.\end{aligned}\quad (1.40)$$

Из (1.40) следует, что на пространстве решений уравнений (1.35), а значит и на пространстве решений (1.21), реализуется представление

$$D^{(+)} \left(s = \frac{M}{2}, t = \frac{N}{2}\right) \oplus D^{(-)} \left(s = \frac{N}{2}, t = \frac{M}{2}\right)\quad (1.41)$$

группы  $P(1, 4)$ .

Уравнение (1.35) для ненулевых компонент можно записать в виде:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi^{(+)}(t, x) \\ \phi^{(-)}(t, x) \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \hat{1}^{(M+1)(N+1)} & 0 \\ 0 & -\hat{1}^{(M+1)(N+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{(+)}(t, x) \\ \phi^{(-)}(t, x) \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

где введено обозначение

$$\phi^{(+)}(t, x) \equiv \begin{pmatrix} \phi_{0,0}^{(+)}(t, x) \\ \phi_{0,1}^{(+)}(t, x) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \phi^{(-)}(t, x) \equiv \begin{pmatrix} \phi_{0,0}^{(-)}(t, x) \\ \phi_{0,1}^{(-)}(t, x) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уравнения типа Б–В (1.21) эквивалентны уравнению (1.42).

## § 2. Уравнение для нуклона и системы типа $(K^*, \Sigma)$

В этом параграфе рассмотрим детально два уравнения Б–В, которые реализуют представления  $D^{(+)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus D^{(-)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  и  $D^{(+)}(1, \frac{1}{2}) \oplus D^{(-)}(\frac{1}{2}, 1)$ .

**1.** Рассмотрим систему уравнений (1.21) для случая  $M = N = 1$ . Уравнения (1.21) в этом случае принимают вид:

$$\begin{aligned} p^\mu (\gamma_\mu \otimes 1) \Psi &= \varkappa \Psi, \\ p^\mu (1 \otimes \gamma_\mu) \Psi &= -\varkappa \Psi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где компоненты волновой функции  $\Psi \in \{\Psi\}$  определяются как  $\psi(t, x; \xi_1, \xi_2)$ , причем пространство решений

$$\{\Psi\} \subset \{F | P^2 F = \varkappa^2 F\} \subset \{F\}, \quad F \equiv \Psi^+ \otimes \Psi^-. \quad (2.2)$$

Симметризовать компоненты  $\psi(t, x; \xi_1, \xi_2)$  относительно операции  $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$  в случае  $M = N = 1$  невозможно, поскольку уравнения (2.1) неинвариантны относительно этой операции.

Уравнения (2.1) можно переписать как систему уравнений для компонент:

$$\begin{aligned} p^\mu (\gamma_\mu)_{\xi\eta} \psi(t, x; \eta, \rho) &= \varkappa \psi(t, x; \xi, \rho), \\ p^\mu (\gamma_\mu)_{\rho\eta} \psi(t, x; \xi, \rho) &= -\varkappa \psi(t, x; \xi, \rho). \end{aligned} \quad (2.1')$$

Генераторы группы  $P(1, 4)$  (1.25), связанные с уравнением (2.1), в этом частном случае выглядят как

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2} [\beta_0, \beta_k] p_k + \varkappa \beta_0, & P_k &= p_k, \\ J_{kl} &= (x_k p_l - x_l p_k) + \tilde{S}_{kl}, & \tilde{S}_{kl} &= \frac{i}{4} [\beta_k, \beta_l]_-, \\ J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2} (P_0 x_k + x_k P_0), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\beta_\mu \equiv \tilde{\gamma}_\mu = \gamma_\mu \otimes 1 - 1 \otimes \gamma_\mu. \quad (2.4)$$

Шестнадцатирядные матрицы  $\frac{1}{2}\beta_\mu$ , как это можно непосредственно проверить, удовлетворяют алгебре Кеммера–Дэффина–Петье

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\nu\beta_\mu = 4g_{\mu\nu}\beta_\lambda + 4g_{\nu\lambda}\beta_\mu. \quad (2.5)$$

Матрицы  $\tilde{S}_a$  и  $\tilde{T}_a$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_a &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 + 1 \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{T}_a &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_a \end{pmatrix} \otimes 1 + 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_a \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Преобразование Фолди–Войтхойзена–Перси имеет вид:

$$U = [2\omega(\omega + \varkappa)]^{-1} \{\omega + \varkappa + p_k(\gamma_k \otimes 1)\} \{\omega + \varkappa - p_l(1 \otimes \gamma_l)\}. \quad (2.7)$$

Преобразованием (2.7) уравнения (2.1) приводятся к виду:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\Phi &= \omega\gamma_0^{(1)}\Phi, \\ i\frac{\partial}{\partial t}\Phi &= -\omega\gamma_0^{(2)}\Phi, \quad \Phi = U\Psi. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8), переписанное как уравнение для компонент  $\phi$ , будет иметь вид:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x; \xi_1, \xi_2) &= \omega(\gamma_0)_{\xi_1\eta}\phi(t, x; \eta, \xi_2), \\ i\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x; \xi_1, \xi_2) &= -\omega(\gamma_0)_{\xi_2\eta}\phi(t, x; \xi_1, \eta). \end{aligned} \quad (2.8')$$

Единственное дополнительное условие, которое сужает пространство  $\{F'|P^2F' = \varkappa^2F'\}$  ( $F' = UF$ ) к пространству решений  $\{\Phi\}$  имеет вид:

$$\gamma_0^{(1)}\Phi = -\gamma_0^{(2)}\Phi \quad (2.9)$$

или

$$(\gamma_0)_{\xi_1\eta}\phi(\eta, \xi_2) = -(\gamma_0)_{\xi_2\eta}\phi(\xi_1, \eta). \quad (2.9')$$

Если представить пространство  $\{F'|P^2F' = \varkappa^2F'\}$  в виде прямой суммы:

$$\{F'|P^2F' = \varkappa^2F'\} = \{\Phi\} \oplus \{R\}, \quad (2.10)$$

где  $\{\Phi\}$  — пространство решений (2.8), а  $\{R\}$  — пространство, которое исключается условием (2.9), тогда уравнения (2.8) можно преобразовать к следующему виду

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(-)} \\ R \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 1^4 & 0 & 0 \\ 0 & -1^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(-)} \\ R \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$R = 0.$$

В (2.11) условие (2,9) выделено в явном виде. Волновые функции  $\Phi^{(+)}$ ,  $\Phi^{(-)}$  и  $R$  определяются следующими компонентами:

$$\Phi^{(+)} = \begin{pmatrix} \phi^{(+)}(t, x; 1, 3) \\ \phi^{(+)}(t, x; 1, 4) \\ \phi^{(+)}(t, x; 2, 3) \\ \phi^{(+)}(t, x; 2, 4) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_{1,1}^{(+)}(t, x) \\ \phi_{1,0}^{(+)}(t, x) \\ \phi_{0,1}^{(+)}(t, x) \\ \phi_{0,0}^{(+)}(t, x) \end{pmatrix}, \quad (2.12a)$$

$$\Phi^{(-)} = \begin{pmatrix} \phi^{(-)}(t, x; 3, 1) \\ \phi^{(-)}(t, x; 3, 2) \\ \phi^{(-)}(t, x; 4, 1) \\ \phi^{(-)}(t, x; 4, 2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_{1,1}^{(-)}(t, x) \\ \phi_{1,0}^{(-)}(t, x) \\ \phi_{0,1}^{(-)}(t, x) \\ \phi_{0,0}^{(-)}(t, x) \end{pmatrix}, \quad (2.12b)$$

$$R = \begin{pmatrix} \phi(t, x; 1, 1) \\ \phi(t, x; 1, 2) \\ \phi(t, x; 2, 1) \\ \phi(t, x; 2, 2) \\ \phi(t, x; 3, 3) \\ \phi(t, x; 3, 4) \\ \phi(t, x; 4, 3) \\ \phi(t, x; 4, 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \\ \rho_7 \\ \rho_8 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Генераторы группы  $P(1, 4)$  связанные с уравнением (2.8), имеют вид

$$\begin{aligned} P'_0 &= \omega\beta_0, & P'_k &= p_k, & J'_{kl} &= x_k p_l - x_l p_k + \tilde{S}_{kl}, \\ J'_{0k} &= x_0 p_k - \frac{\beta_0}{2}[\omega, x_k] + \frac{\beta_0 p_l}{\omega + \varkappa} \tilde{S}_{lk}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Операторы  $\tilde{S}_a$ ,  $\tilde{T}_a$  (2.6) принимают “ящичную” форму на пространствах  $\{\Phi^{(+)}\}$ ,  $\{\Phi^{(-)}\}$  и  $\{R\}$ . Операторы  $\tilde{S}_a^2$  и  $\tilde{T}_a^2$  уже диагонализированы в пространствах  $\{\Phi^{(+)}\}$  и  $\{\Phi^{(-)}\}$ . Чтобы диагонализировать “ящички” операторов  $\tilde{S}_a^2$  и  $\tilde{T}_a^2$ , действующие в  $\{R\}$ , нужно в  $\{R\}$  перейти к новому базису путем симметризации и антисимметризации базисных элементов.

Используя (2.6), можно доказать, что на пространствах  $\{\Phi\}$  и  $\{R\}$  реализуются следующие представления:

$$\begin{aligned} \{\Phi\} : & \quad D^{(+)} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \oplus D^{(-)} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) && \text{группы } P(1, 4); \\ \{R\} : & \quad D(1, 0) \oplus D(0, 1) \oplus 2D(0, 0) && \text{подгруппы } O(4), \end{aligned}$$

поскольку вектора  $R$  удовлетворяют уравнениям

$$i \frac{\partial}{\partial t} R = 0, \quad \omega R = 0.$$

Это означает, что фактически компоненты  $\rho_\alpha$  вектора  $R$  ( $\alpha = 1, \dots, 8$ ) не зависят от переменных  $t$  и  $x$ . Отсюда следует, что ящики всех генераторов (2.14), действующих в  $\{R\}$ , будут состоять из одних нулей, за исключением ящика генераторов  $J_{kl}$ , которые будут содержать операторы  $\tilde{S}_{kl}^{\{R\}}$ , удовлетворяющие алгебре  $O(4)$ .

В заключение отметим, что первое уравнение из (2.11) можно унитарными преобразованиями свести к виду:

$$p_0 \Psi' = \left\{ \left[ \frac{\beta_0}{2}, \frac{\beta_k}{2} \right] p_k + \frac{\beta_0}{2} \varkappa \right\} \Psi', \quad (2.15)$$

которое является уравнением типа Дэффина–Кеммера. Вектора  $\Psi'$ , в отличие от векторов  $\Psi \in \{\Psi\}$ , являющихся решениями (2.1), содержат лишние компоненты (прообразы компонент  $\rho_\alpha$ ).

**2.** Рассмотрим систему (1.21) для  $M = 2, N = 1$ . В этом случае уравнения (1.21) принимают вид:

$$\begin{aligned} p^\mu \gamma_\mu^{(1)} \Psi &= p^\mu (\gamma_\mu \otimes 1 \otimes 1) \Psi = \varkappa \Psi, \\ p^\mu \gamma_\mu^{(2)} \Psi &= p^\mu (1 \otimes \gamma_\mu \otimes 1) \Psi = \varkappa \Psi, \\ p^\mu \gamma_\mu^{(3)} \Psi &= p^\mu (1 \otimes 1 \otimes \gamma_\mu) \Psi = -\varkappa \Psi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

На элементы  $\Psi \in \{\Psi\}$ , где  $\{\Psi\}$  — пространство решений (2.16), налагаются следующие ограничения:

$$а) \quad \{\Psi\} \subset \{F | P^2 F = \varkappa^2 F\} \subset \{F\}, \quad (2.17)$$

где

$$\{F\} \equiv \{\Psi^+\} \otimes \{\Psi^+\} \otimes \{\Psi^-\};$$

$\{\Psi^+\}$  и  $\{\Psi^-\}$  — пространства решений уравнения (1.14) и уравнения (1.15) соответственно.

Это ограничение непосредственно следует из уравнений (2.16) и инвариантности (2.16) относительно группы  $P(1, 4)$ .

$$\begin{aligned} б) \quad \gamma_0^{(1)} \Phi &= \gamma_0^{(2)} \Phi, \\ \gamma_0^{(1)} \Phi &= -\gamma_0^{(3)} \Phi, \\ \gamma_0^{(2)} \Phi &= -\gamma_0^{(3)} \Phi, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $\Phi$  — фолди-образ  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} \Phi &= U \Psi, \\ U &= [2\omega(\omega + \varkappa)]^{-3/2} \left( \omega + \varkappa + \gamma_k^{(1)} p_k \right) \left( \omega + \varkappa + \gamma_l^{(2)} p_l \right) \left( \omega + \varkappa - \gamma_j^{(3)} p_j \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Дополнительные условия (2.18) следуют из уравнений (2.16) в представлении Фолди

$$\begin{aligned} p_0 \Phi &= \omega \gamma_0^{(1)} \Phi, \\ p_0 \Phi &= \omega \gamma_0^{(2)} \Phi, \\ p_0 \Phi &= -\omega \gamma_0^{(3)} \Phi. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ограничение (2.17) в представлении Фолди представляется в виде:

$$\begin{aligned} \{\Phi\} &\subset \{F'|P^2F' = \varkappa^2F'\} \subset \{F'\}, \\ \{F'\} &\equiv \{\Phi^+\} \otimes \{\Phi^+\} \otimes \{\Phi^-\}, \end{aligned} \quad (2.17')$$

где

$$F' = UF.$$

Этих ограничений достаточно, чтобы найти представление группы  $P(1, 4)$ , которое реализуется на  $\{\Phi\}$  (или  $\{\Psi\}$ ).

Условие (2.17) позволяет найти явный вид генераторов  $P(1, 4)$ , действующих в пространстве  $\{\Phi\}$ . Они имеют вид:

$$\begin{aligned} P'_0 &= \omega\tilde{\gamma}_0, & P'_k &= p_k, \\ J'_{kl} &= x_k p_l - x_l p_k + \tilde{S}_{kl}, & \tilde{S}_{kl} &= \frac{i}{4} [\tilde{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_l]_-, \\ J'_{0k} &= x_0 p_k - \frac{\tilde{\gamma}_0}{2} [\omega, x_k]_+ + \frac{\tilde{\gamma}_0 p_l}{\omega + \varkappa} \tilde{S}_{lk}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\tilde{\gamma}_\mu = \gamma_\mu^{(1)} + \gamma_\mu^{(2)} - \gamma_\mu^{(3)}.$$

Операторы  $\tilde{S}_{kl}$  представимы также в виде:

$$\tilde{S}_{kl} = S_{kl}^{(1)} + S_{kl}^{(2)} + S_{kl}^{(3)}, \quad S_{kl} = \frac{i}{4} [\gamma_k, \gamma_l]_-. \quad (2.22)$$

Дополнительные условия (2.18) сужают пространство  $\{F'|P^2F' = \varkappa^2F'\}$  до пространства решений  $\{\Phi\}$ . Если  $\gamma_0$  — матрица диагональна с элементами  $(1, 1, -1, -1)$ , тогда векторы  $\Phi \in \{\Phi\}$  определяются следующими ненулевыми компонентами:

$$\begin{aligned} \phi^{(+)}(t, x; \xi_1, \xi_2, \xi_3), & \quad \xi_1, \xi_2 = 1, 2, \quad \xi_3 = 3, 4, \\ \phi^{(-)}(t, x; \xi_1, \xi_2, \xi_3), & \quad \xi_1, \xi_2 = 3, 4, \quad \xi_3 = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

В силу инвариантности (2.16) и (2.20) относительно перестановки  $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$ , пространство  $\{\Phi\}$  можно разложить в прямую сумму

$$\{\Phi\} = \{\Phi_S\} \oplus \{\Phi_A\}$$

пространств, симметричных  $\Phi_S$  и антисимметричных  $\Phi_A$  функций относительно операции  $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$ .

Волновые функции  $\Phi_S$  и  $\Phi_A$  определяются следующими компонентами:

$$\begin{aligned} \phi_S^{(+)} &= \phi^{(+)}(t, x; [\xi_1, \xi_2]_+, \xi_3), & \xi_1, \xi_2 &= 1, 2, \quad \xi_3 = 3, 4; \\ \phi_S^{(-)} &= \phi^{(-)}(t, x; [\xi_1, \xi_2]_+, \xi_3), & \xi_1, \xi_2 &= 3, 4, \quad \xi_3 = 1, 2; \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \phi_A^{(+)} &= \phi^{(+)}(t, x; [\xi_1, \xi_2]_-, \xi_3), & \xi_1, \xi_2 &= 1, 2, \quad \xi_3 = 3, 4; \\ \phi_A^{(-)} &= \phi^{(-)}(t, x; [\xi_1, \xi_2]_-, \xi_3), & \xi_1, \xi_2 &= 3, 4, \quad \xi_3 = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где  $[\xi_1, \xi_2]_{\pm}$  обозначает симметризацию (+) или антисимметризацию (−) компонент  $\phi$  относительно перестановок  $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$ . Например,

$$\phi^{(+)}([1, 2]_{\pm}, 3) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \phi^{(+)}(1, 2, 3) \pm \phi^{(+)}(2, 1, 3) \right].$$

Операторы  $\tilde{S}_3$ ,  $\tilde{T}_3$ ,  $\tilde{S}_a^2$  и  $\tilde{T}_a^2$  определяемые (2.22) и (1.10)–(1.12), диагональны на  $\{\Phi_S\}$  и  $\{\Phi_A\}$ . Учитывая (1.18), можно найти собственные значения этих операторов на каждом элементе базиса пространств  $\{\Phi_S\}$ ,  $\{\Phi_A\}$ . Таким путем можно показать, что на  $\{\Phi_S\}$  и  $\{\Phi_A\}$  и реализуются следующие представления группы  $P(1, 4)$ :

$$\{\Phi_S\}: \quad D^{(+)}\left(1, \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad (2.26)$$

$$\{\Phi_A\}: \quad D^{(+)}\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2}, 0\right). \quad (2.27)$$

Если ограничиться классом симметризованных решений  $\{\Phi_S\}$  (или  $\{\Psi_A\}$ ), тогда уравнение (2.16) описывает частицу со спином  $s = 1$  и изоспином  $t = \frac{1}{2}$ , а также античастицу  $s = \frac{1}{2}$ ,  $t = 1$ , т.е. уравнение (2.16) описывает систему  $(K^*, \Sigma)$  (при этом триплет  $\Sigma$  следует считать античастицей).

### § 3. Уравнение движения для частицы переменной массы

1. На множестве решений уравнений, рассмотренных в предыдущих параграфах, реализуются представления группы  $P(1, 4)$ , принадлежащие классу I ( $P^2 = \kappa^2 > 0$ ). В этом параграфе будут найдены уравнения, описывающие движение частицы с переменной массой, но с фиксированным спином  $s$ .

Для класса II ( $P^2 = W = V = 0$ ) представлений группы  $P(1, 4)$ , уравнение Дирака в пятимерной схеме имеет вид;

$$p^{\mu} \gamma_{\mu} \Psi = 0, \quad (\mu = 0, 1, \dots, 4) \quad (3.1)$$

или

$$H \Psi = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi, \quad (3.2)$$

где

$$H = \gamma_0 \gamma_k p_k = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 \gamma_4 \frac{p_4}{|p_4|} |p_4|, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad a = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.1) можно представить в виде:

$$p^{\mu'} \gamma'_{\mu'} \Psi = |p_4| \Psi, \quad |p_4| \neq 0, \quad (\mu' = 0, 1, 2, 3), \quad (3.4)$$

где

$$\gamma'_a = \frac{p_4}{|p_4|} \gamma_a \gamma_4, \quad \gamma'_0 = \frac{p_4}{|p_4|} \gamma_0 \gamma_4. \quad (3.5)$$

Операторы  $\gamma'_{\mu'}$  удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и обычные матрицы Дирака, т.е.

$$\begin{aligned} [\gamma'_{\mu'}, \gamma'_{\nu'}] &= 2g_{\mu'\nu'}, & g_{00} &= -g_{aa} = 1, & g_{\mu'\nu'} &= 0, & (\mu' \neq \nu'), \\ [\gamma'_{\mu'}, p_k]_- &= [\gamma'_{\mu'}, x_k] = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В канонической (шредингеровской) форме уравнение (3.4) выглядит как

$$i \frac{\partial}{\partial t} \chi = \gamma_0 \omega \chi, \quad \omega = \sqrt{p_a^2 + p_4^2}, \quad (3.7)$$

$$\chi = U \Psi, \quad (3.8)$$

где  $U$  — оператор преобразования типа Фолди–Войтхойзена:

$$U = [2\omega(\omega + |p_4|)]^{-1/2} (\omega + |p_4| + \gamma'_a p_a). \quad (3.9)$$

Генераторы группы  $P(1,4)$ , определенные на решениях уравнения (3.7), имеют вид:

$$\begin{aligned} P'_0 &= \omega \gamma'_0, & P_k &= p_k, \\ J'_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & S_{ab} &= \frac{i}{4} [\gamma'_a, \gamma'_b]_-, \\ J_{4a} &= x_4 p_a - x_a p_4 + \frac{p_4}{|p_4|} \frac{p_b}{\omega + |p_4|} S_{ab}, \\ J_{0a} &= x_0 p_a - \frac{\gamma'_0}{2} [\omega, x_a]_+ + \frac{\gamma'_0 p_b}{\omega + |p_4|} S_{ba}, \\ J_{04} &= x_0 p_4 - \frac{\gamma'_0}{2} [\omega, x_4]_+, \\ [S_{ab}, S_{cd}]_- &= i (\delta_{ac} S_{bd} + \delta_{bd} S_{ac} - \delta_{ad} S_{bc} - \delta_{bc} S_{ad}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что генераторы (3.10) удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1). Детальный вывод (3.10) будет проведен в другой работе.

Особенностью этого класса представлений будет то, что невозможно перейти в такую систему отсчета, где все  $p_k = 0$ . Если генераторы представлены в виде (3.10), тогда возможна система, в которой  $p_a = 0$ ,  $p_4 \neq 0$ . Это позволяет требовать, чтобы  $|p_4| \neq 0$  в уравнении (3.4). При переходе к такой системе отсчета алгебра генераторов (3.10) сужается к алгебре генераторов (3.11) группы  $O(3)$ . Таким образом, малой группой в этом классе представлений будет группа  $O(3)$ , поэтому все представления группы  $P(1,4)$ , реализуемые в пространстве решений уравнений типа (3.1) и (3.7), будут унитарны, конечномерны и характеризоваться собственными значениями оператора энергии и числом  $s$ , которое принимает целые и полуцелые значения.

Оператор спина  $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$  для уравнения (3.1) имеет такой же вид, как и для обычного уравнения Дирака (относительно  $P(1,3)$ ):

$$S_a = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} S_{bc} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & \sigma_a \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$\sigma_a$  — матрицы Паули.

Из (3.12) и (3.10) вытекает, что на множестве решений уравнения (3.1) реализуется представление

$$D^{(+)} \left( s = \frac{1}{2} \right) \oplus D^{(-)} \left( s = \frac{1}{2} \right) \quad (3.13)$$

группы  $P(1,4)$ .

2. Уравнение движения частицы с произвольным спином и с произвольной не равной нулю массой, нетрудно выписать, если заметить, что уравнение (3.4) отличается от обычного уравнения Дирака заменой

$$m \rightarrow |p_4|, \quad \gamma_{\mu'} \rightarrow \gamma'_{\mu'}, \quad (3.14)$$

и можно буквально повторить все рассуждения Баргмана и Вигнера, проведенные в работе [6]. Поэтому для частиц с переменной массой и спином  $s = \frac{M}{2}$  имеет место система уравнений:

$$p^{\mu'} \gamma'_{\mu'} \Psi = |p_4| \Psi \quad (m = 1, 2, \dots, M), \quad (3.15)$$

причем предполагается, что компоненты  $\psi(t, x; \xi_1, \dots, \xi_M)$  волновой функции  $\Psi$  полностью симметризованы относительно любой перестановки  $\xi_m \leftrightarrow \xi_{m'}$ .

Генераторы, действующие в пространстве  $\{\Phi\}$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} P'_0 &= \omega \tilde{\gamma}'_0, & P'_k &= p_k, \\ J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + \tilde{S}_{ab}, & \tilde{S}_{ab} &= \frac{i}{4} [\tilde{\gamma}'_a, \tilde{\gamma}'_b]_-, \\ J_{4a} &= x_4 p_a - x_a p_4 + \frac{p_4}{|p_4|} \frac{p_b}{\omega + |p_4|} \tilde{S}_{ab}, \\ J_{0a} &= x_0 p_a - \frac{\tilde{\gamma}'_0}{2} [\omega, x_a]_+ + \frac{\tilde{\gamma}'_0 p_b}{\omega + |p_4|} \tilde{S}_{ba}, \\ J_{04} &= x_0 p_4 - \frac{\tilde{\gamma}'_0}{2} [\omega, x_4]_+, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= U \Psi, & U &= \prod_{m=1}^M U^{(m)}, \\ U^{(m)} &= [2\omega(\omega + |p_4|)]^{-1/2} \left( \omega + |p_4| + \gamma'^{(m)}_a p_a \right), & \tilde{\gamma}'_{\mu'} &= \sum_{m=1}^M \gamma'^{(m)}_{\mu'}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Уравнение (3.15) преобразованием (3.17) приводится к виду:

$$p_0 \Phi = \omega \gamma'^{(m)}_0 \Phi, \quad (3.18)$$

которое эквивалентно следующему уравнению канонического вида

$$p_0 \Phi = \omega \hat{\beta} \Phi, \quad (3.19)$$

где

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1^{(M+1)} & 0 \\ 0 & -1^{(M+1)} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Таким образом, уравнения типа Баргмана–Вигнера (3.15) в пятимерной схеме описывают частицу и античастицу с фиксированным спином  $s$ , но с нефиксированной массой  $|p_4|$ . На решениях уравнений (3.15) реализуется представление

$$D^{(+)} \left( \frac{M}{2} \right) \oplus D^{(-)} \left( \frac{M}{2} \right) \quad (3.21)$$

группы  $P(1, 4)$ .

### § 4. $P$ -, $T$ -, $C$ -свойства уравнения Дирака

В этом параграфе изучаются свойства уравнения Дирака (1.14) (или (1.15)) относительно пространственного и временного отражений, а также операции зарядового сопряжения.

При замене  $x_k \rightarrow -x_k$  волновая функция  $\Psi^+(t, x)$  может преобразоваться, вообще говоря, двумя неэквивалентными способами:

$$P^{(1)}\Psi^+(t, x) = r^{(1)}\Psi^+(t, -x), \quad [P^{(1)}]^2 \sim 1 \quad (4.1)$$

либо

$$P^{(2)}\Psi^+(t, x) = r^{(2)}\Psi^{*+}(t, -x), \quad [P^{(2)}]^2 \sim 1, \quad (4.2)$$

где  $r^{(1)}$ ,  $r^{(2)}$  —  $(4 \times 4)$ -матрицы;  $P^{(1)}$  — эрмитовый, а  $P^{(2)}$  — антиэрмитовый операторы, удовлетворяющие таким соотношениям:

$$[P^{(1)}, P_k]_+ = [P^{(1)}, J_{0k}]_+ = 0, \quad [P^{(1)}, P_0]_- = [P^{(1)}, J_{kl}]_- = 0, \quad (4.3)$$

$$[P^{(2)}, P_k]_- = [P^{(2)}, J_{0k}]_- = 0, \quad [P^{(2)}, P_0]_+ = [P^{(2)}, J_{kl}]_+ = 0. \quad (4.4)$$

При замене  $t \rightarrow -t$  волновая функция также может преобразоваться двумя различными способами. Согласно Паули

$$T^{(1)}\Psi^+(t, x) = \tau^{(1)}\Psi^+(-t, x), \quad [T^{(1)}]^2 \sim 1, \quad (4.5)$$

$$[T^{(1)}, P_k]_- = [T^{(1)}, J_{kl}]_- = 0, \quad [T^{(1)}, P_0]_+ = [T^{(1)}, J_{0k}]_+ = 0, \quad (4.6)$$

где  $\tau^{(1)}$  —  $(4 \times 4)$ -матрица.

Согласно Вигнеру

$$T^{(2)}\Psi^+(t, x) = \tau^{(2)}\Psi^{*+}(-t, x), \quad [T^{(2)}]^2 \sim 1, \quad (4.7)$$

$$[T^{(2)}, P_k]_+ = [T^{(2)}, J_{kl}]_+ = 0, \quad [T^{(2)}, P_0]_- = [T^{(2)}, J_{0k}]_- = 0, \quad (4.8)$$

где  $\tau^{(2)}$  —  $(4 \times 4)$ -матрица.

Оператор зарядового сопряжения определяется как

$$C\Psi^+(t, x) = \tau^{(3)}\Psi^{*+}(t, x), \quad C^2 \sim 1, \quad (4.9)$$

$$[C, P_\mu]_+ = 0, \quad [C, J_{\mu\nu}]_+ = 0, \quad (4.10)$$

где  $\tau^{(2)}$  —  $(4 \times 4)$ -матрица. Из этого определения ясно, что оператор  $C$  можно определить через операторы  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  или через  $P^{(1)}$  и  $P^{(2)}$  как

$$C^{(1)} = T^{(1)}T^{(2)} = T^{(2)}T^{(1)}, \quad (4.11)$$

$$C^{(2)} = P^{(1)}P^{(2)} = P^{(2)}P^{(1)}. \quad (4.11')$$

Матрицы  $r^{(1)}$ ,  $r^{(2)}$ ,  $\tau^{(1)}$ ,  $\tau^{(2)}$ ,  $\tau^{(3)}$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} r^{(i)} &= a_{\mu}^{(i)} \alpha_{\mu} + a_{\mu\nu}^{(i)} \alpha_{\mu} \alpha_{\nu}, & \mu < \nu, & \quad i = 1, 2, \\ \tau^{(l)} &= b_{\mu}^{(l)} \alpha_{\mu} + b_{\mu\nu}^{(l)} \alpha_{\mu} \alpha_{\nu}, & \mu < \nu, & \quad l = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $a_{\mu}^{(i)}$ ,  $a_{\mu\nu}^{(i)}$ ,  $b_{\mu}^{(l)}$  и  $b_{\mu\nu}^{(l)}$  — произвольные числа ( $\mu = 0, 1, \dots, 4$ ).

Зная явный вид генераторов  $P_{\mu}$ ,  $J_{\mu\nu}$  (формула (1.17)), действующих в пространстве решений  $\{\Psi^+\}$  (или  $\{\Psi^-\}$ ) уравнения (1.14) (или (1.15)) и учитывая (4.12), можно убедиться непосредственной проверкой, что соотношения (4.4), (4.6), (4.10) удовлетворяются только для нулевых матриц  $\tau^{(1)}$ ,  $\tau^{(2)}$  и  $\tau^{(3)}$ . Соотношения (4.3) и (4.8) удовлетворяются, если

$$r^{(1)} = \beta, \quad \tau^{(2)} = i\alpha_1\alpha_3, \quad (4.13)$$

Итак, уравнение (1.14) (или (1.15))  $P^{(2)}$ -,  $T^{(1)}$ -,  $C$ -неинвариантно, но  $P^{(1)}$ -,  $T^{(2)}$ -инвариантно [9]. Это означает, что четырехкомпонентное уравнение Дирака на группе  $P(1,4)$   $P^{(1)}T^{(1)}C^{(1)}$ -,  $P^{(2)}T^{(2)}C^{(2)}$ -инвариантно, но  $P^{(1)}T^{(2)}C^{(2)}$ -,  $P^{(2)}T^{(2)}C^{(1)}$ -,  $P^{(2)}T^{(1)}C^{(2)}$ -неинвариантно.

Для сравнения напомним, что обычное уравнение Дирака на группе  $P(1,3)$ , как хорошо известно,  $P$ -,  $C$ -,  $T$ -инвариантно. Такое отличие  $P$ -,  $C$ -,  $T$ -свойств 5-мерного уравнения Дирака (1.14) от обычного уравнения Дирака являются следствием того, что уравнение (1.14) (или (1.15)) не описывает частицу и античастицу, поскольку на решениях этого уравнения реализуется представление  $D^{(+)}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D^{(-)}\left(0, \frac{1}{2}\right)$  группы  $P(1,4)$ .

Рассмотрим теперь уравнение, являющейся “прямой суммой” уравнений (1.14) и (1.15):

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad (4.14)$$

$$H = \Gamma_0\Gamma_k p_k + \Gamma_0\mathcal{K}, \quad (4.15)$$

$$\Gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ \gamma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

$\Psi$  — восьмикомпонентный спинор.

На решениях уравнения (4.14) реализуется представление

$$D^{(+)}\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D^{(-)}\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(+)}\left(0, \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2}, 0\right). \quad (4.17)$$

Генераторы группы  $P(1,4)$ , действующие в пространстве решений уравнения (1.14), выглядят как

$$\begin{aligned} P_0 &= H = \Gamma_0\Gamma_k p_k + \Gamma_0\mathcal{K}, & P_k &= p_k, \\ J_{kl} &= x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}^{(8)}, & S_{kl}^{(8)} &= \frac{i}{4}[\Gamma_k, \Gamma_l]_-, \\ J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2}[H, x_k]_+. \end{aligned} \quad (1.17')$$

Операторами спина и изоспина будут матрицы

$$S_a^{(8)} = \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_a^{(8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_a \end{pmatrix}. \quad (1.12'')$$

Операторы  $P$ ,  $T$ ,  $C$  на восьмикомпонентной волновой функции определяется как

$$P^{(1)}\Psi(t, x) = R^{(1)}\Psi(t, -x), \quad P^{(2)}\Psi(t, x) = R^{(2)}\Psi(t, -x), \quad (4.18)$$

$$T^{(1)}\Psi(t, x) = T^{(1)*}\Psi(-t, x), \quad T^{(2)}\Psi(t, x) = T^{(2)*}\Psi(-t, x), \quad (4.19)$$

$$C\Psi(t, x) = T^{(3)*}\Psi(t, x), \quad (4.20)$$

где

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad R^{(2)} = i \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{(2)} = i \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

$$T^{(3)} = i \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2\alpha_4 \\ \alpha_2\alpha_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

Можно проверить, что при выборе матриц  $R$ ,  $T$ , в виде (4.21)–(4.23) соотношения (4.3), (4.4), (4.6), (4.8) и (4.10) выполняются. Это означает, что восьмикомпонентное уравнение (4.14)  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -,  $PTC$ -инвариантно.

Таким образом, в схеме  $P(1, 4)$  простейшим  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантным уравнением, описывающим частицу (мультиплет) со спином и изоспином, является восьмикомпонентное уравнение (4.14). Отсюда ясно, что для построения  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантных уравнений типа Б–В, следует в качестве исходного уравнения взять уравнение (4.14). Из предыдущего рассмотрения ясно также, что свойством  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантности будут обладать лишь такие уравнения в схеме  $P(1, 4)$ , на решениях которых реализуются представления, симметричные относительно замены  $s \leftrightarrow t$ :

$$D^{(+)}(s, t) \oplus D^{(-)}(s, t) \oplus D^{(+)}(t, s) \oplus D^{(-)}(t, s), \quad (t \neq s), \\ D^{(+)}(s, t) \oplus D^{(-)}(s, t), \quad (t = s). \quad (4.24)$$

Для полноты укажем, что уравнения (3.15), на решениях которых реализуются представления класса II (с  $W = V = 0$ )  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантно. Этот факт является следствием того, что уравнение (3.1) или (3.4) инвариантно относительно этих операций. Действительно, если выбрать матрицы  $r^{(1)}$ ,  $r^{(2)}$ ,  $\tau^{(1)}$ ,  $\tau^{(2)}$ ,  $\tau^{(3)}$  в виде

$$r^{(1)} = \gamma'_0, \quad r^{(2)} = \gamma'_0\gamma'_2, \quad \tau^{(1)} = \gamma'_1\gamma'_2\gamma'_3, \quad \tau^{(2)} = \gamma'_1\gamma'_3, \quad \tau^{(3)} = \gamma'_2, \quad (4.25)$$

то легко убедиться, что уравнение (3.4)  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантно.

Итак, уравнение (3.15), описывавшее свободное движение частицы со спином  $s$  и нефиксированной массой  $|p_4|$ ,  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантно.

### § 5. $P$ -, $T$ -, $C$ -инвариантные уравнения типа Баргмана–Вигнера

Уравнения Б–В, рассмотренные в § 1,  $T$ -,  $P$ -,  $C$ -инвариантны лишь в частном случае  $M = N$ . Для получения  $T$ -,  $P$ -,  $C$ -инвариантных уравнений Б–В нужно использовать, как уже отмечалось, в качестве исходного восьмикомпонентное уравнение вида (4.14).

Уравнение (4.14) эквивалентно двум уравнениям

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad P^+\Psi = 0, \quad (5.1)$$

и

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad P^-\Psi = 0, \quad (5.2)$$

где  $P^\pm$  — проекционные операторы вида

$$P^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \Gamma), \quad P^+ + P^- = 1, \quad P^+P^- = 0, \quad (5.3)$$

$$\Gamma = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix},$$

причем операторы  $\Gamma$  коммутируют с операторами уравнения  $p^\mu\Gamma_\mu$ , а также с генераторами (1.17'). Поэтому пространство решений  $\{\Psi\}$  уравнения (1.14) можно разложить на два инвариантных подпространства

$$\{\Psi\} = \{P^+\Psi\} \oplus \{P^-\Psi\}.$$

Уравнение (5.1) (или (5.2)) имеет в качестве пространства решений подпространство  $\{P^-\Psi\}$  (или  $\{P^+\Psi\}$ ) на котором реализуется представление  $D^{(+)}(0, \frac{1}{2}) \oplus D^{(-)}(\frac{1}{2}, 0)$  (или  $D^{(+)}(\frac{1}{2}, 0) \oplus D^{(-)}(0, \frac{1}{2})$ ), что доказывает, что (5.1) эквивалентно (1.15), а (5.2) эквивалентно (1.14).

Уравнения Б–В, если в качестве исходного уравнения выбрать уравнение (4.14), будут иметь вид

$$p^\mu \Gamma_\mu \Psi = \varkappa \Psi, \quad (m = 1, 2, \dots, M). \quad (5.4)$$

Пространство решений  $\{\Psi\}$  уравнений (5.4) реализует прямую сумму представлений  $D^{(\pm)}(s, t)$ , где

$$s, t = \frac{M}{2}, \frac{M}{2} - 1, \frac{M}{2} - 2, \dots, \quad (5.5)$$

$$s + t = \frac{M}{2}, \frac{M}{2} - 1, \frac{M}{2} - 2, \dots$$

Причем, в этой сумме некоторые представления могут повторяться несколько раз. Существует, тем не менее, проекционный оператор, проектирующий  $\{\Psi\}$  на определенное инвариантное подпространство  $\{\Psi'\} \subset \{\Psi\}$ , в котором реализуется лишь прямая сумма неприводимых представлений вида (4.24) с числами  $s$  и  $t$ , удовлетворяющими (5.5). Обозначим такой проекционный оператор через  $P'$ , т.е.

$$\Psi' = P'\Psi,$$

тогда  $T$ -,  $P$ -,  $C$ -инвариантное уравнение с  $\Psi \in \{\Psi'\}$  будет иметь вид:

$$p^\mu \Gamma_\mu \Psi = \varkappa \Psi, \quad (1 - P')\Psi = 0. \quad (5.6)$$

Рассмотрим детально уравнение (5.4) для случая  $M = 2$ . Уравнение (5.4) принимает вид

$$p^\mu \Gamma_\mu^{(1)} \Psi = \varkappa \Psi, \quad p^\mu \Gamma_\mu^{(2)} \Psi = \varkappa \Psi. \quad (5.7)$$

Волновая функция  $\Psi \in \{\Psi\}$  ( $\{\Psi\}$  — пространство решений (5.7)) определяется своими компонентами вида

$$\psi = \psi(t, x; \xi_1, \xi_2) \equiv \psi(\xi_1, \xi_2) \quad (\xi_1, \xi_2 = 1, 2, \dots, 8).$$

Дополнительные условия в этой случае имеют вид

$$\Gamma_0^{(1)} \Psi = \Gamma_0^{(2)} \Psi \quad (5.8)$$

и приводят к тому, что  $\Psi$  определяется лишь следующими компонентами:

$$\begin{aligned} \psi^{(+)} &= \psi^{(+)}(\xi_1, \xi_2), & \xi_1, \xi_2 &= 1, 2, 3, 4, \\ \psi^{(-)} &= \psi^{(-)}(\xi_1, \xi_2), & \xi_1, \xi_2 &= 5, 6, 7, 8. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Вектора  $\Psi^{(\pm)}$ , определяемые компонентами  $\psi^{(\pm)}$ , принадлежат собственному значению  $\pm 1$  инварианта  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon \Psi^{(\pm)} = \pm 1 \Psi^{(\pm)}.$$

Рассмотрим операторы

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma \otimes 1, \quad \Gamma^{(2)} = 1 \otimes \Gamma, \quad \Gamma^{(1)(2)} = \Gamma \Gamma. \quad (5.10)$$

Нетрудно убедиться, что операторы (5.10) коммутируют с матрицами  $\Gamma_\mu^{(1)}$  и  $\Gamma_\mu^{(2)}$  с генераторами группы  $P(1, 4)$ , которые в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2}[\tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_k]_- p_k + \varkappa \tilde{\Gamma}_0, & P_k &= p_k, \\ J_{kl} &= x_k p_l - x_l p_k + \tilde{S}_{kl}, & \tilde{S}_{kl} &= \frac{i}{4}[\tilde{\Gamma}_k, \tilde{\Gamma}_l]_-, \\ J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2}[P_0, x_k]_+, & \tilde{\Gamma}_\mu &= \Gamma_\mu^{(1)} + \Gamma_\mu^{(2)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Это означает, что из операторов (5.10) можно образовать шесть проекционных операторов

$$\frac{1}{2} \left( 1 \pm \Gamma^{(1)} \right), \quad \frac{1}{2} \left( 1 \pm \Gamma^{(2)} \right), \quad \frac{1}{2} \left( 1 \pm \Gamma^{(1)(2)} \right), \quad (5.12)$$

которые разбивают множество  $\{\Psi\}$  на инвариантные относительно  $P(1, 4)$  подмножества.

Существует четыре независимых проекционных оператора, которые образуют полную систему и которые могут быть построены из операторов (5.12):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \frac{1}{4} \left( 1 + \binom{(1)}{\Gamma} \right) \left( 1 + \binom{(2)}{\Gamma} \right), & \mathcal{P}_2 &= \frac{1}{4} \left( 1 + \binom{(1)}{\Gamma} \right) \left( 1 - \binom{(2)}{\Gamma} \right), \\ \mathcal{P}_3 &= \frac{1}{4} \left( 1 - \binom{(1)}{\Gamma} \right) \left( 1 + \binom{(2)}{\Gamma} \right), & \mathcal{P}_4 &= \frac{1}{4} \left( 1 - \binom{(1)}{\Gamma} \right) \left( 1 - \binom{(2)}{\Gamma} \right), \\ \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4 &= 1, & \mathcal{P}_i \mathcal{P}_i &= \mathcal{P}_i, & \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j &= 0 \quad (i \neq j), \\ & & (i, j &= 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Вектора, принадлежащие инвариантным подпространствам

$$M_i = \{ \mathcal{P}_i \Psi^{(+)} \} \oplus \{ \mathcal{P}_i \Psi^{(-)} \}, \quad (5.14)$$

определяются тогда лишь следующими компонентами из (5.9):

$\Psi \in M_1$  определяются компонентами

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(\xi_1, \xi_2), & \quad \xi_1, \xi_2 = 1, 2, \\ \psi^{(-)}(\xi_1, \xi_2), & \quad \xi_1, \xi_2 = 7, 8; \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\Psi \in M_2 \quad \text{---} \quad \begin{aligned} \psi^{(+)}(\xi_1, \xi_2), & \quad \xi_1 = 1, 2, \quad \xi_2 = 3, 4, \\ \psi^{(-)}(\xi_1, \xi_2), & \quad \xi_1 = 7, 8, \quad \xi_2 = 5, 6; \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\Psi \in M_3 \quad \text{---} \quad \begin{aligned} \psi^{(+)}(\xi_1, \xi_2), & \quad \xi_1 = 3, 4, \quad \xi_2 = 1, 2, \\ \psi^{(-)}(\xi_1, \xi_2), & \quad \xi_1 = 5, 6, \quad \xi_2 = 7, 8; \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\Psi \in M_4 \quad \text{---} \quad \begin{aligned} \psi^{(+)}(\xi_1, \xi_2), & \quad \xi_1 = 3, 4, \quad \xi_2 = 3, 4, \\ \psi^{(-)}(\xi_1, \xi_2), & \quad \xi_1 = 5, 6, \quad \xi_2 = 5, 6. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Пространства  $M_1$  и  $M_2$  могут быть разложены на подпространства симметричных

$$\Psi_S(\xi_1, \xi_2) = \Psi_S(\xi_2, \xi_1)$$

и антисимметричных

$$\Psi_A(\xi_1, \xi_2) = -\Psi_A(\xi_2, \xi_1)$$

функций. Это видно хотя бы из того, что операторы  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_4$  коммутируют с операцией перестановки  $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$  или из выражений (5.15) и (5.18). Пространства  $M_2, M_3$  не допускают такого разложения.

Чтобы указать, какие представления группы  $P(1, 4)$  реализуются на пространствах  $M_i$ , необходимо знать, какие собственные значения имеют операторы  $\tilde{S}_3, \tilde{T}_3, \tilde{S}_a^2$  и  $\tilde{T}_a^2$  на базисных элементах этих пространств. Операторы  $\tilde{S}_a, \tilde{T}_a, \tilde{S}_a^2$  и  $\tilde{T}_a^2$  в этом случае принимают вид:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_a &= S_a^{(1)(8)} + S_a^{(2)(8)}, & \tilde{T}_a &= T_a^{(1)(8)} + T_a^{(2)(8)}, \\ \tilde{S}_a^2 &= \left[ S_a^{(1)(8)} \right]^2 + \left[ S_a^{(2)(8)} \right]^2 + 2 S_a^{(1)(8)} S_a^{(2)(8)}, \\ \tilde{T}_a^2 &= \left[ T_a^{(1)(8)} \right]^2 + \left[ T_a^{(2)(8)} \right]^2 + 2 T_a^{(1)(8)} T_a^{(2)(8)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Операторы  $\tilde{S}_a^2$  и  $\tilde{T}_a^2$  диагональны только на инвариантных подпространствах  $M_2$  и  $M_3$ . Чтобы диагонализировать их также и в  $M_1$  и  $M_4$ , необходимо в качестве базиса  $M_1$  и  $M_4$  выбрать симметричные и антисимметричные функции

$$M_1 \rightarrow M_1^{(S)} \oplus M_1^{(A)}, \quad M_4 \rightarrow M_4^{(S)} \oplus M_4^{(A)}, \quad (5.20)$$

где

$$M_1^{(S)} = \{\mathcal{P}_1 \Psi_S^{(+)}\} \oplus \{\mathcal{P}_1 \Psi_S^{(-)}\}, \quad M_1^{(A)} = \{\mathcal{P}_1 \Psi_A^{(+)}\} \oplus \{\mathcal{P}_1 \Psi_A^{(-)}\}$$

и т.д.

Тогда можно показать, что на  $M_1^{(S)}$ ,  $M_1^{(A)}$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4^{(S)}$  и  $M_4^{(A)}$  реализуются следующие представления группы  $P(1, 4)$ :

$$M_1^{(S)} : D^{(+)}(1, 0) \oplus D^{(-)}(0, 1), \quad (5.21)$$

$$M_1^{(A)} : D^{(+)}(0, 0) \oplus D^{(-)}(0, 0), \quad (5.22)$$

$$M_2 : D^{(+)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (5.23)$$

$$M_3 : D^{(+)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(-)}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (5.24)$$

$$M_4^{(S)} : D^{(+)}(0, 1) \oplus D^{(-)}(1, 0), \quad (5.25)$$

$$M_4^{(A)} : D^{(+)}(0, 0) \oplus D^{(-)}(0, 0). \quad (5.26)$$

Теперь можно написать уравнения вида (5.6) для любого из представлений (5.21)–(5.26), или любой их суммы.

Мы выпишем только следующие  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантные уравнения: для спиносинглета-изосинглета (5.22) или (5.26)

$$\left. \begin{aligned} p^\mu \Gamma_\mu \Psi_A &= \varkappa \Psi_A \\ (1 - \mathcal{P}_1) \Psi_A &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad m = 1, 2 \quad (5.27)$$

или

$$(1 - \mathcal{P}_4) \Psi_A = 0;$$

для спинодублета-изодублета (5.23) или (5.24)

$$\left. \begin{aligned} p^\mu \Gamma_\mu \Psi &= \varkappa \Psi \\ (1 - \mathcal{P}_2) \Psi &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad m = 1, 2 \quad (5.28)$$

или

$$(1 - \mathcal{P}_3) \Psi = 0;$$

для спинотриплета-изотриплета

$$\left. \begin{aligned} p^\mu \Gamma_\mu \Psi_S = \varkappa \Psi_S \\ (1 - \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_4) \Psi_S = 0 \end{aligned} \right\}, \quad m = 1, 2. \quad (5.29)$$

Итак, уравнение (5.4) на группе  $P(1,4)$ , в отличие от обычного уравнения Брагмана–Вигнера на группе  $P(1,3)$ , описывает не один, а несколько спин-изоспиновых мультиплетов (смесь). С помощью проекционных операторов можно из (5.4) выделять уравнения, описывающие спиносинглет-изосинглет, спиnodублет-изодублет, спиnodублет-изосинглет и т.д.

В заключение этого параграфа укажем еще один вид уравнений, решения которых, также как и решения уравнений Б–В не содержит лишних компонент.

Уравнения имеют вид

$$p_\mu \Psi = (L_{\mu\nu} p^\nu + L_\mu \varkappa) \Psi, \quad (5.30)$$

где матрицы  $L_{\mu\nu}$  и  $L_\mu$  представляются в виде

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{i\lambda} S_{\mu\nu}, \quad L_\mu = \frac{1}{i\lambda} S_{\mu 5}. \quad (5.31)$$

Операторы  $S_{\mu\nu}$  и  $S_{\mu 5}$  реализуют неприводимое представление  $D(\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$  группы  $O(1,5)$ , где  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$  — целые или полуцелые числа, удовлетворяющие условиям

$$\lambda \geq \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0,$$

где  $2\lambda$  той же самой четности, что и  $2(\lambda_1 + \lambda_2)$ . Эти числа определяются как собственные значения операторов  $S_{05}, S_3$  и  $T_3$  на старшем векторе.

На решениях уравнений (5.30) реализуется представление

$$D^{(+)}(s = \lambda_1, t = \lambda_2) \oplus D^{(-)}(s = \lambda_2, t = \lambda_1)$$

группы  $P(1,4)$ .

Соответственно, на решениях уравнений

$$p_\mu \Psi = (L_{\mu\nu} p^\nu - L_\mu \varkappa) \Psi, \quad (5.32)$$

где  $L_{\mu\nu}$  и  $L_\mu$  определяются (5.31), реализуется представление

$$D^{(+)}(s = \lambda_2, t = \lambda_1) \oplus D^{(-)}(s = \lambda_1, t = \lambda_2)$$

группы  $P(1,4)$ .

Отметим, что уравнение (5.30) в том случае, когда  $P^2 = W = V = 0$  эквивалентно релятивистскому уравнению для частицы с фиксированным спином  $s$ , которое недавно было предложено М. Бакри [10].

1. Румер Ю.Б., Исследования по 5-оптике, Физматгиз, М., 1956.
2. Hegerfeldt G.G., Henning J., *Fortschr. Phys.*, 1968, **16**, 9.
3. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79.
4. Фушич В.И., Кривский И.Ю., О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского, Препринт ИТФ-68-72, Киев, 1968.
5. Lipkin H.J., Meshkov S., *Phys. Rev. Lett.*, 1965, **14**, 670.

6. Bargmann V., Wigner E.P., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1948, **34**, 211.
7. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
8. Pursey D.L., *Nucl. Phys. B*, 1964, **7**, 174.
9. Fushchych W.I., Equations of motion in odd-dimensional spaces and  $T$ -,  $C$ -invariance, Preprint ИТФ-69-17, Kiev, 1969.
10. Bakri M.M., *Nuovo Cimento A*, 1967, **51**, 864.

# Про динамічну алгебру осцилятора в просторі з індефінітною метрикою

I.I. КОСТИРКО, В.І. ФУЩИЧ

Dynamic algebra  $U(2n + 1)$  of an indefinite harmonic oscillator is found.

Останнім часом широко обговорюється питання про вкладення алгебр симетрії  $P$  (алгебр прихованої симетрії атома водню  $O_4$ ,  $n$ -вимірного гармонічного осцилятора  $\overline{U}_n$ , алгебри Пуанкаре і т. д.) у більш широку алгебру  $G$ . При цьому потрібно вкласти, наприклад, алгебру Пуанкаре  $P$  в  $G$  так, щоб спектр оператора маси (в нерелятивістському випадку оператор енергії), визначений у просторі, де задане незвідне представлення алгебри  $G$  (динамічна алгебра), збігався з експериментально спостережуваним спектром мас елементарних частинок (в нерелятивістському випадку з рівнями енергії). Ясно, що задача про знаходження динамічної алгебри, наприклад, гармонічного осцилятора еквівалентна розв'язку стаціонарної квантово-механічної задачі про спектр енергії осцилятора.

Добре відомо, що для опису процесів розпаду в рамках нерелятивістської квантової механіки доводиться мати справу або з неермітовими гамільтоніанами в гільбертовому просторі, або з ермітовими, але заданими уже в індефінітному просторі. В останньому випадку гамільтоніан може мати як дійсні, так і комплексні власні значення. У зв'язку з цим природно дослідити питання про вкладення алгебри симетрії гармонічного осцилятора  $P$  в  $G$ , гамільтоніан якого заданий в індефінітному просторі. Аналогічна задача для гармонічного осцилятора, коли гамільтоніан заданий в гільбертовому просторі, досліджена в [1–3].

У цій замітці знайдена динамічна алгебра  $n$ -вимірного гармонічного осцилятора, гамільтоніан якого заданий в лінійному векторному просторі з індефінітною метрикою.

Гамільтоніан такого осцилятора має вигляд [4]

$$H = \sum_{i=1}^n (a_i^+ b_i + b_i^+ a_i), \quad (1)$$

де оператори  $a_i^+$ ,  $b_i^+$  спряженні до  $a_i$  і  $b_i$  відповідно і задовольняють комутаційні співвідношення

$$[a_i, b_j^+]_- = \delta_{ij}, \quad [b_i, a_j^+]_- = \delta_{ij}. \quad (2)$$

Неважко перевірити, що  $H$  комутує з такими операторами (без врахування їхніх лінійних комбінацій):

$$\begin{aligned} A_i^j &= \frac{1}{2} \{b_i, a_j^+\}_+, & B_i^j &= \frac{1}{2} \{a_i, b_j^+\}_+, \\ E_i^j &= \frac{1}{2} \{a_i, a_j^+\}_+, & F_i^j &= \frac{1}{2} \{b_i, b_j^+\}_+, \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Якщо знайти всі можливі комутатори між операторами  $A_i^j, B_i^j, E_i^j, F_i^j$ , то можна переконатись, що сукупність операторів (3) та їхні лінійні комбінації утворюють алгебру Лі  $\overline{U}(2n)$  розмірності  $4n^2$ , яка з точністю до умови унімодулярності збігається з  $A_l$  ( $l = 2n - 1$ ) у відповідності з класифікацією Картана. Таким чином, алгеброю симетрії гамільтоніана (1) є  $\overline{U}(2n)$ .

Далі побудуємо динамічну алгебру  $G$ . Для цього розглянемо оператори

$$\begin{aligned} A_i^0 &= g(H)b_i, & A_0^j &= d(H)a_j^+, \\ B_i^0 &= g(H)a_i, & B_0^j &= d(H)b_j^+, \\ C_0^0 &= C(H) \end{aligned} \quad (4)$$

де  $g(H), d(H), C(H)$  задовольняють умови

$$\begin{aligned} g(H)d(H+1) - d(H)g(H-1) &= -1, \\ g(H)d(H+1) + d(H)g(H-1) &= 2C(H), \\ C(H) - C(H-1) &= C(H+1) - C(H) = -1. \end{aligned} \quad (5)$$

Обчислюючи комутатори між операторами (3) і (5) і між собою, можна показати, що сукупність операторів (3) і (4) та їхні лінійні комбінації утворюють  $[4n(n+1)+1]$ -вимірну алгебру Лі  $U(2n+1)$ .

Оскільки у просторі станів осцилятора не існує інваріантних підпросторів відносно операторів (4) і оскільки в алгебру  $\overline{U}(2n+1)$  входять оператори народження і знищення, то в цьому просторі (індефінітному) реалізується незвідне представлення алгебри  $\overline{U}(2n+1)$ , генераторами якого є оператори (3) і (4), а простір станів оператора  $H$  є одним незвідним представленням динамічної алгебри  $G = \overline{U}(2n+1)$ .

Спробуємо побудувати ще інші динамічні алгебри для гамільтоніана (1), які відповідають іншим класам алгебр класифікації Картана. Для цього розглянемо оператори

$$\begin{aligned} E_{kl}^0 &= f(H)a_k a_l, & F_{kl}^0 &= f(H)b_k b_l, \\ E_0^{kl} &= h(H)a_k^+ a_l^+, & F_0^{kl} &= h(H)b_k^+ b_l^+, \\ A_0^{kl} &= h(H)a_k^+ b_l^+, & B_{kl}^0 &= f(H)a_k b_l, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $f(H)$  і  $h(H)$  задовольняють умову

$$f(H)h(H+2) = h(H)f(H-2) = 1. \quad (7)$$

Неважко переконатись, що сукупність операторів (3) і (6) є генератором алгебри  $\overline{Sp}(4n)$ .

Незважаючи на те, що алгебра  $\overline{Sp}(4n)$  містить алгебру симетрії гамільтоніана (1), вона не є динамічною алгеброю, оскільки структура генераторів (6) така, що весь спектр оператора (1) можна одержати не з одного, а принаймні з двох представлень цієї алгебри.

Таким чином, задача про спектр енергії гармонічного і ангармонічного осциляторів може бути розв'язана методом вкладення скінченновимірної алгебри Лі, що відповідає групі наявної симетрії в більш широку, але скінченновимірну алгебру Лі. Це твердження не залежить від того, де заданий гамільтоніан (в гільбертовому чи векторному просторі з індефінітною метрикою). Той факт, що динамічна алгебра для квантовомеханічних задач завжди виявляється скінченновимірною (а не

нескінченновимірною) пов'язаний, мабуть, тільки з тим, що у квантовій механіці маємо справу із скінченим числом ступенів свободи.

1. Barut A.O., *Phys. Rev. B*, 1965, **139**, 1433.
2. Санников С.С., *УФЖ*, 1967, **12**, 335.
3. Mwa R.C., Nuyts J., *Phys. Rev.*, 1967, **145**, 1188.
4. Nagy K.L., *State vector spaces with indefinite metric in quantum theory*, Groningen, P. Nordhoff, 1966.

# Уравнения типа Кеммера–Дэффина в пятимерном пространстве Минковского

И.Ю. КРИВСКИЙ, Г.Д. РОМАНЕНКО, В.И. ФУЩИЧ

An exhaustive analysis of the Kemmer–Duffin equations in five-dimensional Minkowski space has been made. The concrete realisation of generators of the non-uniform de Sitter group is found, which is related to 6-, 15- and 20-dimensional square matrices  $\beta_\mu$  of Kemmer–Duffin–Petiau algebra in five-dimensional space. An effective method is proposed for the realisations of all representations of Kemmer–Duffin–Petiau algebra in spaces of arbitrary dimension.

Проведен полный анализ уравнений типа Кеммера–Дэффина в 5-мерном пространстве Минковского. Найдена конкретная реализация для инфинитезимальных операторов неоднородной группы де Ситтера  $P(1, 4)$ , связанная с 6-, 15- и 20-мерными матрицами  $\beta_\mu$  алгебры Кеммера–Дэффина–Петье в 5-мерном пространстве. Предложен эффективный способ реализации всех представлений алгебры Кеммера–Дэффина–Петье в пространствах произвольной размерности.

## 1. Введение

Идея использования пространств размерностью, большей чем четыре, для описания элементарных частиц и их динамической классификации рассматривалась впервые де Бройлем [1]. Одна из конкретных реализаций этой идеи была предложена Пайсом [2] и в дальнейшем рассматривалась и обобщалась многими авторами в самых различных аспектах (обзор этих работ см. в [3]). В этих работах изучалось объединение однородной группы Лоренца  $O(1, 3)$  с группами “внутренних” симметрий. Более последовательное решение этого вопроса, однако, требует нетривиального объединения неоднородной группы Лоренца (группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ ) с группами внутренних симметрий. Ожидается, что именно на этом пути удастся получить спектр масс и другие характеристики элементарных частиц [4].

В работах [5, 6] предложен один из возможных способов нетривиального объединения группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  с группами внутренних симметрий, основанный на минимальном расширении группы  $P(1, 3)$ . Основные предпосылки предложенного подхода состоят в следующем:

**А.** Оператор (квадрата) массы определяется как независимая динамическая переменная:

$$M^2 \equiv \varkappa^2 + P_4^2, \quad (1)$$

где  $\varkappa$  — некоторый фиксированный параметр, а  $P_4$  — оператор типа компонент 3-импульса  $\mathbf{P}$ , коммутирующий со всеми генераторами алгебры<sup>1</sup>  $P(1, 3)$  группы Пуанкаре.

**Б.** Соотношения между энергией  $P_0$ , 3-импульсом  $\mathbf{P}$  и массой  $M$  физической системы оставляется прежним: (здесь всюду  $\hbar = c = 1$ ):

$$P_0^2 = \mathbf{P}^2 + M^2 \equiv P_k^2 + \varkappa^2, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (2)$$

**В.** Пространства  $p \equiv (p_0, p_1, \dots, p_4)$  и  $x \equiv (x_0, x_1, \dots, x_4)$  принимаются плоскими и взаимно-сопряженными. Из пунктов А, Б, В вытекает тогда, что группой обобщенной релятивистской симметрии является неоднородная группа де Ситтера  $P(1, 4)$  — группа смещений и вращений в пятимерном пространстве Минковского.

В настоящей работе приведен анализ уравнений типа Кеммера–Дэффина в 5-мерном пространстве Минковского и найдена конкретная реализация представлений для генераторов алгебры  $P(1, 4)$ , определенных на решениях этих уравнений. Кроме того, приведен способ эффективной реализации представлений алгебры Кеммера–Дэффина–Петье (КДП) в пространствах произвольной размерности.

## 2. Алгебры Кеммера–Дэффина–Петье

Рассмотрим конкретную реализацию матриц  $\beta_\mu$  алгебры КДП в 5-мерном пространстве, определяемой соотношениями

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = \delta_{\mu\nu} \beta_\lambda + \delta_{\lambda\nu} \beta_\mu, \quad \mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (3)$$

Непосредственным подсчетом числа линейно независимых элементов алгебры (3) можно доказать (по аналогии со случаем алгебры КДП в 4-мерном пространстве), что это число равно  $1^2 + 6^2 + 15^2 + 20^2 = 662$ . Отсюда ясно, что алгебра КДП в 5-мерном пространстве имеет три неприводимых представления размерностями 6, 15 и 20.

Как известно (см., например, [7]), реализацию неприводимых представлений алгебры КДП в 4-мерном пространстве можно эффективно осуществить с помощью процедуры линеаризации уравнений Клейна–Гордона для скаляра и вектора в 4-мерном пространстве. Ниже показано, что реализацию неприводимых представлений алгебры КДП (3) можно эффективно осуществить с помощью процедуры линеаризации уравнений Клейна–Гордона

$$(\partial_\mu^2 - \varkappa^2)A^{(m)}(x) = 0, \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_5), \quad m = 0, 1, 2 \quad (4)$$

для скаляра  $A^{(0)} \equiv A_0$ , вектора  $A^{(1)} \equiv A_\mu$  и тензора  $A^{(2)} \equiv A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ .

Уравнения (4) эквивалентны следующей системе линейных уравнений:

$$A_0 + \partial_\mu F_\mu = 0, \quad F_\mu + \partial_\mu A_0 = 0, \quad (5)$$

$$A_\mu + \partial_\alpha F_{\alpha\mu} = 0, \quad F_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0, \quad (5.a)$$

$$A_{\mu\nu} + \partial_\alpha F_{\alpha\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu\alpha} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} - \partial_\nu F_{\mu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.б)$$

Конечно, системы (5.a) и (5.б) эквивалентны соответствующим уравнениям (4) при дополнительных условиях типа Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \quad \partial_\mu A_{\mu\nu} = 0. \quad (6)$$

Для получения конкретной реализации представлений алгебры (3) достаточно записать уравнения (5) в форме Баба

$$(\beta_\mu \partial_\mu + \varkappa)\Phi = 0, \quad (7)$$

где  $\Phi$  — вектор-функция, компоненты которой строятся из соответствующих компонент величин  $A$  и  $F$ . Размерности матриц  $\beta_\mu$  для систем (5), (5.а) и (5.б), определяемые числом уравнений в них, суть

$$N_5^m \equiv C_5^m + C_5^{m+1} = 6, 15, 20, \quad (m = 0, 1, 2). \quad (8)$$

Тот или иной явный вид матриц  $\beta_\mu$  зависит от сопоставления компонент вектор-функции  $\Phi$  соответствующим компонентам  $A$  и  $F$ . Можно, однако, написать некоторый общий явный вид матриц  $\beta_\mu$ , не связанный с определенным сопоставлением  $\Phi = (A, F)$ . Для этого достаточно пронумеровать строки и столбцы матриц  $\beta_\mu$  компонентами величин  $A$  и  $F$ , входящих в уравнение (5). Такой общий явный вид, приведенный в табл. 1–3 в дополнении, достаточен для проведения любых операций с матрицами  $\beta_\mu$ .

Реализация всех неприводимых представлений матриц  $\beta_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, \dots, n$ , алгебры КДП в случае пространств произвольной размерности  $n$ , когда число линейно независимых элементов алгебры равно

$$1 + \sum_{m=0}^{E(a)} (C_n^m + C_n^{m+1})^2, \quad a \equiv \frac{n+1}{2},$$

где  $E(a)$  — целая часть  $a$ , эффективно осуществляется (см. дополнение) с помощью процедуры линеаризации уравнений (4) для кососимметрических тензоров рангов  $m \leq E(a)$ .

### 3. Представления группы $P(1, 4)$

Эрмитовы матрицы

$$S_{\mu\nu} \equiv -i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu) \quad (9)$$

удовлетворяют соотношениям

$$i[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = \delta_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} + \delta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}, \quad (10)$$

т.е. реализуют  $N = 6$ -,  $15$ -, и  $20$ -мерные представления группы — группы вращений в  $5$ -мерном евклидовом пространстве. Поскольку далее

$$i[\beta_\mu, S_{\nu\alpha}] = \delta_{\mu\nu}\beta_\alpha - \delta_{\mu\alpha}\beta_\nu \quad (11)$$

(кстати, это условие инвариантности уравнения (7) относительно группы  $O(1, 4)$ ), матрицы  $(S_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta})$ , где  $S_{6\alpha} \equiv \beta_\alpha$  реализуют  $N$ -мерные представления группы  $O(6)$ . Подбирая соответствующие матрицы из  $(S_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta})$  с множителями  $\pm i$ , мы получим реализацию  $N = 6$ -,  $15$ -,  $20$ -мерных представлений групп типа<sup>2</sup>  $O(m, n + 1)$ ,  $m + n \leq 5$ .

Отметим, что обычно даже в случае релятивистских уравнений, инвариантных относительно группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ , исследуют вопрос о реализации на решениях этих уравнений представлений однородной группы Лоренца  $O(1, 3)$ . Однако, как подчеркивалось в [9, 10], для адекватной физической интерпретации необходимо ставить и решать вопрос о реализации этими уравнениями представлений именно группы  $P(1, 3)$ , а не  $O(1, 3)$ .

<sup>2</sup>Метод построения представлений групп типа  $O(m, n + 1)$  из представлений групп  $O(m, n)$  и уравнений типа Баба, инвариантных относительно  $O(m, n)$  был предложен в [8].

Ниже выясняется вопрос, какие представления группы  $P(1, 4)$  как группы обобщенной релятивистской симметрии (а не группы  $O(1, 4)$ ) реализуются на множестве решений уравнений (7) с  $6 \times 6$ -,  $15 \times 15$ - и  $20 \times 20$ -матрицами  $\beta_\mu$ . Для решения этого вопроса следует [6] найти явный вид генераторов  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  алгебры  $P(1, 4)$ , связанный с уравнением (7) тем, что  $P_0$  совпадает с гамильтонианом этого уравнения, и значения инвариантов алгебры  $P(1, 4)$ , соответствующие данному явному виду  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$ , а также возможные значения полного набора коммутирующих операторов.

Используя методику [11], можно показать, что уравнение (7) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} i\partial_0\Phi &= H\Phi, & H &\equiv \alpha_k p_k + \beta_5 \varkappa, & \alpha_k &\equiv S_{5k}, \\ \partial_0 &\equiv i\partial_5, & p_k &\equiv -i\partial_k, & k &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (12)$$

Генераторы  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  алгебры  $P(1, 4)$  в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} P_0 &= H = \alpha_k p_k + \beta_5 \varkappa, & P_k &= p_k = -i\partial_k, \\ J_{kr} &= x_{[k} p_{r]} + S_{kr}, & J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k P_0 + P_0 x_k). \end{aligned} \quad (13)$$

При этом имеется в виду, что операторы (13) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры  $P(1, 4)$  лишь на существенных (essential) [12] компонентах  $\Phi' = \beta_5^2 \Phi$ .

Оператор, соответствующий инварианту  $P^2$ , имеет здесь вид

$$P^2 \equiv P_0^2 - P_k^2 = \beta_5^2 \varkappa^2, \quad (14)$$

где

$$\beta_5^2 = \begin{pmatrix} 1^l & \\ & 0^{N-l} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

а  $l = 2, 4, 12$  — размерность единичной матрицы для случаев  $N = 6, 15, 20$ , соответственно. Из (14) видно, что инвариант — знак энергии  $\varepsilon = \beta_5$ . Другие два инварианта алгебры  $P(1, 4)$  — операторы квадратов спина  $\mathbf{S}$  и изоспина  $\mathbf{T}$  (см. (5), (6) в (5) и (2.18) в [6]), а также входящие в полный набор операторы  $S_3$  и  $T_3$ , где

$$S_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} + S_{4a}), \quad T_a \equiv \frac{1}{2}(S_{bc} - S_{4a}), \quad (16)$$

( $a, b, c$ ) =  $\text{sucl}(1, 2, 3)$  вычислены в дополнении. Как видно из (14), представления (11) относятся к представлениям класса I ( $P^2 > 0$ ), где малой группой группы  $P(1, 4)$  является группа  $O(4)$  ( $\mathbf{S}^2$  и  $\mathbf{T}^2$  — ее инварианты).

Из явного вида диагональных операторов  $P^2$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{S}^2$ ,  $\mathbf{T}^2$ ,  $S_3^2$  и  $T_3^2$  (см. дополнение) видно, что множество решений уравнения (7) реализует следующие представления  $D^\pm(s, t)$  группы  $P(1, 4)$  (и, конечно, представления  $D(s, t)$  группы  $O(4)$ ):

$$D^+(0, 0) \oplus D^-(0, 0) \oplus D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (17)$$

$$D^+\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D^-\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus D(1, 0) \oplus D(0, 1) \oplus D(0, 0), \quad (17.a)$$

$$D^+(0, 1) \oplus D^+(1, 0) \oplus D^-(0, 1) \oplus D^-(1, 0) \oplus 2D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (17.6)$$

для  $N = 6, 15, 20$ , соответственно. Указанные представления  $D^\pm(s, t)$  алгебры  $P(1, 4)$  реализуются на существенных компонентах  $\Phi'$ , и только эти компоненты имеют физический смысл.

Из (17) видно, что существенные компоненты  $\Phi'$  уравнения Кеммера–Дэффина (7) в 5-мерном пространстве Минковского симметричным образом описывают мультиплеты: для  $N = 6$  — спиносинглет-изосинглет (частицу типа  $\eta$ -мезон), для  $N = 15$  — спиnodублет-изодублет (частицу типа нуклон-антинуклон  $(N, N)$ ) и для  $N = 20$  — спинотриплет-изосинглет и спиносинглет-изотриплет (частицы типа  $(\pi, \omega)$ -мезоны). Таким образом, уравнения (7) являются примерами уравнений, в которых спин-изоспиновые переменные нетривиально объединены, т.е. примерами уравнений, на основе которых осуществлено динамическое объединение группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  и группы “внутренней” симметрии  $SU(2)$ . Заметим, кстати, что уравнение для нуклона как спиnodублет-изодублета было выписано еще Пайсом [2]. Это уравнение, однако, построено на основе более широкой, чем  $P(1, 4)$ , группы, поэтому полный набор, от которого зависит волновая функция этого уравнения, содержит больше шести независимых переменных.

$P(1, 4)$ -инвариантное выделение существенных компонент  $\Phi'$  уравнения (7) производится с помощью преобразования типа Фолди–Вотхойзена:

$$U = \exp\left(-i\frac{\beta_k p_k}{p} \arctg \frac{p}{\varkappa}\right), \quad p \equiv \sqrt{p_k^2}. \quad (18)$$

Для этих компонент уравнение принимает вид

$$i\partial_0 \tilde{\Phi}' = \beta_5^{(l)} \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2} \tilde{\Phi}', \quad \tilde{\Phi}' \equiv U\Phi'. \quad (19)$$

Генераторы (13) при этом преобразовании принимают квазидиагональный вид, причем “ящики”, относящиеся к уравнению (19), выглядят так:

$$\begin{aligned} P_0 &= \beta_5^{(l)} \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}, & p_k &= -i\partial_k, \\ J_{kr} &= x_{[k} p_{r]} + S_{kr}^{(l)}, & J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{1}{2}(x_k P_0 + P_0 x_k) - \frac{S_{kr} p_r}{P_0 + \varkappa}. \end{aligned} \quad (20)$$

Эти представления являются конкретизацией канонических представлений типа Фолди–Широкова в схеме  $P(1, 4)$  (см. (2.19) в [6]) в том смысле, что здесь спин-изоспиновые матрицы  $S_{kl}$  задаются явно через матрицы  $\beta_\mu$  алгебры КДП, входящие в (7).

Укажем теперь, какие представления  $P(1, 3) \subset P(1, 4)$  реализуются на решениях уравнения (7). Эти представления  $P(1, 3)$  можно реализовать на решениях уравнения (7), не зависящих от  $x_4$ . Для таких решений уравнение (7) является “объединением” соответствующих уравнений Кеммера–Дэффина в схеме  $P(1, 3)$ , которые получаются из уравнения (7), если положить  $p_4 = -i\partial_4 = 0$ . Генераторы алгебры  $P(1, 3)$ , связанные с этими уравнениями, суть генераторы  $P_0, P_a, J_{ab}, J_{0a}$ ;  $a, b = 1, 2, 3$  из (13). Из явного вида инвариантов  $P^2 \equiv P_0^2 - P_a^2$ ;  $\varepsilon = \beta_5$ ;  $\mathbf{S}^2 \equiv \frac{1}{2}S_{ab}^2$  и  $S_3^2 = S_{12}^2$  алгебры  $P(1, 3)$  видно, что эти уравнения реализуют представления

$$D^+(0) \oplus D^-(0) \oplus D(1) \oplus D(0), \quad (21)$$

$$D^+(0) \oplus D^-(0) \oplus D^+(1) \oplus 2D(1) \oplus D(0), \quad (21.a)$$

$$2[D^+(1) \oplus D^-(1) \oplus D(1) \oplus D(0)] \quad (21.б)$$

для  $N = 6, 15, 20$ , соответственно. Фактически это означает, что уравнения (7) при  $p_4 = 0$  распадаются на независимые 5-мерные и 10-мерные уравнения Кеммера–Дэффина с соответствующими неприводимыми  $5 \times 5$ - и  $10 \times 10$ -матрицами  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5$ .

Формулы (21), однако, нельзя вполне последовательно интерпретировать (как это предлагалось в [13]) как тот факт, что уравнения (7) в схеме  $P(1, 4)$  описывают физические объекты, получаемые “слиянием” частиц со спином 0 и 1 (для  $N = 15$ ), 1 и 1 (для  $N = 20$ ). Это связано с тем, что в квантовой схеме, основанной на группе  $P(1, 4)$ , шесть величин (а не четыре, как в случае  $P(1, 3)$ ) образуют полный набор, например  $\mathbf{p}, p_4, S_3, T_3$  (или любой другой, но, конечно, содержащий именно шесть величин). Поэтому уравнения (7), инвариантные относительно группы  $P(1, 4)$ , описывают не физические объекты, получаемые слиянием частиц, а физические объекты, характеризуемые шестью квантовыми числами. В работах [5, 6] была предложена непротиворечивая физическая интерпретация всех величин этого набора:  $\mathbf{p}$  — 3-импульс,  $p_4$  — массовая переменная,  $S_3, T_3$  — проекции спина и изоспина частицы, описываемой уравнением (7).

Квантовополевой лагранжев формализм, основанный на  $P(1, 4)$ -инвариантных уравнениях (7), строится в полной аналогии с обычным лагранжевым формализмом в схеме  $P(1, 3)$ . В заключение заметим, что приведенный в дополнении явный вид матриц  $\beta_\mu, \mu \leq n$  для произвольного  $n$  позволяет аналогичным образом эффективно провести анализ соответствующих представлений групп  $P(1, n-1)$ , реализуемых на решениях уравнений типа (7) в  $n$ -мерных пространствах Минковского.

### Дополнение

В табл. 1–6 схематически записаны матричные элементы матриц  $\beta_\mu, \mu = 1, 2, \dots, n$ , алгебр КДП (3) в пространствах произвольных размерностей, получаемых процедурой линеаризации уравнений Клейна–Гордона (4) для кососимметрических тензоров  $A^{(m)} \equiv A^{(m)}(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $m$ -го ранга, т.е. матриц  $\beta_\mu$ , получаемых при записи уравнений (5) в форме Баба (7).

Таблица 1

$N_n^0$	$n$	$\beta_\mu$
2	1	1,0
3	2	2,0
4	3	3,0
5	4	4,0
6	5	5,0
7	6	6,0
	$\vdots$	

Таблица 2

$N_n^1$	$n$	Ненулевые элементы матриц $\beta_\mu, \mu \leq n$					
—	1	12,2	13,3	14,4	15,5	16,6	...
3*	2	21,1	23,3	24,4	25,5	26,6	...
6	3	31,1	32,2	34,4	35,5	36,6	...
10	4	41,1	42,2	43,3	45,5	46,6	...
15	5	51,1	52,2	53,3	54,4	59,6	...
21	6	61,1	62,2	63,3	64,4	65,5	...
	$\vdots$						

Таблица 3

$N_n^2$	$n$	Ненулевые элементы матриц $\beta_\mu, \mu \leq n$								
—	1	123,23	124,24	134,34	125,25	135,35	145,45	126,26	136,36	...
—	2	213,13	214,14	234,34	215,15	235,35	245,45	216,16	236,36	...
4*	3	312,12	314,14	324,24	315,15	325,25	345,45	316,16	326,26	...
10*	4	412,12	413,13	423,23	415,15	425,25	435,35	416,16	426,26	...
20	5	512,12	513,13	523,23	514,14	524,24	534,34	516,16	526,26	...
35	6	612,12	613,13	623,23	614,14	624,24	634,34	615,15	625,25	...
	⋮									

Таблица 4

$A_{\mu\nu}$	12	13	23	14	24	34	15	25	35	45
№	1	4	2	5	3	6	7'	8'	9'	10'
$F_{\mu\nu\alpha}$	123	124	134	234	125	135	235	145	245	345
№	10	9	8	7	6'	3'	5'	2'	4'	1'

Таблица 5

$\beta_1$		$\beta_2$		$\beta_3$		$\beta_4$		$\beta_5$	
2,10	10,2	-4,10	-10,4	1,10	10,1	1,9	9,1	1,6'	6',1
3,9	9,3	-5,9	-9,5	-5,8	-8,5	4,8	8,4	2,5'	5',2
6,8	8,6	6,7	7,6	-3,7	-7,3	2,7	7,2	3,4'	4',3
2',10'	10',2'	4',10'	10',4'	1',10'	10',1'	-1',9'	-9',1'	4,3'	3',4
3',9'	9',3'	5',9'	9',5'	-5',8'	-8',5'	-4',8'	-8',4'	5,2'	2',5
6',8'	8',6'	-6',7'	-7',6'	-3',7'	-7',3'	-2',7'	-7',2'	6,1'	1',6

Таблица 6

$iS_{12}$		$iS_{13}$		$iS_{23}$		$iS_{14}$		$iS_{24}$		$iS_{34}$	
4,2	-2,4	-1,2	2,1	1,4	-4,1	-1,3	3,1	1,5	-5,1	4,5	-5,4
5,3	-3,5	5,6	-6,5	3,6	-6,3	-4,6	6,4	-2,6	6,2	2,3	-3,2
-7,8	8,7	7,9	-9,7	-8,9	9,8	-7,10	10,7	8,10	-10,8	-9,10	10,9

В первой колонке указаны размерности  $N_n^m = C_n^m + C_n^{m+1}$  матриц  $\beta_\mu$  при данных  $n$  и  $m$ . Звездочкой отмечены размерности представлений, повторяющих представления в таблицах  $m \leq E[(n+1)/2]$ . Во второй колонке приведены размерность пространства  $n$  и индексы  $\mu \leq n$  матриц  $\beta_\mu$ . Конкретные значения этих элементов зависят от сопоставления  $\Phi = (A, F)$ . При этом, например, символ “325, 25” в табл. 3 означает, что

$$(\beta_3)_{pq} = (\beta_3)_{qp} = -1, \quad \text{если } A_{25} = \Phi_p, \quad F_{325} = \Phi_q, \\ p, q \in (1, 2, \dots, N_5^2 = 20).$$

Правило написания таблиц элементов матриц  $\beta_\mu$ , получаемых процедурой линеаризации уравнений (4) для кососимметрических тензоров ранга  $m \geq 3$ , ясны из табл. 1–3.

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} 0^3 & & & & \\ \hline & 2 \cdot 1^3 & & & \\ \hline & & \frac{3}{4} \cdot 1^4 & & \\ \hline & & & 0^3 & \\ \hline & & & & 2 \cdot 1^3 \\ \hline & & & & \frac{3}{4} \cdot 1^4 \end{array} \right), & T^2 &= \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} 2 \cdot 1^3 & & & & \\ \hline & 0^3 & & & \\ \hline & & \frac{3}{4} \cdot 1^4 & & \\ \hline & & & 2 \cdot 1^3 & \\ \hline & & & & 0^3 \\ \hline & & & & \frac{3}{4} \cdot 1^4 \end{array} \right), \\
 S_3^2 &= \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} 0^3 & & & & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \\ \hline & & \frac{1}{4} \cdot 1^4 & & \\ \hline & & & 0^3 & \\ \hline & & & & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & & & & \frac{1}{4} \cdot 1^4 \end{array} \right), & T_3^2 &= \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 1 & 1 & & \\ \hline & & & 0^3 & \\ \hline & & & & \frac{1}{4} \cdot 1^4 \\ \hline & & & & & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & & & & 0^3 \\ \hline & & & & & & & \frac{1}{4} \cdot 1^4 \end{array} \right), \\
 \beta_5 &= \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} 1^3 & & & & \\ \hline & -1^3 & & & \\ \hline & & 0^4 & & \\ \hline & & & 1^3 & \\ \hline & & & & -1^3 \\ \hline & & & & & 0^4 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

Для иллюстрации ниже приводятся некоторые необходимые вычисления только с  $20 \times 20$ -матрицами  $\beta_\mu$ ,  $\mu \leq 5$ . В данном случае целесообразно пронумеровать компоненты величин  $A_{\mu\nu}$  и  $F_{\mu\nu\alpha}$  как указано в табл. 4. При такой нумерации матрицы  $\beta_\alpha$  имеют вид, схематически приведенный в табл. 5, где выписаны все ненулевые элементы, равные  $\pm 1$ .

Матрицы  $S_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4$ ), определяемые по (9), имеют вид

$$S_{kl} = \left( \begin{array}{c|c} S_{kl}^{(10)} & \\ \hline & S_{kl}^{(10)} \end{array} \right), \quad S_{kl}^{(10)} = \left( \begin{array}{c|c} S_{kl}^{(6)} & \\ \hline & S_{kl}^{(4)} \end{array} \right).$$

В табл. 6 приведены элементы  $S_{kl}^{(10)}$  только верхнего “ящика”, поскольку нижний реализует те же самые представления группы  $O(4)$ , что и верхний. Квадраты спин-изоспиновых матриц, определенных по (16), диагонализуются матрицей

$$V = V^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{array}{cccccccc} 1, 1 & 2, 2 & 3, 3 & 1, 6 & 2, 5 & 3, 4 & 7, 7 & 8, 8 \\ -4, 4 & -5, 5 & -6, 6 & -6, 1 & 5, 2 & 4, 3 & 9, 9 & 10, 10 \end{array} \right),$$

где выписаны только ненулевые элементы верхнего ящика, причем, например,  $(V)_{44} = -1/\sqrt{2}$ . Диагональные  $S^2$ ,  $T^2$ ,  $S_3^2$ ,  $T_3^2$  и  $\beta_5$  имеют вид, представленный выше на схеме.

1. de Brodlié L., Introduction to the Vigier theory of elementary particles, Amsterdam, 1963.
2. Pais A., *Physica*, 1953, **19**, 869.
3. Соколик Г.А., Групповые методы в теории элементарных частиц, Атомиздат, 1965.
4. Hegerfeldt G.C., Henning J., *Fortschr. Phys.*, 1968, **16**, № 9.
5. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79.
6. Фушич В.И., Кривский И.Ю., О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского, Препринт ИТФ–68–72, Киев, 1968.
7. Roman P., Theory of elementary particles, Amsterdam, 1960.
8. Фушич В.И., *Укр. физ. ж.*, 1966, № 8, 907.
9. Foldy L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
10. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 861, 1196.
11. Case K.M., *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 1513.
12. Garrido L.N., Oliver L., *Nuovo Gim. A*, 1967, **52**, 588.
13. Бедрицкий А.И., *ЖЭТФ*, 1968, **55**, 1367.

# Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I

В.И. ФУЩИЧ

The study has been made of the irreducible representations of the total inhomogeneous de Sitter group  $\tilde{P}(1,4)$ . The canonical and non-canonical equations of motion invariant under the  $\tilde{P}(1,4)$  group are found. The equation is proposed which makes it possible to obtain the mass spectrum of the particles increasing with spin and isospin, and, as a by-product, the equation of motion for zero-mass particle is obtained, which is the covariant generalization of the Weyl–Hammer–Good equation. The eight-component equation (6.7) is shown to be the simplest  $P$ -,  $C$ - and  $T$ -invariant equation in the five-dimensional approach. Canonical transformations for the free equations of the Dirac type are considered.

Изучены неприводимые представления полной неоднородной группы де Ситтера  $\tilde{P}(1,4)$ . Найдены канонические и неканонические уравнения движения, инвариантные относительно группы  $\tilde{P}(1,4)$ . Предложено уравнение, с помощью которого можно получить возрастающий спектр масс частиц в зависимости от спина и изоспина и как побочный результат получено уравнение движения для частицы с нулевой массой, являющееся ковариантным обобщением уравнения Вейля–Хаммера–Гуда. Показано, что простейшим  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантным уравнением в пятимерном подходе является восьмикомпонентное уравнение (6.7). Рассмотрены канонические преобразования для уравнений типа Дирака.

За последнее время вопрос о расширении группы Пуанкаре и объединение ее с группами внутренних симметрий в различных направлениях и для различных целей был предметом многих исследований (см. обзор [1]). Следует отметить, что идея расширения группы Пуанкаре тесно связана с довольно старой идеей о расширении четырехмерного пространственно-временного континуума, которая интенсивно обсуждалась в 30-х годах в общей теории относительности в связи с объединением теорий тяготения и электричества. Вопросу построения основ 5-мерной оптики, исходя из пятимерного пространства Минковского, посвящена монография Ю. Румера [2]. Задача о расширении однородной группы Лоренца рассматривалась многими авторами (наиболее полный обзор по этим работам см. в [3]).

В настоящее время стало ясно, что для задач, связанных с нахождением спектра масс частиц на основе вложения групп, необходимо рассматривать вопрос о расширении группы Пуанкаре  $P(1,3)$ , а не однородной группы Лоренца  $O(1,3)$ .

Исходя из предположения, что оператор массы должен входить в теорию “на равных правах с оператором импульса” [4], в работах [5, 6, 8] было рассмотрено минимальное в некотором смысле расширение группы Пуанкаре  $P(1,3)$ . В качестве такого расширения выбрана неоднородная группа де Ситтера  $P(1,4) \supset P(1,3)$  в пятимерном пространстве Минковского.

В работах [7, 8] было показано, что уравнения Дирака в пятимерном пространстве Минковского, в отличие от уравнений Дирака в четырехмерном пространстве, не инвариантны относительно  $PTC$ -преобразований. Такое существенное различие  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -свойств уравнений Дирака в зависимости от размерности пространств и побудило рассмотреть вопрос о дискретных преобразованиях в пятимерном подходе в наиболее общей постановке.

Настоящая работа является продолжением предыдущих наших работ [5, 6, 8, 21] по неоднородной группе де Ситтера  $P(1, 4)$ .

При построении неприводимых представлений полной неоднородной группы де Ситтера  $\tilde{P}(1, 4)$  повсюду используются методы и идеи работ Вигнера, Фолди и Широкова [9, 10, 11] по представлениям группы Пуанкаре. Рассмотрения ведутся в такой форме, что почти все основные результаты работы с некоторыми очевидными оговорками обобщаются и на группу  $P(1, n)$  — группу вращений и трансляций в  $(1 + n)$ -мерном пространстве Минковского.

В разделе 1 приведены основные сведения о группе  $P(1, 4)$  и определены операторы дискретных преобразований. В последующих разделах 2–4 найдены явные виды генераторов группы  $P(1, 4)$ , реализующих ее неприводимые представления, и с помощью которых построены генераторы группы  $\tilde{P}(1, 4)$ . Приведены схемы зацеплений неприводимых представлений группы  $P(1, 4)$  операторами дискретных преобразований и выписаны канонические уравнения, инвариантные относительно полной группы  $\tilde{P}(1, 4)$ .

В разделе 5 предложены неканонические уравнения, инвариантные относительно группы  $\tilde{P}(1, 4)$ , которые приводят к возрастающему спектру масс частиц в зависимости от спина и изоспина. Раздел 6 посвящен теоретико-групповому анализу восьмикомпонентного уравнения, инвариантного относительно  $\tilde{P}(1, 4)$ . Исходя из этого уравнения, предложено уравнение движения, описывающее систему с произвольным спином и изоспином. В разделе 7 рассмотрено несколько типов канонических преобразований для уравнений типа Дирака (для случаев  $P_\mu^2 \geq 0$ , и  $P_\mu^2 < 0$ ).

## 1. Основные определения и инварианты группы $P(1, 4)$

Генераторы неоднородной группы де Ситтера  $P_\mu, J_{\nu\sigma}$  удовлетворяют перестановочным соотношениям<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, & [P_\mu, J_{\nu\sigma}]_- &= i(g_{\mu\nu}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}]_- &= i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $g_{00} = 1$ ,  $g_{kl} = -\delta_{kl}$ ;  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$ ;  $k, l = 1, 2, 3, 4$ .

Можно показать, что группа  $P(1, 4)$  имеет три основных инварианта [5, 6]:

$$P^2 \equiv P_\mu^2 = P_0^2 - P^2 - P_4^2; \quad (1.2)$$

$$W^2 \equiv \frac{1}{6} \mathcal{V}_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2} w_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2} P_\mu^2 J_{\nu\alpha}^2 - P_\mu P_\nu J_{\mu\sigma} J_{\nu\sigma}, \quad (1.3)$$

$$V = -\frac{1}{4} J_{\mu\nu} w_{\mu\nu} = -\frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\alpha} J_{\mu\nu} J_{\rho\sigma} P_\alpha, \quad (1.4)$$

<sup>1</sup>Алгебры и соответствующие им группы обозначаются одинаковыми символами.

где антисимметричный тензор третьего ранга  $\mathcal{V}_{\mu\nu\alpha}$  и фундаментальный антисимметричный тензор второго ранга имеют вид

$$\mathcal{V}_{\mu\nu\alpha} \equiv P_\mu J_{\nu\alpha} + P_\nu J_{\alpha\mu} + P_\alpha J_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

$$w_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{6}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}\mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}P_\alpha J_{\beta\gamma}. \quad (1.6)$$

Между генераторами группы  $P(1, 4)$  и тензором  $w_{\mu\nu}$  можно установить следующие коммутационные соотношения:

$$[P_\mu, w_{\rho\sigma}]_- = 0, \quad [J_{\mu\nu}, w_{\rho\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}w_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}w_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}w_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}w_{\mu\rho}), \quad (1.7)$$

$$[w_{\mu\nu}, w_{\rho\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}\varepsilon_{\nu\rho\alpha\beta\gamma} + g_{\nu\rho}\varepsilon_{\mu\sigma\alpha\beta\gamma} - g_{\mu\rho}\varepsilon_{\nu\sigma\alpha\beta\gamma} - g_{\nu\sigma}\varepsilon_{\mu\rho\alpha\beta\gamma})P_\alpha w_{\beta\gamma}. \quad (1.8)$$

В  $(1 + n)$ -мерном пространстве Минковского определим два оператора пространственного отражения  $P$ :

$$P^{(n)}\Psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = r^{(n)}\Psi(x_0, -x_1, -x_2, \dots, -x_n), \quad (1.9)$$

$$P^{(n-1)}\Psi(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = r^{(n-1)}\Psi(x_0, -x_1, -x_2, \dots, -x_{n-1}, x_n), \quad (1.10)$$

причем

$$[P_0, P^{(n)}]_- = 0 = [J_{kl}, P^{(n)}]_-, \quad [P_k, P^{(n)}]_+ = 0 = [J_{0k}, P^{(n)}]_+, \quad (1.11)$$

$$P^{(n)} \cdot P^{(n)} \sim 1, \quad P^{(n-1)} \cdot P^{(n-1)} \sim 1,$$

$$[P_0, P^{(n-1)}]_- = [P_n, P^{(n-1)}]_- = [J_{0n}, P^{(n-1)}]_- = [J_{ab}, P^{(n-1)}]_- = 0, \quad (1.12)$$

$$[P_a, P^{(n-1)}]_+ = [J_{nb}, P^{(n-1)}]_+ = [J_{0a}, P^{(n-1)}]_+ = 0,$$

где индексы  $a$  и  $b$  принимают значения  $a, b = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Как и в случае группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ , можно дать два неэквивалентных определения оператора отражения времени  $T$  [10]. Согласно Паули при замене  $x_0 \rightarrow -x_0$  волновая функция преобразуется по закону

$$T^p\Psi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \tau^p\Psi(-x_0, x_1, \dots, x_n), \quad T^p \cdot T^p \sim 1, \quad (1.13)$$

$$[P_k, T^p]_- = [J_{kl}, T^p]_- = 0, \quad [P_0, T^p]_+ = [J_{0k}, T^p]_+ = 0. \quad (1.14)$$

Согласно Вигнеру волновая функция при отражении времени преобразуется по закону

$$T^\omega\Psi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \tau^\omega\Psi(-x_0, x_1, \dots, x_n), \quad T^\omega \cdot T^\omega \sim 1, \quad (1.15)$$

$$[P_k, T^\omega]_+ = 0 = [J_{kl}, T^\omega]_+, \quad [P_0, T^\omega]_- = 0 = [J_{0k}, T^\omega]_-. \quad (1.16)$$

Оператор зарядового сопряжения определяется как

$$C\Psi(x_0, x_1, \dots, x_n) = \tau^c\Psi^*(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad C^2 \sim 1, \quad (1.17)$$

$$[P_\mu, C]_+ = 0 = [J_{\mu\nu}, C]_+. \quad (1.18)$$

Размерность матриц  $r^{(n)}$ ,  $r^{(n-1)}$ ,  $\tau^p$ ,  $\tau^\omega$  и  $\tau^c$  зависит от размерности по спиновым индексам представления группы  $P(1, n)$ .

В дальнейшем будем рассматривать только операцию  $P^{(n-1)}$ , поскольку в пространстве Минковского размерности  $(1+2n)$  — отражение всех пространственных осей  $P^{(2n)}$  — сводится к повороту, поэтому всякое уравнение, инвариантное относительно группы  $P(1, 2n)$ , будет  $P^{(2n)}$ -инвариантно.

## 2. Представления полной группы $\tilde{P}(1, 4)$ для случая $P^2 > 0$

В том случае, когда инвариант  $P^2 \equiv P_\mu^2 = \varkappa^2 > 0$ , кроме основных инвариантов (1.3) и (1.4), имеется дополнительный инвариант группы  $P(1, 4)$  — оператор знака энергии

$$\hat{\varepsilon}_1 = \frac{P_0}{|P_0|} = \frac{P_0}{E_1}, \quad E_1 = \sqrt{p^2 + p_4^2 + \varkappa^2}, \quad (2.1)$$

где  $\varkappa$  — постоянная величина,  $p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$ . Малой группой в этом случае является компактная группа вращений в четырехмерном евклидовом пространстве  $O(4)$ , которая локально изоморфна группе  $SU(2) \otimes SU(2)$ . Из этого следует, что группа  $P(1, 4)$  является нетривиальным объединением группы Пуанкаре и изотонической группы внутренних симметрий. Отметим, что одну из групп  $SU(2)$  можно, вообще говоря, связывать, например, с  $W$ -спином. В дальнейшем, однако, мы будем связывать ее с изоспином.

В системе “покоя”, где все  $p_k = 0$ , инварианты  $W^2$  и  $V$  связаны с инвариантами группы  $O(4)$  следующими соотношениями:

$$W^2 = 2P_\mu^2(\mathbf{S}^2 + \mathbf{T}^2), \quad (2.2)$$

$$V = \varepsilon_1 \sqrt{P_\mu^2(\mathbf{S}^2 - \mathbf{T}^2)}, \quad (2.3)$$

где операторы  $\mathbf{S} \equiv (S_1, S_2, S_3)$ ,  $\mathbf{T} \equiv (T_1, T_2, T_3)$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} + S_{4a} \right), \\ T_a &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} - S_{4a} \right), \quad a, b, c = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$S_{kl}$  — генераторы группы  $O(4)$ .

Все неприводимые представления класса I ( $P^2 > 0$ ) унитарны, конечномерны и задаются числами  $s$ ,  $\tau$ ,  $\varepsilon_1$ . Операторы  $\mathbf{S}^2$ ,  $\mathbf{T}^2$  и  $\hat{\varepsilon}_1$  для неприводимых представлений  $P(1, 4)$  кратны единичным операторам

$$\mathbf{S}^2 = s(s+1) \cdot 1, \quad \mathbf{T}^2 = \tau(\tau+1) \cdot 1, \quad \hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \cdot 1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1. \quad (2.5)$$

Числа  $s$  и  $\tau$ , принимающие целые и полуцелые положительные значения, отождествляются со спином и изоспином частицы. Неприводимые представления класса I будем обозначать через  $D^{\varepsilon_1}(s, \tau, \varkappa)$ .

Используя методику работ [9, 10, 11], можно найти канонический вид типа Фолди–Широкова для генераторов  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$ . Для представления  $D^{\varepsilon_1}(s, \tau, \varkappa)$  они имеют вид

$$\begin{aligned} P_0 &= \varepsilon_1 E_1, & P_k &= p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}, & J_{kl} &= x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \\ J_{0k} &= x_0 p_k - \frac{\varepsilon_1}{2} (x_k E_1 + E_1 x_k) - \varepsilon_1 \frac{S_{kl} p_l}{E_1 + \varkappa}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где операторы  $S_{kl}$  реализуют неприводимое представление  $D(s, \tau)$  группы  $O(4)$ . Помимо двух представлений  $D^+(s, \tau, \varkappa)$  и  $D^-(s, \tau, \varkappa)$ , задаваемых формулой (2.6), можно построить (с помощью операторов  $T^p$  и  $P^{(3)}$ ) два других представления, неэквивалентных представлениям Фолди–Широкова (2.6), генераторы  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  для этих представлений задаются формулами

$$\begin{aligned} P_0 &= E_1, & P_a &= p_a, & P_4 &= -p_4, \\ J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{4a} &= x_a p_4 - x_4 p_a - S_{4ab}, \\ J_{0a} &= x_0 p_a - \frac{1}{2} (x_a E_1 + E_1 x_a) - \frac{S_{ab} p_b + S_{a4} p_4}{E_1 + \varkappa}, \\ J_{04} &= -x_0 p_4 + \frac{1}{2} (x_4 E_1 + E_1 x_4) + \frac{S_{4b} p_b}{E_1 + \varkappa}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

и

$$\begin{aligned} P_0 &= -E_1, & P_a &= p_a, & P_4 &= -p_4, \\ J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{4a} &= x_a p_4 - x_4 p_a - S_{4ab}, \\ J_{0a} &= -x_0 p_a + \frac{1}{2} (x_a E_1 + E_1 x_a) + \frac{S_{ab} p_b + S_{a4} p_4}{E_1 + \varkappa}, \\ J_{04} &= x_0 p_4 - \frac{1}{2} (x_4 E_1 + E_1 x_4) - \frac{S_{4b} p_b}{E_1 + \varkappa}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Представления алгебры  $P(1, 4)$ , задаваемые формулами (2.7) и (2.9), будем обозначать через  $D^+(\tau, s)$  и  $D^-(\tau, s)$ .

Операторы (2.6)–(2.8) эрмитовы в скалярном произведении

$$(\Phi, \Phi') = \sum_{s_3 = -s, \tau_3 = -\tau}^{s, \tau} \int d^4 x \Phi^*(x_0, \mathbf{x}, x_4, s_3, \tau_3) \Phi'(x_0, \mathbf{x}, x_4, s_3, \tau_3) \quad (2.9)$$

или (в  $p$ -представлении)

$$(\varphi, \varphi') = \sum_{s_3 = -s}^s \int d^3 p X(\mathbf{p}, s_3; \tau_3, s, \varepsilon_1, \varkappa), \quad (2.10)$$

$$X \equiv \sum_{\tau_3 = -\tau}^{\tau} \int \frac{dp_4}{2E_1} \langle \varphi | \mathbf{p}, p_4, s_3, \tau_3; s, \tau, \varepsilon_1, \varkappa \rangle \langle \mathbf{p}, p_4, s_3, \tau_3; s, \tau, \varepsilon_1, \varkappa | \varphi' \rangle.$$

Генераторы группы  $P(1, 4)$ , которые заданы в пространстве, где реализуется прямая сумма четырех неприводимых представлений

$$D^+(s, \tau, \varkappa) \oplus D^-(s, \tau, \varkappa) \oplus D^+(\tau, s, \varkappa) \oplus D^-(\tau, s, \varkappa), \quad (2.11)$$

имеют вид

$$\begin{aligned}
 \tilde{P}_0 &= \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_1 \end{pmatrix}, & \tilde{P}_a &= \begin{pmatrix} p_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_a \end{pmatrix}, \\
 \tilde{P}_4 &= \begin{pmatrix} p_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_4 \end{pmatrix}, \\
 \tilde{J}_{ab} &= \begin{pmatrix} J_{ab} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{ab} \end{pmatrix}, & \tilde{J}_{4a} &= \begin{pmatrix} J_{4a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{4a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{4a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{4a} \end{pmatrix}, \\
 \tilde{J}_{0a} &= \begin{pmatrix} J_{0a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_{0a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{0a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{0a} \end{pmatrix}, & \tilde{J}_{04} &= \begin{pmatrix} J_{04} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_{04} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{04} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{04} \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

где операторы  $J_{\mu\nu}$  задаются формулой (2.6) при значении  $\varepsilon_1 = 1$ .

Из определения (1.10) и коммутационных соотношений (1.12) следует, что если вектор  $\Psi_{s,\tau}^{\varepsilon_1}(x)$  принадлежит пространству  $\{\Psi_s^{\varepsilon_1}(x)\}$ , где реализуется представление  $D^{\varepsilon_1}(s, \tau, \varkappa)$ , то вектор  $P^{(3)}\Psi_s^{\varepsilon_1}(x)$  принадлежит пространству  $\{\Psi_s^{\varepsilon_1}(x)\}$ , т.е. пространству, где реализуется представление  $D^{\varepsilon_1}(\tau, s, \varkappa)$ . Это означает, что, например, пространство  $\{\Psi_{s,\tau}^+\}$  неинвариантно относительно оператора  $P^{(3)}$ .

Из определения (1.13) и соотношений (1.14) следует, что если вектор  $\Psi_{s,\tau}^+(x) \in \{\Psi_{s,\tau}^+\}$ , то вектор  $T^p\Psi_{s,\tau}^+(x) \in \{\Psi_{s,\tau}^-\}$ . Проведя аналогичные рассуждения для операторов  $T^\omega$  и  $C$ , можно прийти к следующей схеме зацеплений неприводимых представлений группы  $P(1, 4)$ :

$$\begin{aligned}
 D^+(s, \tau, \varkappa) &\xleftrightarrow{P^{(3)}} D^+(\tau, s, \varkappa) \\
 T^p \downarrow C & & C \downarrow T^p \\
 D^-(s, \tau, \varkappa) &\xleftrightarrow{P^{(3)}} D^-(\tau, s, \varkappa).
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Итак, из этой схемы вытекает следующий результат: *Неприводимое представление полной неоднородной группы де Ситтера  $\tilde{P}(1, 4)$  (для  $s \neq \tau$ ) для класса  $I$  реализуется в пространстве, где реализуется прямая сумма (2.11) неприводимых представлений ограниченной группы  $P(1, 4)$ , причем генераторы  $\tilde{P}_\mu$  и  $\tilde{J}_{\mu\nu}$  группы  $\tilde{P}(1, 4)$  имеют вид (2.12).*

*В том случае, когда  $s = \tau$ , неприводимое представление группы  $\tilde{P}(1, 4)$  реализуется в пространстве, где реализуется прямая сумма двух неприводимых представлений ограниченной группы  $P(1, 4)$*

$$D^+(s = \tau, \tau) \oplus D^-(s = \tau, \tau). \tag{2.14}$$

Зная явный вид генераторов группы  $\tilde{P}(1, 4)$  (явный вид дискретных операторов мы здесь не приводим), нетрудно теперь выписать квантовомеханические уравнения, которые полностью инвариантны или частично инвариантны относительно дискретных преобразований.

Уравнение, на решениях которого реализуется неприводимое представление (2.11) группы  $\tilde{P}(1, 4)$  имеет вид

$$i \frac{\partial \tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4)}{\partial x_0} = \tilde{\mathcal{H}} \tilde{\Phi}(x, \mathbf{x}, x_4), \quad (2.15)$$

где волновая функция  $\tilde{\Phi}$  имеет  $4(2s+1)(2\tau+1)$  компонент. Компоненты ее нумеруются числами  $s_3$  и  $\tau_3$  ( $-s \leq s_3 \leq s$ ,  $-\tau \leq \tau_3 \leq \tau$ ), а оператор  $\tilde{\mathcal{H}} \equiv \tilde{P}_0$  имеет вид

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\beta} E_1, \quad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{1} \end{pmatrix},$$

$\hat{1}$  — единичная матрица размерности  $(2s+1)(2\tau+1)$ . Каноническое уравнение (2.15) не имеет явно инвариантной формы, но несмотря на это оно инвариантно относительно группы  $\tilde{P}(1, 4)$ , поскольку выполняется условие

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial x_0} - \tilde{\mathcal{H}}, \tilde{Q} \right]_- \tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4) = 0, \quad (2.16)$$

где  $\tilde{\Phi}$  — любое решение уравнения (2.15), а  $\tilde{Q}$  — любой оператор из алгебры  $\tilde{P}(1, 4)$ . Выполнение условия (2.16) означает, что множество всех решений уравнения (2.15)  $\{\tilde{\Phi}\}$  инвариантно относительно алгебры  $\tilde{P}(1, 4)$ . Уравнение (2.15) описывает не одну частицу, как соответствующее уравнение в случае группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ , а совокупность частиц — изотопический мультиплет частиц.

Приведем еще один пример уравнения, инвариантного относительно группы  $P(1, 4)$ , но которое только частично  $T$ -,  $P$ -инвариантно. Уравнение, которое  $P^{(4)}$ -,  $T^p$ -,  $C$ -инвариантно, но  $P^{(3)}$ -,  $P^{(3)} \cdot T^\omega$ -неинвариантно, имеет вид

$$i \frac{\partial \Phi(x_0, \mathbf{x}, x_4)}{\partial x_0} = \mathcal{H} \Phi(x_0, \mathbf{x}, x_4) = \beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + p_4^2} + \varkappa^2 \Phi(x_0, \mathbf{x}, x_4), \quad (2.17)$$

где  $\beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}$ ,  $\Phi(x_0, \mathbf{x}, x_4)$  —  $2(2s+1)(2\tau+1)$ -компонентный вектор, преобразующийся по представлению  $D^+(s, \tau) \oplus D^-(s, \tau)$ . Генераторы группы  $P(1, 4)$  для указанного представления совпадают с (2.7), где следует сделать замену

$$\varepsilon_1 \rightarrow \beta, \quad S_{kl} \rightarrow \begin{pmatrix} S_{kl} & 0 \\ 0 & S_{kl} \end{pmatrix}.$$

Уравнение на группе  $P(1, 4)$ , которое  $P^{(4)}$ -,  $T^\omega$ -инвариантно, но  $P^{(3)}$ -,  $T^p$ -,  $C$ -неинвариантно, формально совпадает с уравнением (2.17), однако волновая функция  $\Phi$  преобразуется при этой по представлению  $D^+(s, \tau) \oplus D^-(\tau, s, \varkappa)$  (или

$D^+(\tau, s, \varkappa) \oplus D^-(s, \tau, \varkappa)$ ), а генераторы группы  $\tilde{P}(1, 4)$  строятся из операторов (2.6) (при  $\varepsilon_1 = +1$ ) и операторов (2.8). Как будет показано в разделе 6, именно по таким прямым суммам преобразуются волновые функции в уравнении Дирака в случае группы  $P(1, 4)$ .

### 3. Представления группы $\tilde{P}(1, 4)$ для случая $P^2 = 0$

В том случае, когда инвариант  $P^2 = P_0^2 - P_a^2 - P_4^2 = 0$  и не все  $P_k = 0$ , дополнительным инвариантом группы является также оператор знака энергии

$$\hat{\mathcal{E}}_2 = \frac{P_0}{E_2}, \quad E_2 = \sqrt{p_a^2 + p_4^2}, \quad (3.1)$$

поскольку спектр оператора  $P_0$  имеет две ветви:  $-\infty < p_0 < 0$  и  $0 < p_0 < \infty$ .

Малой группой в этом случае является группа трансляций и вращений в трехмерном евклидовом пространстве  $P(3)$ , а это означает, что инвариант  $W^2$  будет иметь непрерывный спектр и ему, по-видимому, трудно придать приемлемый физический смысл. Ограничимся поэтому случаем, когда  $W^2 = 0$ , а значит и  $V = 0$ . Для этого случая малой группой является группа, изоморфная группе  $O(3)$ , поэтому все неприводимые представления  $D^{\varepsilon_2}(s)$  группы  $P(1, 4)$  [5] унитарны, конечномерны и задаются числами  $\varepsilon_2 = \pm 1$  и  $s$  ( $s = 0, 1/2, 1, \dots$ ).

Явный вид генераторов  $P(1, 4)$ , который будет получен нами в разделе 7, выглядит как

$$\begin{aligned} P_0 &= \varepsilon_2 E_2, & P_k &= p_k, & J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ J_{a4} &= x_a p_4 - x_4 p_a + e_4 \frac{S_{ab} p_b}{E_2 + |p_4|}, & e_4 &= \frac{p_4}{|p_4|}, \\ J_{04} &= x_0 p_4 - \frac{\varepsilon_2}{2} [x_4, E_2]_+, & J_{0a} &= x_0 p_a - \frac{\varepsilon_2}{2} [x_a, E_2]_+ - \varepsilon_2 \frac{S_{ab} p_b}{E_2 + |p_4|}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В этом классе при заданном  $s$  имеется только два неэквивалентных представления, так же как и для группы  $P(1, 3)$ , поэтому неприводимое представление полной группы  $\tilde{P}(1, 4)$  будет реализовываться в пространстве, в котором реализуется представление  $D^+(s) \oplus D^-(s)$  группы  $P(1, 4)$ . Явный вид генераторов  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  в этом пространстве совпадает с (3.2), где следует сделать замену

$$\varepsilon_2 \rightarrow \beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix},$$

$\hat{1}$  — единичная матрица размерности  $(2s + 1)$ . Схема зацеплений неприводимых представлений группы  $P(1, 4)$  в этом классе выглядит так:

$$D^+(s) \overset{TP}{\longleftrightarrow} D^-(s).$$

Уравнение, инвариантное относительно группы  $\tilde{P}(1, 4)$ , имеет вид

$$i \frac{\partial \tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = \tilde{\mathcal{H}} \tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4) = \beta \sqrt{p_a^2 + p_4^2} \tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4), \quad (3.3)$$

где  $\tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4)$  —  $2(2s + 1)$ -компонентная величина, компоненты которой  $\tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4, s_3)$  нумеруются индексом  $s_3$  ( $-s \leq s_3 \leq s$ ).

Уравнение (3.3) описывает симметричным образом частицу и античастицу с фиксированным спином  $s$ , но с нефиксированной массой  $m = \sqrt{p_4^2}$ .

#### 4. Представления группы $\tilde{P}(1, 4)$ для случая $P_\mu^2 < 0$

Рассмотрим в этом разделе представления класса III, т.е. представление группы  $P(1, 4)$ , когда  $P_\mu^2 = -\eta^2$ ,  $\eta$  — действительное число. Особенностью этого класса является то, что, во-первых, оператор знака энергии не является инвариантом группы  $P(1, 4)$ , поскольку спектр оператора  $P_0$  лежит на всей действительной оси  $-\infty < p_0 < \infty$ , во-вторых, малой группой является некомпактная группа  $O(1, 3)$  — однородная группа Лоренца, все конечномерные неприводимые представления которой неунитарны.

Дополнительным инвариантом группы  $P(1, 4)$  в этом классе является оператор “знака импульса”. Действительно, оператор  $P_k^2$  является положительным оператором и спектр его лежит на вещественной оси  $[\eta^2, \infty)$ , поэтому корень квадратный из этого оператора  $\sqrt{P_k^2}$  на вещественной оси имеет точки регулярности  $(-\eta, \eta)$ .

Таким образом, для представлений класса III группы  $P(1, 4)$  (или:  $P(1, n)$ ) дополнительным инвариантом является оператор<sup>2</sup>

$$\hat{\mathcal{E}}_3 = \text{sign} \sqrt{P_k^2} = \text{sign} \sqrt{P_0^2 + \eta^2}. \quad (4.1)$$

Инварианты  $W^2$  и  $V$  в допустимой в этом классе системе отсчета ( $p_0 = p_a = 0$ ) имеют вид

$$W^2 = -P_\mu^2(N^2 - L^2) = \eta^2(N^2 - L^2), \quad (4.2)$$

$$V = \sqrt{-P_\mu^2}LN = \hat{\mathcal{E}}_3\eta LN, \quad \hat{\mathcal{E}}_3 = \frac{P_4}{|P_4|}, \quad (4.3)$$

где

$$L \equiv (J_{23}, J_{31}, J_{12}), \quad N \equiv (J_{01}, J_{02}, J_{03}). \quad (4.4)$$

Операторы  $N^2 - L^2$  и  $LN$  являются, как известно, инвариантами группы  $O(1, 3)$ , все представления которой полностью изучены Гельфандом к Наймарком [12]. Для неприводимых представлений группы

$$LN = il_0l_1 \cdot \hat{1}, \quad N^2 - L^2 = (1 - l_0^2 - l_1^2) \cdot \hat{1}, \quad (4.5)$$

где  $l_0$  — целое или полуцелое число ( $l_0 = 0, 1/2, 1, 2, \dots$ ), а  $l_1$  — любое, вообще говоря, комплексное число (более подробно см. [12]).

Таким образом, в пространстве, где реализуется неприводимое представление группы  $P(1, 4)$ ,

$$\begin{aligned} P_\mu^2 &= -\eta^2 \cdot \hat{1}, & \hat{\mathcal{E}}_3 &= \varepsilon_3 \cdot \hat{1}, & \varepsilon_3 &= \pm 1, \\ W^2 &= \eta^2(1 - l_0^2 - l_1^2) \cdot \hat{1}, & V &= i\varepsilon_3\eta l_0l_1 \cdot \hat{1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Неприводимые представления группы  $P(1, 4)$  будем обозначать через  $D^{\varepsilon_3}(l_0, l_1)$ .

<sup>2</sup>В качестве дополнительного инварианта группы  $P(1, 4)$  можно выбрать также оператор  $\hat{\mathcal{E}}'_3 = \text{sign} \sqrt{-P_\mu^2}$ , который эквивалентен (4.1) (см. формулу (4.3)).

Из (4.6) вытекает, что неприводимые представления  $D^{\varepsilon_3}(l_0, l_1)$  группы  $P(1, 4)$ , как и группы  $O(1, 3)$ , будут унитарны, если

- 1)  $l_1$  — чисто мнимое (основная серия),
- 2)  $l_0 = 0$ ,  $l_1$  — действительное число и  $|l_1| \leq 1$  (дополнительная серия).

**Замечание.** Для связи с неприводимыми представлениями класса I укажем, что неприводимые представления группы  $O(1, 3)$ , как и группы  $O(4)$ , можно задавать парой чисел  $(s', \tau')$ . Действительно, если определить операторы типа “спина” и “изоспина”

$$S'_a = \frac{1}{2}(L_a + iN_a), \quad T'_a = \frac{1}{2}(L_a - iN_a),$$

то операторы  $(S')^2$  и  $(T')^2$  для неприводимых представлений кратны единичным операторам

$$(S')^2 = s'(s' + 1) \cdot \hat{1}, \quad (T')^2 = \tau'(\tau' + 1) \cdot \hat{1}.$$

Числа  $s'$  и  $\tau'$  связаны с числами Гельфанда–Наймарка  $l_0$  и  $l_1$  соотношениями

$$l_0 = s' - \tau', \quad l_1 = s' + \tau' + 1. \quad (4.7)$$

Явный вид генераторов  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  для класса III, который будет получен в разделе 7, выглядит как

$$\begin{aligned} P_4 &= \varepsilon_3 E_3, & E_3 &= \sqrt{p_0^2 - p_a^2 + \eta^2}, & P_0 &= p_0 = i\partial/\partial t, & P_a &= p_a, \\ J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{0a} &= x_0 p_a - x_a p_0 - iS_{4a}, \\ J_{4a} &= x_4 p_a - \frac{\varepsilon_3}{2}(x_a E_3 + E_3 x_a) + \frac{S_{ab} p_b + iS_{4a} p_0}{E_3 + \eta}, \\ J_{40} &= x_4 p_0 - \frac{\varepsilon_3}{2}(x_0 E_3 + E_3 x_0) - \varepsilon_3 \frac{iS_{4a} p_a}{E_3 + \eta}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где операторы  $S_{ab}$ ,  $iS_{4a}$  реализуют неприводимое представление алгебры  $O(1, 3)$ .

Представление (4.8) отличается от соответствующего представления типа Широкоева для группы  $P(1, 4)$  [5] тем, что нами выделен не оператор  $P_0$ , а оператор  $P_4$ . Такое выделение оператора  $P_4$  (или  $P_3$  в случае группы  $P(1, 3)$ ) является удобным, поскольку в классе III, для всех групп типа  $P(1, n)$  “энергия частицы” может принимать любые значения от  $-\infty$  до  $\infty$ , в то время как квадрат “импульса частицы”  $p_k^2 \geq \eta^2$ .

Зная явный вид генераторов  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  для двух неприводимых представлений группы  $P(1, 4)$  (4.8), нетрудно построить с помощью операторов  $P^{(3)}$  (или  $T^p$ ), два других неэквивалентных представления. Генераторы группы для этих представлений имеют вид

$$\begin{aligned} P'_4 &= P_4 = \varepsilon_3 E_3, & P'_0 &= P_0 = p_0, & P'_a &= P_a = -p_a, \\ J'_{ab} &= J_{ab}, & J'_{4a} &= -J_{4a}, & J'_{0a} &= -J_{0a}, & J'_{40} &= J_{40}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где операторы  $J_{\mu\nu}$  задаются формулой (4.8).

Если провести относительно операторов  $P$ ,  $T$ ,  $C$  точно такие рассуждения, как и в разделе 2, то мы придем к следующему выводу: *в пространстве, где реализуется прямая сумма четырех неприводимых представлений группы  $P(1, 4)$*

$$D^+(l_0, l_1) \oplus D^-(l_0, l_1) \oplus D^+(-l_0, l_1) \oplus D^-(-l_0, l_1) \quad (4.10)$$

или

$$D^+(l_0, l_1) \oplus D^-(l_0, l_1) \oplus D^+(l_0, -l_1) \oplus D^-(l_0, -l_1), \quad (4.10')$$

реализуется неприводимое представление полной группы  $\tilde{P}(1, 4)$ .

Схема зацеплений неприводимых представлений группы  $P(1, 4)$  операторами  $P, T, C$  для класса III такая:

$$\begin{array}{ccc} D^+(l_0, l_1) & \xleftrightarrow{T^P, P^{(3)}} & D^+(-l_0, l_1) \\ T^\omega \downarrow & \nearrow C & \downarrow T^\omega \\ D^-(l_0, l_1) & \xleftrightarrow{T^P, P^{(3)}} & D^-(l_0, l_1). \end{array} \quad (4.11)$$

Операторы  $\tilde{P}_\mu, \tilde{J}_{\mu\nu}$  в пространстве, где реализуется приводимое представление (4.10) группы  $P(1, 4)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{P}_4 &= \begin{pmatrix} E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_3 \end{pmatrix}, & \tilde{P}_0 &= \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{P}_a &= \begin{pmatrix} p_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_a \end{pmatrix}, \\ \tilde{J}_{ab} &= \begin{pmatrix} J_{ab} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{ab} \end{pmatrix}, & \tilde{J}_{4a} &= \begin{pmatrix} J_{4a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_{4a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{4a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{4a} \end{pmatrix}, \\ \tilde{J}_{0a} &= \begin{pmatrix} J_{0a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{0a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{0a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_{0a} \end{pmatrix}, & \tilde{J}_{04} &= \begin{pmatrix} J_{04} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_{04} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{04} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{04} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где операторы  $J_{\mu\nu}$  задаются соотношениями (4.8) (при  $\varepsilon_3 = +1$ ).

Для тех представлений, для которых  $l_0 = 0, l_1 \neq 0$  или  $l_1 = 0, l_0 \neq 0$  (именно к таким случаям относятся майорановские представления  $D(0, 1/2)$  и  $D(1/2, 0)$ ), неприводимое представление полной группы  $\tilde{P}(1, 4)$  реализуется в пространстве, где реализуется прямая сумма двух неприводимых групп

$$D^+(0, l_1) \oplus D^-(0, l_1) \quad (4.13)$$

или

$$D^+(l_0, 0) \oplus D^-(l_0, 0). \quad (4.14)$$

Уравнения движения, инвариантные относительно группы  $\tilde{P}(1, 4)$ , на решениях которого реализуется представление (4.10), существенно отличается (даже по форме) от соответствующих уравнений в I и II классах. Действительно, в классе III каноническое уравнение движения имеет необычный вид

$$-i \frac{\partial \tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4)}{\partial x_4} = \tilde{P}_4 \tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4) = \tilde{\beta} E_3 \tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4), \quad (4.15)$$

где

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{1} \end{pmatrix},$$

а волновая функция  $\tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4)$  преобразуется при преобразованиях из группы  $\tilde{P}(1, 4)$  по представлению (4.10) или (4.10'). Имея явный вид генераторов (4.12), можно непосредственно проверить, что уравнение (4.15) инвариантно относительно группы  $\tilde{P}(1, 4)$ , поскольку выполняется условие

$$\left[ \tilde{P}_4 + i \frac{\partial}{\partial x_4}, \tilde{Q} \right]_- \tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4) = 0. \quad (4.16)$$

Волновую функцию  $\tilde{\Phi}(x_0, \mathbf{x}, x_4)$  можно представить как “четырехбалочную” величину

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{l_0, l_1}^+ \\ \Phi_{l_0, l_1}^- \\ \Phi_{-l_0, l_1}^+ \\ \Phi_{-l_0, l_1}^- \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

где функция  $\Phi_{\pm l_0, l_1}^{\varepsilon_3}(x_0, \mathbf{x}, x_4)$  принадлежит подпространству пространства  $\{\tilde{\Phi}\}$ , на котором реализуется неприводимое представление  $D^{\varepsilon_3}(\pm l_0, l_1)$ . Функция  $\Phi_{l_0, l_1}^{\varepsilon_3}$  имеет конечное или бесконечное число компонент  $\Phi_{l_0, l_1}^{\varepsilon_3}(x_0, \mathbf{x}, x_4, l, l_3)$  в зависимости от того, какие числа  $l_0, l_1$ , поскольку числа  $l$  и  $l_3$  могут принимать значения [12]

$$l = l_0, l_0 + 1, l_0 + 2, \dots, \quad -l \leq l_3 \leq l.$$

Если потребовать, чтобы на множестве всех решений  $\{\tilde{\Phi}\}$  уравнения (4.15) реализовалось унитарное представление группы  $P(1, 4)$ , то волновая функция  $\tilde{\Phi}$  будет иметь бесконечное число компонент. Если уравнение (4.15) имеет конечное число компонент, то на множестве  $\{\tilde{\Phi}\}$  реализуется неунитарное представление группы  $P(1, 4)$ .

Уравнение движения, которое инвариантно относительно группы  $P(1, 4)$ , но только частично  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантно, имеет вид

$$-i \frac{\partial \Phi(x_0, \mathbf{x}, x_4)}{\partial x_4} = \beta E_3 \Phi(x_0, \mathbf{x}, x_4), \quad \beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Генераторы группы  $P(1, 4)$  на решениях  $\{\Phi\}$  уравнения (4.18) имеют вид (4.8), где произведена замена  $\varepsilon_3 \rightarrow \beta$ . На множестве  $\{\Phi\}$  реализуется представление  $D^+(l_0, l_1) \oplus D^-(l_0, l_1)$ , а это означает (см. схему (4.11)), что уравнение (4.18)  $T^\omega$ -инвариантно, но  $P^{(3)}$ -,  $T^p$ -,  $C$ -неинвариантно. Имея схему зацеплений неприводимых представлений и явный вид генераторов группы  $P(1, 4)$ , можно выписать и другие уравнения движения, которые будут только частично  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантны.

### 5. Неканонические уравнения движения

В предыдущих разделах уравнения движения на группе  $P(1, 4)$  были получены с использованием инварианта группы  $P_\mu^2$ . Так как все инварианты  $P(1, 4)$  “равноправны”, естественно использовать для нахождения уравнения движения, например, инвариант  $W^2$ . Аналогичная идея была недавно использована (независимо) несколькими авторами [4, 13, 14] для нахождения уравнений движений, инвариантных относительно группы Пуанкаре  $P(1, 4)$ .

Рассмотрим такое представление группы  $P(1, 4)$ , когда “орбитальная” и “спин-изоспиновая” части операторов  $J_{\mu\nu}$  разделены, т.е. представление типа Баргмана–Вигнера,

$$P_0 = p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_k = p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (5.1)$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4,$$

где операторы  $S_{\mu\nu}$  являются генераторами однородной группы де Ситтера  $O(1, 4)$ , удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[S_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta} S_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha} S_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha} S_{\mu\beta} - g_{\nu\beta} S_{\mu\alpha}). \quad (5.2)$$

Особенностью представления (5.1) является то, что в таком представлении фундаментальный тензор  $w_{\mu\nu}$  имеет очень простую структуру

$$w_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma} P^\alpha S^{\beta\gamma}. \quad (5.3)$$

Инвариант  $W^2$  имеет вид

$$W^2 = \frac{1}{2} \{p_\mu^2 S_{\alpha\beta}^2 - p_\mu p_\nu (S^{\mu\sigma} S^{\nu\sigma} + S^{\nu\sigma} S^{\mu\sigma})\}. \quad (5.4)$$

Из (5.4) ясно, что уравнение

$$\{S_{\alpha\beta}^2 p_\mu^2 - (S^{\mu\sigma} S^{\nu\sigma} + S^{\nu\sigma} S^{\mu\sigma}) p_\mu p_\nu - f(p_\mu^2, V)\} \Psi(t, \mathbf{x}, x_4) = 0, \quad (5.5)$$

где  $f(p_\mu^2, V)$  — некоторая функция от инвариантов  $P_\mu^2$ ,  $V$  инвариантно относительно группы  $P(1, 4)$  (или относительно группы  $P(1, n)$ , если  $S_{\mu\nu}$  — генераторы группы  $O(1, n)$ ). Поскольку представления группы  $O(1, 4)$  изучены [15], то явный вид матриц  $S_{\mu\nu}$ , по существу, известен. В зависимости от их явного вида на решениях уравнения (5.5) могут реализоваться как представления, для которых  $p_\mu^2 \geq 0$ , так и  $p_\mu^2 < 0$ .

На решениях уравнения (5.5), вообще говоря, реализуется приводимое представление группы  $P(1, 4)$ , поскольку мы не накладываем условия

$$p_\mu^2 \Psi(t, \mathbf{x}, x_4) = \begin{cases} \varkappa^2 \Psi & \text{для класса I,} \\ 0 \Psi & \text{для класса II,} \\ -\eta^2 \Psi & \text{для класса III.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Уравнение (5.5) имеет нетривиальные решения, если

$$\det \{S_{\alpha\beta}^2 p_\mu^2 - (S^{\mu\sigma} S^{\nu\sigma} + S^{\nu\sigma} S^{\mu\sigma}) p_\mu p_\nu - f(p_\mu^2, V)\} = 0. \quad (5.7)$$

Исходя из уравнения (5.5) можно получить спектр “масс” (точнее спектр энергий), который будет зависеть не только от спина, как это имеет место для уравнений типа Намбу [4, 14, 16], но и от изоспина. Действительно, в системе отсчета, где  $p_k = 0$ , уравнение (5.5) для  $f(p_\mu^2, V) = 2dp_\mu^4$  имеет вид

$$P_0^2 \{S^2 + T^2 - d \cdot P_0^2\} \Psi_0 = 0, \quad (5.8)$$

где  $d$  — постоянная величина. Это уравнение имеет нетривиальные решения лишь тогда, когда оператор  $P_0^2$  имеет следующие собственные значения:

$$E_1^2 = 0, \quad (5.9)$$

$$E^{12} = 2d^{-1} \{s(s+1) + \tau(\tau+1)\}. \quad (5.9')$$

Ясно, что возрастающая ветвь (5.9') (в зависимости от  $s$  и  $\tau$ ) является максимальной в рамках уравнения (5.5). Если в уравнении (5.5) положить  $f(p_\mu^2, V) = \text{const}$ , то получим убывающий спектр.

Таким образом, на основании уравнения (5.5) в рамках группы  $P(1, 4)$  отличие от уравнений типа Гельфанда–Яглома можно получать спектр масс, возрастающий со спином и изоспином.

**Замечание.** Используя псевдовектор Паули–Любанского  $w_\mu$ , можно прийти к уравнению, ковариантному относительно группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ . Рассмотрим следующую ковариантную систему уравнений:

$$w_\mu \Psi_\pm(t, \mathbf{x}) = sp_\mu \Psi_\pm(t, \mathbf{x}), \quad (5.10)$$

где вектор Паули–Любанского  $w_\mu$  имеет вид

$$w_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu S^{\alpha\beta}, \quad \mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad s = 1/2, 1, 3/2, \dots \quad (5.11)$$

В трехмерной записи уравнение (5.12) имеет вид

$$(\mathbf{S}\mathbf{p})\Psi_\pm(t, \mathbf{x}) = \pm sp_0 \Psi_\pm(t, \mathbf{x}) = \pm is \frac{\partial \Psi_\pm(t, \mathbf{x})}{\partial t}, \quad (5.12)$$

$$\{p_0 \mathbf{S} - i(\mathbf{p} \times \mathbf{S})\} \Psi_\pm(t, \mathbf{x}) = \pm s \mathbf{p} \Psi(t, \mathbf{x}), \quad (5.13)$$

где волновая функция  $\Psi_+$  (или  $\Psi_-$ ) имеет  $(2s+1)$  компонент, а  $\mathbf{S} \equiv (S_{23}, S_{31}, S_{12})$ .

Так как на решениях уравнения (5.10)

$$w_\mu^2 \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad p_\mu^2 \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (5.14)$$

то уравнение (5.10) описывает частицу (уравнение для  $\Psi_+$ ) или античастицу (уравнение для  $\Psi_-$ ) с массой, равной нулю, и с произвольным спином  $s$ . Это уравнение является ковариантным обобщением явно нековариантного, но релятивистски инвариантного уравнения Вейля–Хаммера–Гуда [17, 13].

### 6. $P$ -, $T$ -, $C$ -свойства уравнений типа Дирака.

1. Простейшими уравнениями, которые явно инвариантны относительно группы  $P(1, 4)$ , являются уравнения Дирака. Для наших целей удобно представить уравнения Дирака, имея в виду дальнейшее их обобщение, в такой форме

$$i \frac{\partial \Psi_+(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = \mathcal{H}_+ \Psi_+(t, \mathbf{x}, x_4), \quad (6.1)$$

$$i \frac{\partial \Psi_-(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = \mathcal{H}_- \Psi_-(t, \mathbf{x}, x_4), \quad (6.1')$$

$$\mathcal{H}_\pm = \lambda(S_{0k} p_k \pm S_{05} \varkappa), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

где  $\Psi_+$  (и  $\Psi_-$ ) — четырехкомпонентный спинор,

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad S_{\mu 5} = \frac{i}{2} \gamma_\mu, \quad \lambda = -2i. \quad (6.2)$$

Если четырехрядные матрицы  $\gamma_k$  выбрать антиэрмитовыми, а матрицу  $\gamma_0$  — эрмитовой, то

$$\dagger S_{kl} = S_{kl}, \quad \dagger S_{0k} = -S_{0k}, \quad \dagger S_{05} = -S_{05}, \quad \dagger S_{k5} = S_{k5}, \quad (6.3)$$

Из приведенной формы записи уравнений Дирака следует важное для дальнейшего предложение: на множестве решений уравнений (6.1) (или (6.1')) реализуется представление группы  $O(1, 5)$ .

**Замечание 1.** Приведенное предложение является частным случаем более общего результата: если матрицы  $L_\mu$  в уравнениях типа Баба–Гельфанда–Яглома, инвариантных относительно группы  $O(1, n)$ , такие, что

$$[L_\mu, L_\nu]_- = i S_{\mu\nu},$$

то алгебра, состоящая из генераторов группы  $O(1, n)$  и матриц  $L_\mu$ , изоморфна алгебре  $O(1, n+1) \supset O(1, n)$ . Это замечание было отмечено автором в [18], а также в только что вышедшем препринте Мэтьюза [18], в котором рассматривается вопрос о  $CPT$ -инвариантности уравнений движений.

**Замечание 2.** Любое уравнение, которое инвариантно относительно алгебры  $P(1, n)$ , инвариантно также относительно алгебры  $O(1, n+1)$  для случая  $P^2 > 0$  или  $-O(2, n)$  для случая  $P^2 < 0$ . Этот результат является следствием того, что множество решений уравнений (2.15) или (4.15), как это нетрудно видеть из условий (2.16) или (4.16), инвариантно относительно обертывающей алгебры, а значит инвариантно относительно оператора типа центра инерции [22]

$$Y_\mu^\pm = \frac{1}{2\sqrt{\pm P^2}} (P^\alpha J_{\mu\alpha} + J_{\mu\alpha} P^\alpha).$$

Операторы  $J_{\mu\nu}$  и  $Y_\mu^\pm$ , как известно [22, 23], образуют алгебру  $O(1, n+1)$  для случая  $P^2 > 0$  или  $O(2, n)$  для случая  $P^2 < 0$ . Если  $P^2 = 0$ , уравнения движения также инвариантны относительно алгебры  $O(1, n+1)$  (или  $O(2, n)$ ). Доказательство этого факта несколько сложнее, чем в предыдущих случаях, поэтому мы его здесь не приводим.

В отличие от уравнений Дирака на группе Пуанкаре  $P(1,3)$  уравнения (6.1) и (6.1') неэквивалентны. Этот факт станет очевидным, если заметить, что на множествах  $\{\Psi_+\}$  и  $\{\Psi_-\}$  реализуются следующие неэквивалентные представления группы  $P(1,4)$ :

$$D^+(s=1/2, \tau=0) \oplus D^-(s=0, \tau=1/2) \quad (6.4)$$

и

$$D^-(s=0, \tau=1/2) \oplus D^-(s=1/2, \tau=0). \quad (6.5)$$

Можно непосредственно проверить, что уравнения (6.1), (6.1') инвариантны только относительно вигнеровского отражения времени

$$T^\omega \Psi(t, \mathbf{x}, x_4) = \tau^\omega \Psi^*(-t, \mathbf{x}, x_4), \quad (6.6)$$

где матрица  $\tau^\omega = i\gamma_1\gamma_3$ . Уравнения (6.1), (6.1') инвариантны относительно операций  $P^{(3)}$ ,  $T^p$  и  $C$ , поскольку не существует четырехрядных матриц  $r^{(3)}$ ,  $\tau^p$  и  $\tau^c$ , которые бы удовлетворяли соотношениям (1.12), (1.14) и (1.18) (более подробно см. [8]). Ясно, что этот результат следует также из наших общих рассмотрений. Действительно, из схемы (2.13) следует, что если на решениях уравнения движения реализуется представление

$$D^+(s, \tau) \oplus D^-(\tau, s)$$

группы  $P(1,4)$ , то такое уравнение  $T^\omega$ -инвариантно, но  $P^{(3)}$ -,  $T^p$ -,  $C$ -неинвариантно.

Рассмотрим теперь "прямую сумму" двух уравнений (6.1) и (6.1'), т.е. уравнение

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = \left\{ \left( \begin{array}{cc} \gamma_0 \gamma_k & 0 \\ 0 & \gamma_0 \gamma_k \end{array} \right) p_k + \left( \begin{array}{cc} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{array} \right) \varkappa \right\} \Psi(t, \mathbf{x}, x_4), \quad (6.7)$$

где восьмикомпонентный спинор имеет вид

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_+(t, \mathbf{x}, x_4) \\ \Psi_-(t, \mathbf{x}, x_4) \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться [8], что восьмикомпонентное уравнение (6.7) инвариантно относительно  $P^{(3)}$ -,  $T^p$ - и  $C$ -операций. Это также следует из схемы (2.13), поскольку на множестве  $\{\Psi\}$  реализуется неприводимое представление группы

$$D^+(1/2, 0) \oplus D^-(0, 1/2) \oplus D^+(0, 1/2) \oplus D^-(1/2, 0). \quad (6.8)$$

Таким образом, простейшим линейным уравнением, инвариантным относительно полной неоднородной группы де Ситтера  $\tilde{P}(1,4)$ , является восьмикомпонентное уравнение (6.7).

Пользуясь методом теории слияния де Бройля [20] и исходя из уравнения (6.7), можно найти все уравнения движения, которые описывают систему с произвольным спином и изоспином [21].

Запишем уравнение (6.7) в следующей форме:

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = H \Psi(t, \mathbf{x}, x_4) = \lambda \left( \tilde{S}_{0k} p_k + \tilde{S}_{05} \varkappa \right) \Psi(t, \mathbf{x}, x_4), \quad (6.9)$$

где

$$\tilde{S}_{0k} = \begin{pmatrix} S_{0k} & 0 \\ 0 & S_{0k} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{0n+1} = \begin{pmatrix} S_{05} & 0 \\ 0 & -S_{05} \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы

$$P_0 \equiv H \equiv \lambda \left( \tilde{S}_{0k} p_k + \tilde{S}_{05} \varkappa \right), \quad P_k = p_k, \quad (6.11)$$

$$J_{kl} = x_k p_l - x_l p_k + \tilde{S}_{kl}, \quad J_{0k} = x_0 p_k - \frac{1}{2} (x_k P_0 + P_0 x_k),$$

$$\tilde{S}_{kl} = \begin{pmatrix} S_{kl} & 0 \\ 0 & S_{kl} \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

заданные на множестве решений  $\{\Psi\}$  уравнения (6.9), удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры  $P(1, 4)$  (1.1), если

$$[P_0, J_{0k}]_- \Psi = i p_k \Psi. \quad (6.13)$$

Если вычислить коммутатор  $[P_0, J_{0k}]$ , то получим, что на множестве  $\{\Psi\}$  имеет место условие

$$p_k \Psi(t, \mathbf{x}, x_4) = \lambda \left( \tilde{S}_{k0} p_0 + \tilde{S}_{kl} p^l + \tilde{S}_{k5} \varkappa \right) \Psi(t, \mathbf{x}, x_4). \quad (6.14)$$

Уравнения (6.9) и (6.14) можно записать в виде одной явно ковариантной системы уравнений

$$p_\mu \Psi(t, \mathbf{x}, x_4) = \lambda \left( \tilde{S}_{\mu\nu} p^\nu + \varkappa \tilde{S}_{5\mu} \right) \Psi(t, \mathbf{x}, x_4). \quad (6.15)$$

Множество всех решений  $\{\Psi\}$  уравнения (6.15) инвариантно относительно алгебры  $P(1, 4)$ , поскольку выполняется условие типа (2.16), т.е.

$$\left[ \left\{ p_\mu - \lambda \left( \tilde{S}_{\mu\nu} p^\nu + \varkappa \tilde{S}_{5\mu} \right) \right\}, \tilde{Q} \right]_- \Psi(t, \mathbf{x}, x_4) = 0. \quad (6.16)$$

Особенность приведенных рассуждений для уравнения (6.9) состоит в том, что все они справедливы независимо от явного вида матриц  $S_{\mu\nu}$  и  $S_{\mu 5}$  (например, вида (6.2)), т.е. для того чтобы операторы (6.11) реализовали на множестве решений уравнения (6.15) представление алгебры  $P(1, 4)$ , необходимо лишь, чтобы эти матрицы реализовали (неприводимое или приводимое) представление алгебры  $O(1, 5)$ . Этот факт позволяет нам сделать следующий вывод: *уравнение (6.15) (где уже  $\lambda$  — некоторая величина, зависящая от выбора неприводимого представления алгебры  $O(1, 5)$ ) является явно ковариантным уравнением движения относительно неоднородной группы де Ситтера, если матрицы  $\tilde{S}_{\mu\nu}$  и  $\tilde{S}_{5\mu}$  реализуют представление алгебры  $O(1, 5)$ , причем эти матрицы строятся из матриц  $S_{\mu\nu}$  и  $S_{\mu 5}$ , которые реализуют неприводимое представление алгебры  $O(1, 5)$ , по формулам (6.10) и (6.12).*

Другой вывод уравнения (6.15) и его детальный теоретико-групповой анализ будет приведен во второй части настоящей работы.

**Замечание 3.** В том случае, когда в системе уравнений (6.15) положить  $\varkappa = 0$ , то система распадается на две тождественные системы вида

$$p_\mu \Psi(t, \mathbf{x}, x_4) = \lambda S_{\mu\nu} p^\nu \Psi(t, \mathbf{x}, x_4). \quad (6.17)$$

Уравнение (6.17) было предложено и детально исследовано Бакри [19] исходя из совершенно других положений. Как следует из наших рассмотрений, уравнение (6.17) является, по существу, обобщением уравнения Дирака (6.1) с  $\varkappa = 0$ ; иными словами, это другой способ “извлечения квадратного корня” из уравнения

$$p_\mu^2 \Psi = (p_0^2 - \mathbf{p}^2 - p_4^2) \Psi,$$

который для частицы со спином 1/2 приводит также к уравнению Дирака.

**2.** До сих пор мы рассматривали уравнения типа Дирака, на решениях которых реализуются представления группы  $P(1, 4)$ , принадлежащие классам I и II ( $P^2 = \varkappa^2 > 0$  и  $P^2 = 0$ ). Рассмотрим теперь кратко уравнения Дирака в пятимерном подходе, на решениях которых реализуются представления класса III ( $P^2 = -\eta^2 < 0$ ).

Уравнения Дирака в этом классе выглядят так:

$$i \frac{\partial \Psi_\pm(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = \lambda (S_{0k} p_k \pm i S_{05} \eta) \Psi_\pm(t, \mathbf{x}, x_4), \quad (6.18)$$

т.е. уравнения (6.18) получаются из уравнений (6.1) и (6.1') заменой  $\varkappa \rightarrow i\eta$ .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнения (6.18)  $C$ -инвариантны, но  $P^{(3)}$ -,  $T^p$ -,  $T^\omega$ -неинвариантны. Этот результат также следует из схемы зацеплений (4.11), если учесть, что на множествах  $\{\Psi_+\}$  и  $\{\Psi_-\}$  реализуются конечномерные неунитарные представления

$$D^+ \left( l_0 = \frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta \right) \oplus D^- \left( l_0 = -\frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta \right) \quad (6.19)$$

и

$$D^+ \left( l_0 = -\frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta \right) \oplus D^- \left( l_0 = \frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta \right) \quad (6.20)$$

группы  $P(1, 4)$ .

В третьем классе аналогично, как и в первом классе, простейшим  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантным уравнением является также восьмикомпонентное уравнение

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = \mathcal{H}(\eta) \Psi(t, \mathbf{x}, x_4), \quad (6.21)$$

где

$$\mathcal{H}(\eta) = \lambda \left( \tilde{S}_{0k} p_k + i \tilde{S}_{05} \eta \right). \quad (6.22)$$

Если для уравнения (6.21) буквально повторить все те рассуждения, которые были приведены для уравнения (6.9), то мы придем к уравнению типа (6.15)

$$p_\mu \Psi(t, \mathbf{x}, x_4) = \lambda \left( \tilde{S}_{\mu\nu} p^\nu + i\eta \tilde{S}_{5\mu} \right) \Psi(t, \mathbf{x}, x_4). \quad (6.23)$$

На решениях уравнения (6.23)  $\{\Psi\}$  реализуется унитарное представление группы  $P(1, 4)$  только в том случае, если на  $\{\Psi\}$  реализуется унитарное, а значит бесконечномерное, представление группы  $O(1, 3)$  (см. раздел 4). Это означает, что уравнение (6.23) будет иметь в этом случае бесконечное число компонент.

### 7. Канонические преобразования уравнения типа Дирака

1. Рассмотрим в этом разделе канонические преобразования только над четырехкомпонентным уравнением Дирака.

Унитарные, а значит канонические, преобразования Фолди–Воутхойзена–Тани (FW) и Мендловича–Чини–Тушека (M) можно естественно и просто обобщить и на уравнения Дирака, которые инвариантны относительно группы  $P(1, n)$ , если воспользоваться записью его в форме (6.1). Действительно, унитарные операторы типа FW и M имеют соответственно вид

$$U^{FW} = \exp \left\{ \frac{iS_{n+1k}p_k}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{\varkappa} \right\}, \quad (7.1)$$

$$U^M = \exp \left\{ \frac{-iS_{n+1k}p_k}{p} \operatorname{arctg} \frac{\varkappa}{p} \right\}, \quad (7.2)$$

где  $p = \sqrt{p_k^2}$ ,  $S_{n+1k}$  — матрицы, которые вместе с матрицами  $S_{kl}$ ,  $S_{0\mu}$ ,  $S_{n+10}$  реализуют неприводимое представление алгебры  $O(1, n + 1)$ .

Если сделать преобразование (7.1) над уравнением (6.1), то мы придем к уравнению типа (2.17), т.е.

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = \mathcal{H}^{FW} \Phi(t, \mathbf{x}, x_4) = \beta \sqrt{p^2 + p_4^2 + \varkappa^2} \Phi(t, \mathbf{x}, x_4), \quad (7.3)$$

где

$$\Phi = U^{FW} \Psi, \quad \beta = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

$\hat{1}$  — двухрядная единичная матрица. Генераторы группы  $P(1, 4)$  на  $\{\Phi\}$  имеют вид (2.6), где  $\varepsilon \rightarrow \beta$ .

С помощью преобразования  $U^M$  можно найти представление группы  $P(1, 4)$ , которое пригодно для перехода к пределу, когда  $\varkappa \rightarrow 0$ . Для наших целей, однако, это преобразование неудобно с точки зрения обобщения его на уравнения, описывающие частицы с произвольным спином и изоспином. Поэтому, далее, мы рассмотрим следующие унитарные преобразования:

$$U' = \exp \left\{ i \frac{\pi}{2} S_{54} e_4 \right\}, \quad e_4 = \frac{p_4}{|p_4|}, \quad |p_4| \neq 0, \quad (7.5)$$

$$U'' = \exp \left\{ i \frac{S_{5a} p_a}{\sqrt{p_b^2}} \right\} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{p_b^2}}{|p_4|}, \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (7.6)$$

В том частном случае, когда

$$S_{54} = -\frac{i}{2} \gamma_4, \quad S_{5a} = -\frac{i}{2} \gamma_4,$$

преобразования (7.5) и (7.6) имеют вид

$$U' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_4 e_4), \quad (7.7)$$

$$U'' = \frac{1}{\sqrt{2E_2(E_2 + |p_4|)}}(E_2 + |p_4| + \gamma_a p_a), \quad E_2 = \sqrt{p_a^2 + p_4^2}. \quad (7.8)$$

Если осуществить последовательно преобразование (7.7) и (7.8) над уравнением Дирака (6.1), то мы придем к уравнению

$$i \frac{\partial \Phi''(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = \mathcal{H}'' \Phi''(t, \mathbf{x}, x_4), \quad (7.9)$$

где

$$\mathcal{H}'' = \lambda(E_2 S_{05} + \varkappa e_4 S_{40}), \quad \Phi'' = U \Psi, \quad U \equiv U'' U'. \quad (7.10)$$

Генераторы группы  $P(1, 4)$  на множестве  $\{\Phi''\}$  имеют вид

$$\begin{aligned} P_0'' &= U P_0 U^{-1} = \mathcal{H}'', \\ J_{ab}'' &= J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ J_{a4}'' &= x_a p_4 - x_4 p_a + e_4 \frac{S_{ab} p_b}{E_2 + |p_4|}, \\ J_{0a}'' &= x_0 p_a - \frac{1}{2}(x_a \mathcal{H}'' + \mathcal{H}'' x_a) - \gamma_0 \frac{S_{ab} p_b}{E_2 + |p_4|} - \\ &\quad - \varkappa e_4 \gamma_0 \gamma_4 \left\{ \frac{\gamma_a}{2E_2} + \frac{i \gamma_b p_b p_a}{2E_2^2(E_2 + |p_4|)} + \frac{S_{ab} p_b}{2E_2(E_2 + |p_4|)} \right\}, \\ J_{04}'' &= x_0 p_4 - \frac{1}{2}(x_4 \mathcal{H}'' + \mathcal{H}'' x_4) + \frac{i \varkappa}{2E_2} \gamma_0 \gamma_4 \gamma_b p_b. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Положив в формулах (7.11)  $\varkappa = 0$ , приходим к представлению (3.2) для генераторов группы  $P(1, 4)$  в классе II.

При преобразованиях (7.5), (7.6) пространственные координаты переходят в

$$\begin{aligned} x_a'' &= U x_a U^{-1} = x_a + \frac{S_{5a}}{E_2} - \frac{S_{5b} p_b p_a}{E_2^2(E_2 + |p_4|)} + \frac{S_{ab} p_b}{E_2(E_2 + |p_4|)}, \\ x_4'' &= U x_4 U^{-1} = x_4 - e_4 \frac{S_{5b} p_b}{E_2^2}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Матрицы Дирака  $\gamma_\mu'' = U \gamma_\mu U^{-1}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_a'' &= -\gamma_a \gamma_4 e_4 + \frac{e_4 \gamma_4 p_a}{E_2} - e_4 \frac{\gamma_4 \gamma_a \gamma_b p_b}{E_2(E_2 + |p_4|)}, \\ \gamma_4'' &= \gamma_4 \left( \frac{|p_4|}{E_2} - \frac{\gamma_b p_b}{E_2} \right), \quad \gamma_0'' = -\gamma_0 \gamma_4 e_4. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Матрицы  $S_{\mu\nu}$ ,  $S_{\mu 5}$  после преобразований (7.5) и (7.6) имеют вид

$$\begin{aligned}
 S''_{ab} &= S_{ab} - \frac{1}{E_2}(S_{5b}p_a - S_{5a}p_b) - \frac{1}{E_2(E_2 + |p_4|)}(S_{ad}p_d p_b - S_{bd}p_d p_a), \\
 S''_{a4} &= \frac{1}{E_4} \left\{ p_4 S_{a5} + e_4 S_{ba} p_b + \frac{e_4 p_a p_b S_{b5}}{E_2 + |p_4|} \right\}, \\
 S''_{a5} &= e_4 \left\{ S_{a4} + \frac{p_a S_{54}}{E_2} - \frac{p_a p_b S_{b4}}{E_2(E_2 + |p_4|)} \right\}, \\
 S''_{54} &= \frac{1}{E_2} \{ |p_4| S_{54} - p_b S_{b4} \}, \quad S''_{0a} = S_{0a} - \frac{S_{50}}{E_2} p_a - \frac{S_{0b} p_b p_a}{E_2(E_2 + |p_4|)}, \\
 S''_{04} &= \frac{p_4}{E_2} S_{05} - \frac{e_4}{E_2} S_{0b} p_b, \quad S''_{05} = -e_4 S_{04}.
 \end{aligned} \tag{7.13'}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что преобразования (7.12), (7.13) и (7.13') являются каноническими, т.е.

$$\begin{aligned}
 [x''_k, x''_l]_- &= [x_k, x_l]_- = 0, \quad [x''_k, p''_l]_- = [x_k, p_l]_- = i\delta_{kl}, \\
 [\gamma'_\mu, \gamma'_\nu]_+ &= 2g_{\mu\nu}, \quad [S''_{\mu\nu}, S''_{\alpha\beta}]_- = [S_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta}]_-.
 \end{aligned}$$

Из приведенного ясно, что преобразование  $U = U''U'$  удобно для осуществления предельного перехода  $\varkappa \rightarrow 0$ .

**2.** Далее рассмотрим канонические преобразования над уравнением Дирака (7.1) в классе III

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = (\gamma_0 \gamma_k p_k + i\gamma_0 \eta) \Psi(t, \mathbf{x}, x_4). \tag{7.14}$$

Запишем это уравнение в виде

$$p_4 \Psi(t, \mathbf{x}, x_4) = P_4 \Psi(t, \mathbf{x}, x_4), \tag{7.15}$$

где

$$P_4 = -\gamma_4 \gamma_0 p_0 + \gamma_4 \gamma_a p_a + i\gamma_4 \eta.$$

Уравнение (7.15) после преобразования

$$\mathcal{V}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i\gamma_0 \gamma_4) \tag{7.16}$$

переходит в

$$p_4 \Psi' = P'_4 \Psi', \tag{7.17}$$

где

$$P'_4 = -\gamma_4 \gamma_0 p_0 - i\gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 \eta, \quad \Psi' = \mathcal{V}' \Psi. \tag{7.18}$$

Сделаем теперь над уравнением (7.17) преобразование

$$\mathcal{V}'' = \frac{\eta - i\gamma_a p_a + \gamma_4 p_0 + |p_4|}{\{2E_3(E_3 + \eta)\}^{1/2}}, \quad |p_4| = \sqrt{p_0^2 - p_a^2 + \eta^2}. \tag{7.19}$$

Обратный оператор к  $\mathcal{V}''$  имеет вид

$$(\mathcal{V}'')^{-1} = \frac{\eta + i\gamma_a p_a - \gamma_4 p_0 + |p_4|}{\{2E_3(E_3 + \eta)\}^{1/2}}. \quad (7.20)$$

Уравнение (7.17) после преобразования (7.19) имеет вид

$$p_4 \Phi(t, \mathbf{x}, x_4) = P_4'' \Phi(t, \mathbf{x}, x_4), \quad (7.21)$$

где

$$P_4'' = \gamma_0 E_3, \quad E_3 = \sqrt{p_0^2 - p_a^2 + \eta^2} \equiv |p_4|, \quad \Phi = \mathcal{V}\Psi, \quad \mathcal{V} \equiv \mathcal{V}''\mathcal{V}'. \quad (7.22)$$

Генераторы группы  $P(1, 4)$  на множестве решений уравнения (7.21)  $\{\Phi\}$  выглядят как

$$\begin{aligned} P_0'' &= p_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, & P_a'' &= p_a, & P_4'' &= \gamma_0 E_3, \\ J_{ab}'' &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{0a}'' &= x_0 p_a - x_a p_0 - iS_{4a}, \\ J_{4a}'' &= x_4 p_a - \frac{\gamma_0}{2}(x_a E_3 + E_3 x_a) + \gamma_0 \frac{S_{ab} p_b + iS_{a4} p_0}{E_3 + \eta}, \\ J_{40}'' &= x_4 p_0 - \frac{\gamma_0}{2}(x_0 E_3 + E_3 x_0) - \gamma_0 \frac{iS_{4a} p_a}{E_3 + \eta}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Операторы (7.23), несмотря на то, что их явный вид получен исходя из уравнения Дирака (7.14) и представления

$$D^+ \left( l_0 = \frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta \right) \oplus D^- \left( l_0 = -\frac{1}{2}, l_1 = \frac{3}{2}, \eta \right),$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.1) независимо от явного вида матриц  $S_{ab}$  и  $iS_{4a}$  (например, вида (6.2)). Это означает, что операторы (7.23), где сделана замена  $\gamma_0 \rightarrow \varepsilon_3$ , реализуют неприводимое представление  $D^{\varepsilon_3}(\varepsilon_3 l_0, l_1, \eta)$  алгебры  $P(1, 4)$ , если матрицы  $S_{ab}$  и  $iS_{4a}$  реализуют неприводимое представление алгебры  $O(1, 3)$ .

Приведем в заключение выражения для  $x''_\mu = \mathcal{V}x_\mu\mathcal{V}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} x_0'' &= x_0 + \frac{S_{45}}{E_3} + i\frac{S_{4b}p_b E_3 + S_{5b}p_b p_0 + iS_{45}p_0^2}{E_3^2(E_3 + \eta)}, \\ x_a'' &= x_a + i\frac{S_{a5}}{E_3} - \frac{S_{ab}p_b E_3 + iS_{a4}E_3 p_0 - iS_{5b}p_b p_a + p_0 p_a S_{45}}{E_3^2(E_3 + \eta)}, \\ x_4'' &= x_4, \end{aligned} \quad (7.24)$$

где матрицы  $S_{\mu\nu}$  и  $S_{5\mu}$  имеют вид (6.2).

Автор выражает свою признательность проф. Ю.М. Широкову за ценные советы, а А.Л. Грищенко, Л.П. Сокуру за плодотворные дискуссии и помощь при выполнении настоящей работы.

1. Hegerfeldt G.C., Henning J., *Fort. Phys.*, 1968, **16**, 9.
2. Румер Ю.Б., Исследование по 5-оптике, Физматгиз, 1956.
3. Соколик Г.А., Групповые методы в теории элементарных частиц, Атомиздат, 1965.
4. Фушич В.И., *Укр. физ. ж.*, 1967, **12**, 741; 1968, **13**, 363.
5. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79; 1969, **14**, 573.
6. Фушич В.И., Кривский И.Ю., Препринт ИТФ-72, АН УССР, Киев, 1968.
7. Rosen S.P., *J. Math. Phys.*, 1968, **9**, 1593.
8. Фушич В.И., Препринт ИТФ-17, АН УССР, Киев, 1969.
9. Wigner E.P., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 149.
10. Foldy L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
11. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196; 1958, **34**, 717.
12. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
13. De Vos J.A., Hilgervoord J., *Nucl. Phys. B*, 1967, **1**, 494.
14. Hwa R.C., *Nuovo Cim. A*, 1968, **56**, 107.
15. Newton T.D., *Ann. Math.*, 1950, **51**, 730.
16. Комар А.А., Сладь Л.М., *ТМФ*, 1969, **1**, 50.
17. Hammer C.L., Good R.H., *Phys. Rev.*, 1957, **108**, 882.
18. Фушич В.И., *Укр. физ. ж.*, 1966, **8**, 907.
19. Bакри М.М., *J. Math. Phys.*, 1969, **10**, 289.
20. Bargman V., Wigner E., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1948, **34**, 211.
21. Фушич В.И., Сокур Л.П., Препринт ИТФ-33, АН УССР, Киев, 1969.
22. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1951, **21**, 748.
23. Sankaranarayanan A., *Nuovo Cim.*, 1965, **38**, 1441;  
Rosen J., Roman P., *J. Math. Phys.*, 1966, **7**, 2072.

# On the $P$ - and $T$ -non-invariant two-component equation for the neutrino

W.I. FUSHCHYCH

The relativistic two-component equation describing the free motion of particles with zero mass and spin  $\frac{1}{2}$ , which is  $P$ - and  $T$ -non-invariant but  $C$ -invariant, is found. The representation of the Poincaré group for zero mass and discrete spin is constructed. The position operator for such a particle is defined.

## 1. Introduction

As is known, the Dirac equation for a particle with zero mass:

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \gamma_0 \gamma_k p_k \Psi(t, \mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

is invariant with respect to the space-time reflections. If one chooses for the Dirac matrices the Weyl representation eq. (1.1) decomposes into a system of two equations

$$i \frac{\partial \Psi_{\pm}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \pm \sigma_k p_k \Psi_{\pm}(t, \mathbf{x}), \quad (1.2)$$

where  $\sigma_k$  are the Pauli matrices and  $\Psi_{\pm}$  is a two-component spinor. The Weyl equation (1.2) for  $\Psi_+$  (or  $\Psi_-$ ) is not invariant under space reflection  $P$  and charge conjugation  $C$  but is invariant under the  $CP$ - and  $T$ -operations.

Due to the fact that the space parity in the weak interactions is not conserved it is usually assumed that neutrino is described, not by the four-component eq. (1.1), but by a two-component one (1.2). Therefore, in papers [1] an hypothesis was put forward that the weak interactions are invariant with respect to the  $CP$  operation and consequently to the  $T$  operation, if the  $CPT$  theorem is valid.

In this paper the two-component equation for a particle with zero mass and spin  $\frac{1}{2}$ , which is non-invariant under the time reflection of  $T$  and the  $CP$  operation, is found.

## 2. Equation for a neutrino with “variable mass”

On the solutions of eq. (1.1) the generators of the Poincaré group  $P(1, 3)$  have the form

$$P_0^{\Psi} = \mathcal{H}^{\Psi} = \gamma_0 \gamma_k p_k, \quad P_k^{\Psi} = p_k, \quad (2.1)$$

$$J_{kl}^{\Psi} = x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \quad J_{0k}^{\Psi} = x_0 p_k - \frac{1}{2} [x_k, \mathcal{H}^{\Psi}]_+,$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4} i (\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} - \gamma_{\nu} \gamma_{\mu}), \quad S_{\mu 4} = \frac{1}{4} i (\gamma_{\mu} \gamma_4 - \gamma_4 \gamma_{\mu}), \quad (2.1')$$

$$S_{\mu 5} = \frac{1}{2} i \gamma_{\mu}, \quad S_{45} = \frac{1}{2} i \gamma_4, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

where  $\gamma_{\mu}$  and  $\gamma_4$  are the Dirac matrices.

If one performs a unitary transformation [2] over eq. (1.1)

$$U_1 = \exp \left\{ \frac{1}{2} i \pi S_{53} e_3 \right\}, \quad e_3 = \frac{p_3}{|p_3|}, \quad p_3 \neq 0, \quad (2.2)$$

or

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \gamma_3 e_3), \quad (2.2')$$

eq. (1.1) has the form

$$i \frac{\partial \chi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = (\gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 |p_3|) \chi(t, \mathbf{x}), \quad a = 1, 2, \quad (2.3)$$

$$\chi = U_1 \Psi, \quad \chi \equiv \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

where  $\chi_{\pm}$  is a two-component spinor.

The Poincaré group generators  $P(1, 3)$  on  $\{\chi\}$  being the solution of eq. (2.3) have the form

$$\begin{aligned} P_0^X &= \mathcal{H}^X = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 |p_3|, & P_k^X &= p_k, \\ J_{ab}^X &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{a3}^X &= x_a p_3 - x_3 p_a - e_3 S_{a3} \gamma_3, \\ J_{0k}^X &= x_0 p_k - \frac{1}{2} [x_k, \mathcal{H}^X]_+. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Choosing for the Dirac matrices somewhat unusual representation

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}, & \gamma_a &= \begin{pmatrix} i\sigma_a & 0 \\ 0 & -i\sigma_a \end{pmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

eq. (2.3) decomposes into a system of two equations

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \chi_{\pm}(t, \mathbf{x})}{\partial t} &= \{i\sigma_3 \sigma_a p_a \pm \sigma_3 |p_3|\} \chi_{\pm}(t, \mathbf{x}), \\ \chi_{\pm} &= Q_{\pm} \chi, \quad Q_{\pm} = \frac{1}{2} \pm i S_{43} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_3 \gamma_4). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Eq. (2.7) for the functions  $\chi_+(t, \mathbf{x})$  (or  $\chi_-(t, \mathbf{x})$ ) has quite the other properties relative to the discrete transformations than the Weyl equation (1.2).

We note the following:

(i) It is possible to arrive at eq. (2.3) (or (2.7)) in another way. If we “extract the square root” from the operator equation

$$(p_0^2 - p_a^2) \chi = p_3^2 \chi,$$

we obtain eqs. (2.3) (or eqs. (2.7)).

(ii) The fact that the Dirac equations for zero and non-zero mass are invariant under the  $P$ -,  $T$ - and  $C$ -transformations is the consequence of the fact that they, besides being invariant with respect to the group  $P(1, 3)$ , are invariant under the

group  $SU(2) \otimes SU(2) \sim O(4)$  (this question will be considered in detail in a following paper).

Eq. (2.3) coincides in form with a usual Dirac equation for zero mass if  $|p_3|$  is considered as the mass of a particle. Therefore it is possible to say that eq. (2.3) describes a “flat neutrino” with variable mass  $|p_3|$ . Really the operator  $|p_3|$  is the Casimir operator of the group  $P(1, 2)$  but not of the group  $P(1, 3)$ .

Before passing to an investigation of the  $P$ -,  $T$ - and  $C$ -properties of eqs. (2.7) we shall construct the operator of the position in the space.

For eq. (2.3) the operator of the Foldy–Wouthuysen type has the form

$$U_2 = \exp \left\{ \frac{S_{5a} p_a}{\sqrt{p_a^2}} \arctg \frac{\sqrt{p_a^2}}{|p_3|} \right\}. \quad (2.8)$$

If the matrix  $S_{5a}$  have the form of (2.1') then

$$U_2 = \frac{E + |p_3| + \gamma_a p_a}{\{2E(E + |p_3|)\}^{1/2}}, \quad E = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}. \quad (2.9)$$

Eq. (2.3) after the transformation (2.9) transfers into

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}^\Phi(t, \mathbf{x}) = \gamma_0 E \Phi(t, \mathbf{x}), \quad \Phi(t, \mathbf{x}) = U_2 \chi(t, \mathbf{x}). \quad (2.10)$$

The generators of the group  $P(1, 3)$  on  $\{\Phi\}$  have the form

$$\begin{aligned} P_0^\Phi &= \mathcal{H}^\Phi = \gamma_0 E, & P_k^\Phi &= p_k, \\ J_{ab}^\Phi &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{a3}^\Phi &= x_a p_3 - x_3 p_a - e_3 \frac{S_{ab} p_b}{E + |p_3|}, \\ J_{0a}^\Phi &= x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, \mathcal{H}^\Phi]_+ - \gamma_0 \frac{S_{ab} p_b}{E + |p_3|}, & J_{03}^\Phi &= x_0 p_3 - \frac{1}{2} [x_3, \mathcal{H}^\Phi]_+. \end{aligned} \quad (2.11)$$

It must be noted that the operators (2.11), as it can be immediately verified, satisfy the algebra  $P(1, 3)$  commutation relations not depending on the matrices  $S_{ab}$  explicit form, i.e. the operators (2.11), if  $\gamma_0$  is substituted for 1 (or  $-1$ ) and realize irreducibly the algebra  $P(1, 3)$  representation which is characterized by zero mass and discrete spin. The representation (2.11) differs from the corresponding Shirokov [3], Lomont–Moses [4] ones but is certainly equivalent to them.

The position operator on a set  $\{\chi\}$  looks as

$$\begin{aligned} X_a^\chi &= U_2^{-1} x_a U_2 = x_a - \frac{S_{5a}}{E} + \frac{S_{5c} p_c p_a}{E^2(E + |p_3|)} + \frac{S_{ac} p_c}{E(E + |p_3|)}, \\ X_3^\chi &= U_2^{-1} x_3 U_2 = x_3 + e_3 \frac{S_{5c} p_c}{E^2}, \quad S_{5c} = -\frac{1}{2} i \gamma_c. \end{aligned} \quad (2.12)$$

The position operator on a set of solution  $\{\Psi\}$  of eq. (1.1) looks as follows

$$\begin{aligned} X_a^\Psi &= U_1^{-1} X_a^\chi U_1 = x_a + e_3 \frac{\gamma_3 S_{5a}}{E} - e_3 \frac{\gamma_3 S_{5c} p_c p_a}{E^2(E + |p_3|)} + \frac{S_{ac} p_c}{E(E + |p_3|)}, \\ X_3^\Psi &= U_1^{-1} X_3^\chi U_1 = x_3 - \frac{\gamma_3 S_{5c} p_c}{E^2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

(iii) If one performs a transformation on eq. (1.1)

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \gamma_3) \quad (2.14)$$

and then a transformation

$$\tilde{U}_2 = \frac{E + p_3 + \gamma_a p_a}{\{2E(E + |p_3|)\}^{1/2}}, \quad (2.15)$$

it will transform into the equation

$$i \frac{\partial \tilde{\Phi}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \gamma_0 \tilde{\Phi}(t, \mathbf{x}), \quad \tilde{\Phi} = \tilde{U}_2 \tilde{U}_1 \Psi. \quad (2.16)$$

The generators of the group  $P(1,3)$  on  $\{\tilde{\Phi}\}$  coincide with (2.11) where the substitution was made  $e_3 \rightarrow 1$ ,  $|p_3| \rightarrow p_3$ .

### 3. $P$ -, $T$ - and $C$ -properties of two-component equation

Here we shall study the properties of one of the two-component eqs. (2.7)<sup>1</sup>

$$i \frac{\partial \chi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = (i\sigma_3 \sigma_a p_a + \sigma_3 |p_3|) \chi(t, \mathbf{x}), \quad (3.1)$$

under the discrete transformations.

We shall denote through  $P^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) the space inversion operator of one axis which is determined as

$$P^{(1)} \chi(t, x_1, x_2, x_3) = r^{(1)} \chi(t, -x_1, x_2, x_3). \quad (3.2)$$

Analogously  $P^{(2)}$  and  $P^{(3)}$  are determined.

As is well known, two non-equivalent definitions of the time-reflection operator exist. According to Wigner the time-inversion operator is

$$T^{(1)} \chi(t, \mathbf{x}) = \tau^{(1)} \chi^*(-t, \mathbf{x}). \quad (3.3)$$

According to Pauli it is:

$$T^{(2)} \chi(t, \mathbf{x}) = \tau^{(2)} \chi(-t, \mathbf{x}). \quad (3.4)$$

The operator of the charge conjugation can be defined as the product of the operators  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$  or as

$$C \chi(t, \mathbf{x}) = \tau^{(3)} \chi^*(t, \mathbf{x}), \quad (3.5)$$

where  $r^{(k)}$ ,  $\tau^{(k)}$  are the  $2 \times 2$  matrices.

The operators  $P$ ,  $T$ ,  $C$  with the group  $P(1,3)$  generators satisfy the usual commutation relations.

The generators of the group  $P(1,3)$  on the solutions  $\{\chi\}$  of eq. (3.1) have the form of eq. (2.5) where

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^\chi &\rightarrow i\sigma_3 \sigma_a p_a + \sigma_3 |p_3| = -\sigma_2 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 |p_3|, \\ S_{ab} &\rightarrow \frac{1}{4} i(\sigma_b \sigma_a - \sigma_a \sigma_b), \quad S_{a3} \gamma_3 \rightarrow -\frac{1}{2} \sigma_a, \end{aligned} \quad (3.6)$$

and the matrix  $\gamma_0$  is substituted for the matrix  $\sigma_3$ .

<sup>1</sup>In what follows, under  $\chi$  we shall understand the two-component spinor  $\chi_+$ .

Using the definitions (3.2)–(3.5) it is not difficult to verify that eq. (3.1) is  $P^{(3)}$ -,  $C$ -invariant but  $P^{(1)}$ -,  $P^{(2)}$ -,  $T^{(1)}$ -,  $T^{(2)}$ -non-invariant.

Thus, eq. (3.1) is  $P^{(3)}C$ -,  $P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}C$ - and  $P^{(a)}CT^{(a)}$ -invariant but  $P^{(3)}CT^{(a)}$ - and  $P^{(a)}C$ -non-invariant.

We note the following:

(i) The result obtained is a consequence of the fact that the projection operators  $Q_{\pm}$ , with the operators of the discrete transformations, satisfy the following relations

$$\begin{aligned} P^{(a)}Q_{\pm} &= Q_{\mp}P^{(a)}, & T^{(a)}Q_{\pm} &= Q_{\mp}T^{(a)}, \\ P^{(3)}Q_{\pm} &= Q_{\pm}P^{(3)}, & CQ_{\pm} &= Q_{\pm}C. \end{aligned} \quad (3.7)$$

(ii) The two-component equations for the functions  $\chi_+$  and  $\chi_-$  are equivalent to the four-component one (2.3) with the subsidiary relativistic-invariant conditions

$$Q_-\chi = \left(\frac{1}{2} - iS_{43}\right)\chi = \frac{1}{2}(1 - \gamma_3\gamma_4)\chi = 0, \quad (3.8)$$

$$Q_+\chi = \left(\frac{1}{2} + iS_{43}\right)\chi = \frac{1}{2}(1 + \gamma_3\gamma_4)\chi = 0, \quad (3.9)$$

respectively. For eq. (1.1) these conditions look like

$$\left(\frac{1}{2} + ie_3S_{45}\right)\Psi = \frac{1}{2}(1 - e_3\gamma_4)\Psi = 0, \quad (3.8')$$

$$\left(\frac{1}{2} - ie_3S_{45}\right)\Psi = \frac{1}{2}(1 + e_3\gamma_4)\Psi = 0. \quad (3.9')$$

Eq. (1.1) with the subsidiary conditions (3.8') and (3.9') can be joined and can be written in the form of two  $P^{(a)}$ - and  $T^{(b)}$ -non-invariant but  $P^{(3)}$ - and  $C$ -invariant equations

$$\{\gamma_{\mu}p^{\mu} + \varkappa(1 + e_3\gamma_4)\}\Psi_1(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \{\gamma_{\mu}p^{\mu} + \varkappa(1 - e_3\gamma_4)\}\Psi_2(t, \mathbf{x}) = 0,$$

where  $\varkappa$  is some constant value. The four-component equations for the neutrino, which are the union of eq. (1.1) and the usual subsidiary condition, were recently considered in ref. [6]. These equations, as well as the Weyl equations (1.2), are  $P$ - and  $C$ -non-invariant but  $T^{(1)}$ -invariant.

The unitary operator of type  $U_2$  for the two-component eq. (3.1) has the form

$$V_1 = \exp\left\{i\frac{S_a p_a}{\sqrt{p_a^2}} \arctg \frac{\sqrt{p_a^2}}{|p_3|}\right\}, \quad S_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{klm}S_{lm}, \quad (3.10)$$

or

$$V_1 = \frac{E + |p_3| + i\sigma_a p_a}{\{2E(E + |p_3|)\}^{1/2}}. \quad (3.11)$$

The position operator on the set of solutions  $\{\chi\}$  of eqs. (3.1) looks as follows

$$\begin{aligned} X_a^{\chi_+} &= V_1^{-1}x_a V_1 = x_a - \frac{\sigma_a}{2E} + \frac{\sigma_c p_c p_a}{2E^2(E + |p_3|)} - i\frac{(\sigma_a \sigma_c - \sigma_c \sigma_a)p_c}{4E(E + |p_3|)}, \\ X_3^{\chi_+} &= V_1^{-1}x_3 V_1 = x_3 + e_3 \frac{\sigma_b p_b}{2E^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

To complete our treatment, we find the position operator for the neutrino which is described by the Weyl equation (1.2), for example for the function  $\Psi_+$ . This equation under a transformation

$$V = \frac{E + |p_3| + i\sigma_k \xi_k}{2\sqrt{\xi_k p_k}}, \quad (3.13)$$

where the vector  $\xi$  has the following components

$$\xi_k \equiv \{p_1 - p_2 e_3, p_2 + e_3 p_1, e_3(E + |p_3|)\},$$

takes a canonical form

$$i \frac{\partial \Phi_+(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \sigma'_3 E \Phi_+(t, \mathbf{x}), \quad \sigma'_3 = \sigma_3 e_3, \quad \Phi_+(t, \mathbf{x}) = V \Psi_+(t, \mathbf{x}). \quad (3.14)$$

The position operator for a neutrino which is described by the Weyl equation (1.2) (for  $\Psi_+$ ) looks like

$$X_a^W = V^{-1} x_a V = x_a + i e_3 \frac{\sigma_3 \sigma_a}{2E} - i \frac{e_3 \sigma_3 \sigma_c p_c p_a}{2E^2(E + |p_3|)} - i \frac{(\sigma_a \sigma_c - \sigma_c \sigma_a) p_c}{4E(E + |p_3|)},$$

$$X_3^W = V^{-1} x_3 V = x_3 - i \frac{\sigma_3 \sigma_b p_b}{2E^2}.$$

The other definitions of the operators  $X_k$  and  $V$  for the neutrino are given in ref. [5].

(iii) From Dirac eq. (1.1) one can, generally speaking, obtain three types of non-equivalent two-component equations. On the set of solutions of eq. (1.1) a direct sum of four irreducible representations  $D^\varepsilon(s)$  of the group  $P(1, 3)$

$$D^{\varepsilon=1} \left( s = \frac{1}{2} \right) \oplus D^{\varepsilon=-1} \left( s = -\frac{1}{2} \right) \oplus D^{\varepsilon=1} \left( s = -\frac{1}{2} \right) \oplus D^{\varepsilon=-1} \left( s = \frac{1}{2} \right) \quad (3.15)$$

is realized, where  $\varepsilon$  is an energy sign,  $s$  is a helicity. Hence it follows that there exist three types of two-component equations on the set of which the following representation of the group  $P(1, 3)$

$$D^{\varepsilon=1} \left( s = \frac{1}{2} \right) \oplus D^{\varepsilon=-1} \left( s = -\frac{1}{2} \right),$$

or

$$D^{\varepsilon=1} \left( s = -\frac{1}{2} \right) \oplus D^{\varepsilon=-1} \left( s = \frac{1}{2} \right), \quad D^{\varepsilon=1} \left( s = \frac{1}{2} \right) \oplus D^{\varepsilon=-1} \left( s = \frac{1}{2} \right), \quad (3.16)$$

or

$$D^{\varepsilon=1} \left( s = -\frac{1}{2} \right) \oplus D^{\varepsilon=-1} \left( s = -\frac{1}{2} \right), \quad D^{\varepsilon=1} \left( s = \frac{1}{2} \right) \oplus D^{\varepsilon=-1} \left( s = -\frac{1}{2} \right), \quad (3.17)$$

or

$$D^{\varepsilon=1} \left( s = \frac{1}{2} \right) \oplus D^{\varepsilon=-1} \left( s = -\frac{1}{2} \right) \quad (3.18)$$

are realized. If on the solutions of two-component equation there realizes the representation (3.16) then this equation will be  $T^{(1)}$ -invariant but  $C$ -,  $P$ -,  $T^{(2)}$ -non-invariant,

if the representation (3.17) does then it will be  $T^{(1)}$ -,  $T^{(2)}$ -,  $C$ -invariant but  $P$ -non-invariant, and if the representation (3.18) it will be  $T^{(1)}$ -,  $P$ -invariant but  $C$ -,  $T^{(2)}$ -non-invariant. This problem will be considered in more detail in another paper.

#### 4. Equation for a flat neutrino

The motion group in the Minkovski three-space is the  $P(1,2)$  group of rotations and translations conserving the form

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2.$$

In this case the simplest spinor equation is

$$i \frac{\partial \chi_{\pm}(t, x_1, x_2)}{\partial t} = (i\sigma_3 \sigma_a p_a \pm \sigma_3 m) \chi_{\pm}(t, x_1, x_2), \quad (4.1)$$

$\chi_{\pm}$  is the two-component spinor and  $m$  is the eigenvalue of the operator  $\sqrt{P_{\mu}^2}$ .

Eq. (4.1) for  $\chi_+$  (or  $\chi_-$ ) like eq. (3.1) is invariant under the  $P^{(1)}P^{(2)}$ - and  $C$ -operations but non-invariant under the  $P^{(a)}$  and  $T^{(b)}$ -operations.

Thus, eq. (4.1) for the wave function  $\chi_+$  (or  $\chi_-$ ) is  $P^{(1)}P^{(2)}C$ -,  $T^{(a)}P^{(b)}$ - and  $P^{(a)}CT^{(b)}$ -invariant but  $P^{(a)}C$ - and  $CT^{(a)}$ -non-invariant.

It should be noted that the equation being the “direct sum” of the equation for  $\chi_+(t, x_1, x_2)$  and  $\chi_-(t, x_1, x_2)$  is invariant under the  $P$ -,  $T$ - and  $C$ -transformations [7].

Finally, we quote one more example of the  $P$ - and  $C$ -non-invariant equation which is invariant with respect to the inhomogeneous De Sitter group. Such is the Dirac equation:

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = (\gamma_0 \gamma_k p_k + \gamma_0 \varkappa) \Psi(t, \mathbf{x}, x_4), \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.2)$$

This equation as is shown in refs. [2, 7] is  $T^{(1)}$ -,  $T^{(2)}C$ -invariant but  $P^{(k)}$ -,  $T^{(2)}$ - and  $C$ -non-invariant.

All the results obtained in this paper can be generalized for the arbitrary spin  $s$  case, if one uses for this the purpose the equation (ref. [2]):

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \lambda S_{0l} p_l \Psi(t, \mathbf{x}), \quad l = 1, 2, 3, \quad (4.3)$$

where  $\lambda$  is some fixed parameter (for the Dirac equation  $\lambda = -2i$ ), and  $S_{\mu\nu}$ ,  $S_{\mu 4}$ ,  $S_{45}$  are the matrices (not  $4 \times 4$  ones) realizing the algebra  $O(1,5)$  representation.

(i) If we transform the usual Dirac equation describing the motion of the non-zero mass particle  $m$  with a spin  $\frac{1}{2}$  as

$$V_2 = \frac{\gamma_3 p_3 + q_3 + m}{\{2q_3(q_3 + m)\}^{1/2}}, \quad q_3 \equiv \sqrt{p_3^2 + m^2}, \quad (4.4)$$

it has the form

$$i \frac{\partial \Psi'(t, \mathbf{x})}{\partial t} = H' \Psi'(t, \mathbf{x}), \quad (4.5)$$

$$H' = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 q_3, \quad \Psi' = V_2 \Psi, \quad a = 1, 2. \quad (4.6)$$

Choosing the representation (2.6) for the Dirac matrices eq. (4.5) is decomposed into the set of two independent equations

$$i \frac{\partial \Psi'_+(t, \mathbf{x})}{\partial t} = (-\sigma_2 p_1 + \sigma_1 p_2 + \sigma_3 q_3) \Psi'_+(t, \mathbf{x}), \quad (4.7)$$

$$i \frac{\partial \Psi'_-(t, \mathbf{x})}{\partial t} = (-\sigma_2 p_1 + \sigma_1 p_2 - \sigma_3 q_3) \Psi'_-(t, \mathbf{x}), \quad (4.8)$$

where  $\Psi'_+$  and  $\Psi'_-$  are two-component wave functions.

Eq. (4.7) or (4.8) describes a free motion of spinless particle and antiparticle with the mass  $m$ . Thus besides of the Klein–Gordon equation there exist the other equations of the type (4.7) and (4.8) which are also relativistically invariant and describe the spinless particle motion with non-zero mass. The two-component eq. (4.7) is equivalent to the four-component Dirac equation

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = (\gamma_0 \gamma_k p_k + \gamma_0 m) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.9)$$

with such subsidiary condition

$$\left( 1 - \frac{\gamma_3 \gamma_4 m + \gamma_4 p_3}{q_3} \right) \Psi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (4.10)$$

The author expresses his gratitude to Professor O.S. Parasjuk for the benefits of many discussions.

1. Lee T.D., Yang C.N., *Phys. Rev.*, 1957, **105**, 1671;  
Landau L., *Nucl. Phys.*, 1957, **3**, 127;  
Salam A., *Nuovo Cimento*, 1957, **5**, 1207.
2. Fushchych W.I., Kiev, preprint ITF-70-40, 1970.
3. Shirokov Yu.M., *JETP (Sov. Phys.)*, 1958, **6**, 664.
4. Lomont J.S., Moses H.E., *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 405.
5. Fronsdal C., *Phys. Rev.*, 1959, **113**, 1367;  
Voisin J., *Nuovo Cimento*, 1964, **34**, 1257.
6. Tokuoka Z., *Prog. Theor. Phys.*, 1967, **37**, 603;  
Sen Gupta N.D., *Nucl. Phys. B*, 1968, **4**, 147;  
Santhanam T.S., Chandrasekaran P.S., *Prog. Theor. Phys.*, 1969, **41**, 264.
7. Fushchych W.I., Kiev, preprint ITF-69-17, 1969.

# On the $CP$ -noninvariant equations for the particle with zero mass and spin $s = \frac{1}{2}$

W.I. FUSHCHYCH, A.L. GRISHCHENKO

One of us [1] has shown that for the particle with zero mass and spin  $s = \frac{1}{2}$  there are three types of two-component equations (or one four-component equation with three different subsidiary conditions) which differ from one another by  $P$ ,  $T$  and  $C$  properties. One of these equations is the two-component Weyl equation which, as is well known, is equivalent to the four-component Dirac equation

$$\gamma_{\mu} p^{\mu} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (1)$$

with the subsidiary relativistic invariant condition

$$(1 + \gamma_5) \Psi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (2)$$

Equations (1), (2) may be written in the form of a single equation [2]

$$\{\gamma_{\mu} p^{\mu} + \varkappa_1 (1 + \gamma_5)\} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (3)$$

where  $\varkappa_1$  is an arbitrary constant (not connected with mass of the particle. Equation (3) (or eqs. (1) and (2)) is  $P$  and  $C$  noninvariant, but  $CP$ -invariant.

In this note we give two other relativistic invariant equations which differ from (3) (or from (1) with the subsidiary condition (2)).

These equations have the form

$$\left\{ \gamma_{\mu} p^{\mu} + \varkappa_2 \left( 1 + \gamma_5 \frac{H}{E} \right) \right\} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (4)$$

$$\left\{ \gamma_{\mu} p^{\mu} + \varkappa_3 \left( 1 + \frac{H}{E} \right) \right\} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (5)$$

$$H = \gamma_0 \gamma_k p_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad E = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \quad (6)$$

$\varkappa_2, \varkappa_3$  are arbitrary constants.

Equation (4) is equivalent to eq. (1) with the subsidiary condition

$$\left( 1 + \gamma_5 \frac{H}{E} \right) \Psi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (7)$$

Equation (5) is equivalent to eq. (1) with the subsidiary condition

$$\left( 1 + \frac{H}{E} \right) \Psi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (8)$$

The relativistic invariance of eqs. (4) and (5) (or the invariance of the subsidiary conditions (7) and (8)) follows from the fact that the operators  $\gamma_5$  and  $H/E$  are invariants of the Poincaré group (for the case of zero mass).

It is easy to verify that eq. (4) (or eq. (1) with condition (7)) is  $CP$  and  $CPT$  noninvariant.

Equation (5) (or eq. (1) with condition (8)) is  $P$  and  $T$  invariant (in the sense of Wigner time reflection), but  $C$ -noninvariant.

Equation (4) coincides with the equation obtained earlier [1] (where the substitution  $e_3 = p_3/|p_3| \rightarrow H/E$  should be made).

Thus, as distinguished from eq. (3) (eqs. (1) and (2)) there are two more eqs. (4) and (5) which are also relativistic invariant, but  $CP$ -noninvariant.

A more detailed analysis of eqs. (4) and (5) will be given in another paper.

1. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321; Preprint, Kiev, ITF-70-29, 1970.
2. Tokuoka Z., *Progr. Theor. Phys.*, 1967, **37**, 603;  
Sen Gupta N.D., *Nucl. Phys. B*, 1968, **4**, 147.

# On two-component equations for zero mass particles

W.I. FUSHCHYCH, A.L. GRISHCHENKO

The paper presents a detailed theoretical-group analysis of three types of two-component equations of motion which describe the particle with zero mass and spin  $\frac{1}{2}$ . There are studied  $P$ -,  $T$ - and  $C$ -properties of the equations obtained.

В работе дан детальный теоретико-групповой анализ трех типов двухкомпонентных уравнений движения, описывающих частиц с нулевой массой и спином  $\frac{1}{2}$ . Изучены  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -свойства найденных уравнений.

## 1. Introduction

In the previous paper [1] it was shown by one of the authors that starting from the four-component Dirac equation with zero mass one can obtain three types of two-component equations. One of them coincides with the Weyl equation which, as is known, is  $P^{(k)}C$ - and  $T^{(1)}$ -invariant but  $P^{(k)}$ -,  $C$ -noninvariant. Two other equations are noninvariant with respect to  $P^{(k)}C$ -transformations. For one of these two equations the  $PTC$  theorem is not valid, i.e. such an equation is noninvariant with respect to  $P^{(k)}T^{(1)}C$ - and  $P^{(k)}T^{(2)}C$ -transformations<sup>1</sup>.

This present paper is dedicated to the detailed study of all possible (with an accuracy of the unitary equivalence) two-component and four-component (with subsidiary conditions) equations describing free motion of a particle with zero mass and spin  $s = \frac{1}{2}$ .

From the point of view of ideology the previous and the present papers are closely connected with the papers by Shirokov [2] and Foldy [3] in which for the first time equations of motion for a particle without antiparticle with non-zero mass and arbitrary spin were suggested. The Shirokov–Foldy equations are  $P^{(k)}$ - and  $T^{(1)}$ -invariant, but  $T^{(2)}$ - and  $C$ -noninvariant.

## 2. Three types of two-component equations

1. The helicity and energy sign [2] operators [2]

$$\Lambda = \frac{J_{12}P_3 + J_{23}P_1 + J_{32}P_1}{E}, \quad E = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{P_0}{E} \quad (2.1)$$

are the Casimir operators of the group  $P(1, 3)$  for the representations with zero mass and discrete spin.

Between the operators  $P$ ,  $T$ ,  $C$  and  $\Lambda$ ,  $\hat{\varepsilon}$  it is easy to establish such relations<sup>2</sup>:

$$P^{(k)}\Lambda = -\Lambda P^{(k)}, \quad P^{(k)}\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}P^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

$$T^{(a)}\Lambda = \Lambda T^{(a)}, \quad a = 1, 2, \quad T^{(1)}\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}T^{(1)}, \quad T^{(2)}\hat{\varepsilon} = -\hat{\varepsilon}T^{(2)}, \quad (2.3)$$

$$C\Lambda = \Lambda C, \quad C\hat{\varepsilon} = -\hat{\varepsilon}C. \quad (2.4)$$

Препринт ИТФ–70-88Е, Киев, 1970, № 88, 22 с.

<sup>1</sup>Notations and definitions which are given without explanations are the same as in the paper [1].

<sup>2</sup>The results of this subsection are valid for the arbitrary spin.

Hence it follows such coupling scheme of irreducible representations of the proper Poincaré group by the operators  $P$ ,  $T$ ,  $C$ :

$$\begin{array}{ccc}
 D^+(s) & \xleftrightarrow{T^{(2)}P^{(k)}} & D^+(s) \\
 \uparrow P^{(k)} & \swarrow C, T^{(2)} & \nearrow P^{(k)} \\
 D^+(-s) & \xleftrightarrow{T^{(2)}P^{(k)}, CP^{(k)}} & D^-(s) \\
 & \nwarrow C, T^{(2)} & \searrow P^{(k)}
 \end{array}$$

It is seen from the scheme (2.5) that there exist three essentially different (with respect to  $P$ -,  $T$  and  $C$ -transformations) types of two-component equations of motion on the solutions of which the following representations of the  $P(1,3)$  group are realized:

$$D^+(s) \oplus D^-(-s) \quad \text{or} \quad D^-(s) \oplus D^+(-s), \quad (2.6)$$

$$D^+(s) \oplus D^-(s) \quad \text{or} \quad D^-(-s) \oplus D^+(-s), \quad (2.7)$$

$$D^+(s) \oplus D^+(-s) \quad \text{or} \quad D^-(s) \oplus D^-(-s). \quad (2.8)$$

Hence it follows such result:

- 1) the space  $R_1$  where the representation (2.6) is realized is invariant with respect to  $T^{(1)}$ - and  $CP^{(k)}$ -transformations but noninvariant with respect to  $T^{(2)}$ -,  $P^{(k)}$ - and  $C$ -transformations;
- 2) the space  $R_2$  where the representation (2.7) is realized is invariant with respect to  $T^{(1)}$ -,  $T^{(2)}$ - and  $C$ -transformations but noninvariant with respect to  $P^{(k)}$ - and  $CP^{(k)}$ -transformations;
- 3) the space  $R_3$  where the representation (2.8) is realized, is invariant with respect to  $P^{(k)}$ - and  $T^{(1)}$ -transformations but noninvariant with respect to  $T^{(2)}$ - and  $C$ -transformations.

The two-component equations the wave functions of which are transformed according to the representations (2.6)–(2.8), have the same  $P$ -,  $T$ - and  $C$ -properties as the spaces  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  have.

## 2. The Dirac equation

$$\gamma_\mu p^\mu \Psi(t, \vec{x}) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

is transformed to the form

$$i \frac{\partial \Phi(t, \vec{x})}{\partial t} = \gamma_0 \Phi(t, \vec{x}), \quad (2.10)$$

$$\Phi(t, \vec{x}) = U \Psi(t, \vec{x}) \quad (2.11)$$

with the help of unitary transformation [4]

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\gamma_k p_k}{E} \right). \quad (2.12)$$

In the representation (1.2.6) for the Dirac matrices<sup>3</sup> where

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix}$$

eq. (2.10) decomposes into two two-component system

$$i \frac{\partial \Phi_{\pm}(t, \vec{x})}{\partial t} = \pm \sigma_3 E \Phi_{\pm}(t, \vec{x}), \quad (2.13)$$

$\Phi_{\pm}(t, \vec{x})$  are two-component wave functions.

If for the Dirac matrices we choose the representation, where

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

then (2.10) decomposes into the system

$$i \frac{\partial \tilde{\Phi}_{\pm}(t, \vec{x})}{\partial t} = \pm E \tilde{\Phi}_{\pm}(t, \vec{x}), \quad (2.14)$$

$\tilde{\Phi}_{\pm}(t, \vec{x})$  are two-component wave functions.

Eqs. (2.13), (2.14) in themselves (without algebra  $P(1,3)$ ) do not unambiguously determine what particle and antiparticle they describe. Depending on the representation of the group  $P(1,3)$  with respect to which its wave function is transformed under transformations from the group  $P(1,3)$ , the same (by the form) two-component equation of motion describes, as is seen below, different particles. In other words, it means that the equations of motion only together with the algebra  $P(1,3)$  unambiguously determine what particle is described by it.

According to the results of the previous subsection for the particle with spin  $s = \frac{1}{2}$  there are three essentially various two-dimension representations for the algebra  $P(1,3)$ . They have the following form

$$\begin{aligned} P_0^{\Phi_1} &= \mathcal{H}^{\Phi_1} = \sigma_3 E, & P_k^{\Phi_1} &= p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ J_{12}^{\Phi_1} &= M_{12} + \frac{e_3 \mathcal{H}^{\Phi_1}}{2E}, & e_3 &= \frac{p_3}{|p_3|}, & p_3 &\neq 0, \\ J_{13}^{\Phi_1} &= M_{13} - \frac{p_2 \mathcal{H}^{\Phi_1}}{2E(E + |p_3|)}, & J_{23}^{\Phi_1} &= M_{23} + \frac{p_1 \mathcal{H}^{\Phi_1}}{2E(E + |p_3|)}, \\ J_{01}^{\Phi_1} &= t_0 p_1 - \frac{1}{2} [x_1, \mathcal{H}^{\Phi_1}]_+ - \frac{p_2 e_3}{2(E + |p_3|)}, \\ J_{02}^{\Phi_1} &= t_0 p_2 - \frac{1}{2} [x_2, \mathcal{H}^{\Phi_1}]_+ + \frac{p_1 e_3}{2(E + |p_3|)}, \\ J_{03}^{\Phi_1} &= t_0 p_3 - \frac{1}{2} [x_3, \mathcal{H}^{\Phi_1}]_+; \end{aligned} \quad (2.15)$$

<sup>3</sup>See (2.6) in [1]

$$\begin{aligned}
P_0^{\Phi_2} &= \mathcal{H}^{\Phi_2} = \sigma_3 E, & P_k^{\Phi_2} &= p_k, & J_{12}^{\Phi_2} &= M_{12} + \frac{e_3}{2E}, \\
J_{13}^{\Phi_2} &= M_{13} - \frac{p_2}{2(E + |p_3|)}, & J_{23}^{\Phi_2} &= M_{23} + \frac{p_1}{2(E + |p_3|)}, \\
J_{01}^{\Phi_2} &= t_0 p_1 - \frac{1}{2} [x_1, \mathcal{H}^{\Phi_2}]_+ - \frac{p_2 e_3 \mathcal{H}^{\Phi_2}}{2E(E + |p_3|)}, \\
J_{02}^{\Phi_2} &= t_0 p_2 - \frac{1}{2} [x_2, \mathcal{H}^{\Phi_2}]_+ + \frac{p_1 e_3 \mathcal{H}^{\Phi_2}}{2E(E + |p_3|)}, \\
J_{03}^{\Phi_2} &= t_0 p_3 - \frac{1}{2} [x_3, \mathcal{H}^{\Phi_2}]_+;
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
P_0^{\Phi_3} &= E = \mathcal{H}^{\Phi_3} & P_k^{\Phi_3} &= p_k, & J_{12}^{\Phi_3} &= M_{12} + \frac{e_3 \sigma_3}{2}, \\
J_{13}^{\Phi_3} &= M_{13} - \frac{p_2 \sigma_3}{2(E + |p_3|)}, & J_{23}^{\Phi_3} &= M_{23} + \frac{p_1 \sigma_3}{2(E + |p_3|)}, \\
J_{01}^{\Phi_3} &= t_0 p_1 - \frac{1}{2} [x_1, \mathcal{H}^{\Phi_3}]_+ - \frac{p_2 e_3 \sigma_3}{2(E + |p_3|)}, \\
J_{02}^{\Phi_3} &= t_0 p_2 - \frac{1}{2} [x_2, \mathcal{H}^{\Phi_3}]_+ + \frac{p_1 e_3 \sigma_3}{2(E + |p_3|)}, \\
J_{03}^{\Phi_3} &= t_0 p_3 - \frac{1}{2} [x_3, \mathcal{H}^{\Phi_3}]_+,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

where  $M_{kl} = x_k p_l - x_l p_k$ .

By direct verification one can be convinced that the operators (2.15)–(2.17) satisfy the commutation relations of algebra  $P(1,3)$ . These three representations are not equivalent. Really the operators of energy sign and helicity have the form

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\mathcal{H}^c}{E} = \sigma_3, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \hat{\varepsilon} \quad \text{for the representation (2.15),}$$

$$\hat{\varepsilon} = \sigma_3, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \quad \text{for the representation (2.16),}$$

$$\hat{\varepsilon} = 1, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \sigma_3 \quad \text{for the representation (2.17).}$$

Hence it is clear that the representations (2.12), (2.16), (2.17) are not equivalent and are given in the spaces  $R_1, R_2, R_3$  respectively.

Besides two-dimensional representations given for the algebra  $P(1,3)$  one can, evidently, obtain the other ones as well which however, will be unitary-equivalent to (2.15)–(2.17). If, for example, in (2.15)–(2.17) one performs the substitution

$$e_3 \rightarrow 1, \quad |p_3| \rightarrow p_3, \tag{2.18}$$

then the operators obtained also realize the representations of the algebra  $P(1,3)$ . The explicit form for the generators of the group  $P(1,3)$  obtained from (2.15)–(2.17) with the help of substitution (2.18) will be denoted in the sequel by (2.15')–(2.17').

If in (2.15)–(2.17) the matrix  $\sigma_3$  is substituted by 1 (or  $-1$ ), then such operators will realize one-dimensional irreducible representations of the algebra  $P(1,3)$  which are, of course, unitarily equivalent to the corresponding one-dimensional Shirokov

representations [5]. The representations [5] are obtained without connection with the equations of motion and are realized on the functions  $\Psi(p_1, p_2, p_3)$  not depending on the time.

Summing up all the above presented we come to the conclusion:

- 1) Eq. (2.13) together with algebra (2.15) (or (2.15')) describes the particle with helicity  $+\frac{1}{2}$  and the antiparticle with helicity  $-\frac{1}{2}$ <sup>4</sup>;
- 2) Eq. (2.13) together with algebra (2.16) (or (2.16')) describes the particle with helicity  $+\frac{1}{2}$  and the antiparticle with helicity  $+\frac{1}{2}$ ;
- 3) Eq. (2.14) together with algebra (2.17) (or (2.17')) describes two particles with helicity  $+\frac{1}{2}$  and  $-\frac{1}{2}$ <sup>5</sup>.

If Eq. (2.13) is connected with the algebra (2.13) (or (2.15')) the wave function of such equation is denoted by  $\Phi_1$  (or  $\Phi'_1$ ). The wave function in Eq. (2.13) connected with the algebra (2.16) (or (2.16')) is denoted by  $\Phi_2$  (or  $\Phi'_2$ ). Similarly  $\Phi_3$  (or  $\Phi'_3$ ) denotes the wave function in Eq. (2.14) connected with the algebra (2.17) (or (2.17')).

**3.** The transition from the canonical equation (2.13) to the non-canonical one of the type (1.3.1) is realized with the help of unitary transformation [1]

$$v_1^{-1} = \frac{E + |p_3| + i(\sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1)}{\{2E(E + |p_3|)\}^{1/2}}. \quad (2.19)$$

Under this transformation Eq. (2.13) takes the form

$$i \frac{\partial \chi(t, \vec{x})}{\partial t} = (\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 |p_3|) \chi(t, \vec{x}), \quad (2.20)$$

where

$$\chi = \chi_1 = v_1^{-1} \Phi_1 \quad (2.21)$$

or

$$\chi = \chi_2 = v_1^{-1} \Phi_2. \quad (2.22)$$

The type of Eq. (2.14) under transformation (2.19) is not changed. The operators (2.15), (2.16) in  $\chi$ -representation have the form

$$P_0^{\chi a} = \mathcal{H} = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 |p_3|, \quad P_k^{\chi a} = p_k, \quad a = 1, 2, \quad (2.23)$$

$$J_{\mu\nu}^{\chi 1} = J_{\mu\nu}^{\Phi_1} (x_k \rightarrow X_k, \mathcal{H}^{\Phi_1} \rightarrow \mathcal{H}), \quad (2.24)$$

$$J_{\mu\nu}^{\chi 2} = J_{\mu\nu}^{\Phi_2} (x_k \rightarrow X_k, \mathcal{H}^{\Phi_2} \rightarrow \mathcal{H}), \quad (2.25)$$

where

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - \frac{\sigma_2}{2E} + \frac{\sigma_3 p_2}{2E(E + |p_3|)} - \frac{p_1(\sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1)}{2E^2(E + |p_3|)}, \\ X_2 &= x_2 + \frac{\sigma_1}{2E} - \frac{\sigma_3 p_1}{2E(E + |p_3|)} - \frac{p_2(\sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1)}{2E^2(E + |p_3|)}, \\ X_3 &= x_3 - \frac{\sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1}{2E^2} e_3. \end{aligned} \quad (2.26)$$

<sup>4</sup>The representation  $D^+(s)$  corresponds to the particle and the representation  $D^-(s)$  to the antiparticle.

<sup>5</sup>Eq. (2.14) can be interpreted as the equation of motion for one particle which can be in two states differing one from another by the helicity sign.

If one connects with Eqs. (2.13) and (2.14) the representations (2.15')–(2.17'), but not the representations (2.15)–(2.17) in this case the transition from the canonical equation to the noncanonical one can be conveniently realized with the help of the unitary transformation [6]

$$v^{-1} = \frac{E + p_3 + i(\sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1)}{\{2E(E + |p_3|)\}^{1/2}}. \quad (2.27)$$

Under this transformation Eq. (2.13) takes the form of the Weyl equation

$$i \frac{\partial \chi^w(t, \vec{x})}{\partial t} = (\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3) \chi^w(t, \vec{x}), \quad (2.28)$$

where

$$\chi^w \equiv \chi_1^w = v^{-1} \Phi'_1 \quad (2.29)$$

or

$$\chi^w \equiv \chi_2^w = v^{-1} \Phi'_2. \quad (2.30)$$

Eq. (2.14) is unchanged by the transformation (2.27). The generators  $J_{\mu\nu}^{w2} \equiv J_{\mu\nu}^{w2}$  coincide with (2.25) where the operator  $\mathcal{H}$  has the form (2.31) and in the operators (2.26) the substitution (2.18) is performed. This algebra is denoted by (2.25'). Under transformation (2.27) the algebra (2.15') goes into the algebra

$$\begin{aligned} P_0^{w1} &= \mathcal{H} = \sigma_k p_k, & P_k^{\chi_1^w} &= p_k, \\ J_{kl}^{w1} &= M_{kl} + \frac{\sigma_n}{2}, & k, l, n & \text{ is the cycle } (1,2,3), \\ J_{0k}^{w2} &= t_0 p_k - \frac{1}{2} [x_k, \mathcal{H}]_+. \end{aligned} \quad (2.31)$$

The algebra (2.17') is transformed into the algebra

$$\begin{aligned} P_0^{w3} &= \mathcal{H} = E, & P_k^{w3} &= p_k, \\ J_{kl}^{w3} &= M_{kl} + \frac{\sigma_n}{2}, & k, l, n & \text{ is the cycle } (1,2,3), \\ J_{0k}^{w3} &= t_0 p_k - \frac{1}{2} [x_k, \mathcal{H}]_+ + \frac{\sigma_n p_l - \sigma_l p_n}{E}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

The operators  $P_{\mu}^{wk}$ ,  $J_{\mu\nu}^{wk}$  are defined on the corresponding sets  $\{\chi_k^w\}$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

From the above given analysis it follows such a result:

- 1) Eq. (2.20) together with the algebra (2.24) (or Eq. (2.28) together with the algebra (2.31)) describes the particle with helicity  $+\frac{1}{2}$  and the antiparticle with helicity  $-\frac{1}{2}$ ;
- 2) Eq. (2.20) together with the algebra (2.25) (or eq. (2.28)) together with the algebra (2.25') describes the particle with helicity  $+\frac{1}{2}$  and the antiparticle with helicity  $+\frac{1}{2}$ .

Thus, the same (by the form) Eq.(2.20) (or the Weyl equation (2.28)) describes different types of particles and antiparticles depending on the representation of group  $P(1, 3)$  with respect to which the wave functions  $\chi$  (or  $\chi^w$ ) are transformed under transformations from the group  $P(1, 3)$ .

Not only the equations invariant with respect to the group  $P(1,3)$  have such a dual nature but also the equations invariant with respect to the inhomogeneous de Sitter group  $P(1,4)$ . Within the frameworks of the  $P(1,4)$  group the same (by the form) equation of the Dirac type describes the various types of particles and antiparticles [7].

### § 3. $P$ -, $T$ - and $C$ -properties of two-component equations

In studying  $P$ -,  $T$ - and  $C$ -properties of the equations of motion one does not indicate as a rule, with what algebra  $P(1,3)$  the given equation is connected. Such an approach, as it follows from the results of the previous section, is not quite correct for the studying  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -properties of Eqs. (2.13), (2.20), (2.28), since the same equation connected with various algebras  $P(1,3)$  can have various properties with respect to the space-time reflections.

In order the equation, invariant with respect to the proper group  $P(1,3)$ , be  $P$ -,  $T$ - and  $C$ -invariant it is necessary and sufficient to satisfy such relations:

$$\begin{aligned}
 [P^{(k)}, \mathcal{H}]_- &= 0, & k &= 1, 2, 3, \\
 [P^{(k)}, P_l]_- &= 0 & \text{for } k &\neq l, \\
 [P^{(k)}, P_l]_+ &= 0 & \text{for } k &= l, \\
 [P^{(k)}, J_{lr}]_+ &= 0 & \text{for } k &= l, k \neq r, \\
 [P^{(k)}, J_{lr}]_- &= 0 & \text{for } k &\neq l, k \neq r, \\
 [P^{(k)}, J_{0l}]_- &= 0 & \text{for } k &\neq l, \\
 [P^{(k)}, J_{0l}]_+ &= 0 & \text{for } k &= l;
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$[T^{(1)}, \mathcal{H}]_- = [T^{(1)}, J_{0l}]_- = 0, \quad [T^{(1)}, P_k]_+ = [T^{(1)}, J_{kl}]_+ = 0, \tag{3.2}$$

$$[T^{(2)}, \mathcal{H}]_+ = [T^{(2)}, J_{0l}]_+ = 0, \quad [T^{(2)}, P_k]_- = [T^{(2)}, J_{kl}]_- = 0, \tag{3.3}$$

$$[C, \mathcal{H}]_+ = [C, P_k]_+ = [C, J_{\mu\nu}]_+ = 0. \tag{3.4}$$

Hence it follows that the equation of motion is invariant with respect to  $P$ -transformation if all the conditions (3.1) are satisfied. Usually when studying  $P$ -properties of the equations one verifies only the first relation from (3.1) that, evidently, is not sufficient for the correct conclusion.

How we give the explicit expressions for the operators  $r^{(k)}$ ,  $\tau^{(i)}$  (see formulas (1.3.2)–(1.3.5)) determining the operators of discrete transformations.

On the sets  $\{\Phi_1\}$  and  $\{\Phi'_1\}$  the operators  $P^{(k)}$ ,  $T^{(2)}$  and  $C$  cannot be determined since the range of values of these operators does not belong to the sets  $\{\Phi_1\}$  and  $\{\Phi'_1\}$ . The operator  $T^{(1)}$  on  $\{\Phi_1\}$ ,  $\{\Phi'_1\}$  can be defined and it is determined by such operators

$$\tau^{(1)} = 1 \quad \text{or} \quad \sigma_3 \quad \text{on} \quad \{\Phi_1\}, \tag{3.5}$$

$$\tau^{(1)} = \frac{\sigma_3 p_2 + i p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \quad \text{on} \quad \{\Phi'_1\}. \tag{3.6}$$

$T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$  and  $C$  on the sets  $\{\Phi_2\}$ ,  $\{\Phi'_2\}$  are given by the operators  $\tau^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$

$$\tau^{(2)} = \sigma_1 \quad \text{or} \quad \sigma_2 \quad \text{on} \quad \{\Phi_2\}, \quad (3.7)$$

$$\tau^{(3)} = \sigma_1 \quad \text{or} \quad \sigma_2 \quad \text{on} \quad \{\Phi_2\}. \quad (3.8)$$

The operator  $\tau^{(1)}$  on the sets  $\{\Phi_1\}$  and  $\{\Phi_2\}$  has the form (3.5)

$$\tau^{(1)} = \frac{p_2 + ip_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \quad \text{or} \quad \frac{\sigma_3(p_2 + ip_1)}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \quad \text{on} \quad \{\Phi'_2\}, \quad (3.9)$$

$$\tau^{(2)} = \sigma_1 \quad \text{or} \quad \sigma_2 \quad \text{on} \quad \{\Phi'_2\}, \quad (3.10)$$

$$\tau^{(3)} = \sigma_1 \frac{p_2 + ip_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \quad \text{on} \quad \{\Phi'_2\}. \quad (3.11)$$

The operators  $P^{(k)}$  are not determined on  $\{\Phi_2\}$  and  $\{\Phi'_2\}$ .  $P^{(k)}$  and  $T^{(1)}$  on the sets  $\{\Phi_3\}$ ,  $\{\Phi'_3\}$  are given by:

$$\tau^{(1)} = 1 \quad \text{or} \quad \sigma_3 \quad \text{on} \quad \{\Phi_3\}, \quad (3.12)$$

$$r^{(k)} = \sigma_1 \quad \text{or} \quad \sigma_2 \quad \text{on} \quad \{\Phi_3\}, \quad (3.13)$$

$$\tau^{(1)} = \frac{p_2 + i\sigma_3 p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \quad \text{on} \quad \{\Phi'_3\}, \quad (3.14)$$

$$r^{(1)} = \sigma_1 \quad r^{(2)} = \sigma_2 \quad \text{on} \quad \{\Phi'_3\}, \quad (3.15)$$

$$r^{(3)} = \frac{\sigma_a p_a}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \quad \text{on} \quad \{\Phi'_3\}. \quad (3.15)$$

The operators  $r^{(k)}$  and  $\tau^{(k)}$  on the sets  $\{\chi\}$  and  $\{\chi^w\}$  have the form

$$\tau^{(1)} = 1 - \frac{p_1^2}{E(E + |p_3|)} + \frac{ip_1 p_2 \sigma_3}{E(E + |p_3|)} - \frac{i\sigma_2 p_1}{E} \quad \text{or} \quad (3.16)$$

$$\tau^{(1)} = \sigma_3 \left( 1 - \frac{p_2^2}{E(E + |p_3|)} \right) - \frac{ip_1 p_2}{E(E + |p_3|)} + \frac{\sigma_2 p_2}{E} \quad \text{on} \quad \{\chi_1\}, \{\chi_2\},$$

$$\tau^{(1)} = \sigma_2 \quad \text{on} \quad \{\chi_1^w\}, \quad (3.17)$$

$$\tau^{(2)} = \left( 1 - \frac{p_1^2}{E(E + |p_3|)} \right) \sigma_1 - \frac{\sigma_2 p_1 p_2}{E(E + |p_3|)} - \frac{\sigma_3 p_1}{E} \quad \text{or} \quad (3.18)$$

$$\tau^{(2)} = \left( 1 - \frac{p_2^2}{E(E + |p_3|)} \right) \sigma_2 - \frac{\sigma_1 p_1 p_2}{E(E + |p_3|)} - \frac{\sigma_3 p_2}{E} \quad \text{on} \quad \{\chi_2\},$$

$$\tau^{(3)} = \sigma_1 \quad \text{or} \quad \tau^{(3)} = \frac{\sigma_2 |p_3|}{E} - \frac{p_2 \sigma_3 + ip_1}{E} \quad \text{on} \quad \{\chi_2\}; \quad (3.19)$$

$$\tau^{(1)} = \frac{1}{E} (p_2 - ip_1)(p_2^2 - i\sigma_2 p_1 E - i\sigma_1 p_2 p_3 + i\sigma_1 p_1 p_2) \quad \text{or} \quad (3.20)$$

$$\tau^{(1)} = \frac{1}{E} (-ip_1 p_2 + \sigma_2 p_2 E - \sigma_1 p_1 p_3 + \sigma_3 p_1^2)(p_2 - ip_1) \quad \text{on} \quad \{\chi_2^w\};$$

$$\begin{aligned}\tau^{(2)} &= \sigma_1 - \frac{\sigma_3 p_1}{E} - \frac{p_1 \sigma_a p_a}{E(E + |p_3|)} \quad \text{on } \{\chi_2^w\}, \quad \text{or} \\ \tau^{(2)} &= \sigma_2 - \frac{\sigma_3 p_2}{E} - \frac{p_2 \sigma_a p_a}{E(E + |p_3|)} \quad \text{on } \{\chi_2^w\};\end{aligned}\tag{3.21}$$

$$\tau^{(3)} = \frac{p_2 - ip_1}{E} \{ \sigma_1(p_1^2 + p_2^2) - ip_2 p_3 + \sigma_3 p_1 p_3 \} \quad \text{on } \{\chi_2^w\};\tag{3.22}$$

$$\tau^{(1)} = \frac{1}{E}(p_2 - i\sigma_1 p_3 + i\sigma_3 p_1) \quad \text{on } \{\chi_3^w\};\tag{3.23}$$

$$r^{(k)} = \sigma_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{on } \{\chi_3^w\}.\tag{3.24}$$

The operators (3.16)–(3.24) are obtained from (3.5)–(3.11), (3.14),(3.17) with the help of transformations (2.19), (2.27). The transformation law of these operators is given in (D.10)–(D.16).

Summing up all the above said we come to the final conclusion:

- 1) Eq. (2.13) for the function  $\Phi_1$  (or  $\Phi'_1$ ) is  $T^{(1)}$ - and  $P^{(k)}C$ -invariant, but  $P^{(k)}$ -,  $T^{(2)}$ - and  $C$ -noninvariant;
- 2) Eq. (2.13) for the function  $\Phi_2$  (or  $\Phi'_2$ ) is  $T^{(1)}$ -,  $T^{(2)}$ - and  $C$ -invariant, but  $P^{(k)}$ - and  $CP^{(k)}$ -noninvariant;
- 3) Eq. (2.14) is  $P^{(k)}$ - and  $T^{(1)}$ -invariant, but  $T^{(2)}$ -,  $C$ - and  $CP^{(k)}$ -noninvariant.

Evidently Eqs. (2.20), (2.28) have these properties as well.

**Note 1.** In [1] we established  $P$ -,  $T$ - and  $C$ -properties of Eq. (2.20) starting from the assumption that  $r^{(k)}$ ,  $\tau^{(k)}$  on the set  $\{\chi\}$  are the  $2 \times 2$  matrices. As is seen from the previous such an assumption is limited. On the set  $\{\chi\}$   $r^{(k)}$ ,  $\tau^{(k)}$  are the operator functions depending on the momentum components of the particle.

**Note 2.** Under the four-dimensional rotations in Minkovski space the wave functions  $\Phi_1$ ,  $\chi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\chi_2^w$ ,  $\Phi_3$ ,  $\chi_3$ ,  $\chi_2$  are transformed nonlocally.

In conclusion of this section we give some corollaries immediately following from the previous, which can be useful for the construction of weak interaction models on the basis of the equations obtained.

**Corollary 1.** *Any (one-component or two-component) equation of motion for the particles with zero mass is Invariant with respect to the Wigner reflection of time  $T^{(1)}$ .*

**Corollary 2.** *Eq. (2.20) for the function  $\chi_2$  (or (2.28) for the function  $\chi_2^w$ ) is  $T^{(1)}C$ - and  $T^{(2)}C$ -invariant, but  $PC$ -,  $PT^{(1)}$ -,  $PT^{(2)}$ -,  $PT^{(1)}C$ - and  $PT^{(2)}C$ -noninvariant. It means that for such equation neither hypothesis of combined parity conservation, nor hypothesis of  $PTC$ -invariance conservation is valid.*

**Corollary 3.** *Eq. (2.14) is  $PT^{(1)}$ -,  $T^{(2)}C$ - and  $PT^{(2)}C$ -invariant, but  $PT^{(2)}$ -,  $PC$ - and  $PT^{(2)}C$ -noninvariant.*

#### § 4. $CP$ -noninvariant subsidiary conditions

The results of previous sections can be rather simply and briefly formulated if one describes the zero mass particle with the help of four-component wave function. In

this case the wave function has the redundant (nonphysical) components which can be invariantly separated with the help of relativistic-invariant subsidiary conditions. From § 2, 3 it follows that there are three types of subsidiary conditions. One of them is well known and has the form

$$\mathcal{P}_1^+ \Psi = 0 \quad \text{or} \quad \mathcal{P}_1^- \Psi = 0, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{P}_1^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_4). \quad (4.2)$$

Eq. (2.9) together with the condition (4.1) is equivalent to Eq. (2.28) for the function  $\chi_1^w$  (or (2.20) for the function  $\chi_1$ ).

Now we find two other relativistic-invariant subsidiary conditions. Besides the matrix  $\gamma_4$  the energy sign operator commutes with the algebra (1.2.1). Hence it is clear that the operators

$$\mathcal{P}_2^\pm = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \gamma_4 \frac{\mathcal{H}}{E} \right), \quad \mathcal{H} = \gamma_0 \gamma_k P_k, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{P}_3^\pm = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\mathcal{H}}{E} \right) \quad (4.4)$$

commute with the algebra (1.2.1). The operators  $\mathcal{P}_2^\pm, \mathcal{P}_3^\pm$  are the projection operators. We show then that the conditions

$$\mathcal{P}_2^+ \Psi = 0 \quad \text{or} \quad \mathcal{P}_2^- \Psi = 0, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{P}_3^+ \Psi = 0 \quad \text{or} \quad \mathcal{P}_3^- \Psi = 0, \quad (4.6)$$

can be considered as subsidiary conditions.

Between the operators  $\mathcal{P}_2^\pm, \mathcal{P}_3^\pm$  and  $P, T, C$  it is easy to establish the following relations:

$$\begin{aligned} P^{(k)} \mathcal{P}_2^\pm &= \mathcal{P}_2^\mp P^{(k)}, & T^{(1)} \mathcal{P}_2^\pm &= \mathcal{P}_2^\pm T^{(1)}, \\ T^{(2)} \mathcal{P}_2^\pm &= \mathcal{P}_2^\pm T^{(2)}, & C \mathcal{P}_2^\pm &= \mathcal{P}_2^\pm C, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} P^{(k)} \mathcal{P}_3^\pm &= \mathcal{P}_3^\pm P^{(k)}, & T^{(1)} \mathcal{P}_3^\pm &= \mathcal{P}_3^\pm T^{(1)}, \\ T^{(2)} \mathcal{P}_3^\pm &= \mathcal{P}_3^\mp T^{(2)}, & C \mathcal{P}_3^\pm &= \mathcal{P}_3^\mp C. \end{aligned} \quad (4.8)$$

From (4.7), (4.8) it follows that the condition (4.5) is  $T^{(1)}$ -,  $T^{(2)}$ - and  $C$ -invariant, but  $P^{(k)}$ - and  $C P^{(k)}$ -noninvariant, and the condition (4.6) is  $P^{(k)}$ - and  $T^{(1)}$ -invariant, but  $T^{(2)}$ - and  $C$ -noninvariant. It means that the representation (2.7) is realized on the set  $\mathcal{P}_2^\pm \{\Psi\}$ , and the representation (2.8) is realized on the set  $\mathcal{P}_3^\pm$ .

Thus we came to the following result:

- 1) Eq. (2.9) with subsidiary condition (4.5) is  $T^{(1)}$ -,  $T^{(2)}$ - and  $C$ -invariant, but  $P^{(k)}$ -,  $C P^{(k)}$ -,  $P^{(k)} T^{(1)} C$ - and  $P^{(k)} T^{(2)} C$ -noninvariant;
- 2) Eq. (2.9) with subsidiary condition (4.6) is  $P^{(k)}$ -,  $T^{(1)}$ - and  $P^{(k)} T^{(2)} C$ -invariant, but  $T^{(2)}$ -,  $C$ -,  $P^{(k)} T^{(1)} C$ - and  $P^{(k)} C$ -noninvariant.

Eq. (2.9) with subsidiary conditions (4.1), (4.5), (4.6) can be written in the form of three equations

$$(\gamma_{\mu}p^{\mu} + \varkappa_k \mathcal{P}_k^+) \mathcal{P}_k^- \Psi(t, x) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.9)$$

where  $\varkappa_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  are the arbitrary constant numbers. For eqs. (4.9) the conditions (4.1), (4.5), (4.6) are satisfied automatically.

### Appendix

In this appendix we present the main formulas according to which the operators  $r$ ,  $r^{(k)}$ ,  $\tau^{(k)}$  in representations  $\{\Phi\}$  and  $\{\chi\}$  were calculated (see (3.5)–(3.25)).

To make it complete we give a definition to the combined parity

$$CP\Phi(t, \vec{x}) = \theta\Phi^*(t, -\vec{x}), \quad CP^{(k)}\Phi(t, \vec{x}) = \theta^{(k)}\Phi^*(t, -x_k), \quad (D.1)$$

$$P\Phi(t, \vec{x}) = r\Phi(t, -\vec{x}), \quad P \equiv P^{(1)}P^{(2)}P^{(3)}. \quad (D.2)$$

From (3.1)–(3.4) and from the definitions (D.1), (D.2), (1.3.2)–(1.3.5) we obtain such relations

$$\begin{aligned} [r, p_k]_+ &= 0, & r\mathcal{H}(-\vec{p}) - \mathcal{H}(\vec{p})r &= 0, \\ rJ_{kl}(-\vec{x}) - J_{kl}(\vec{x})r &= 0, & rJ_{0k}(-\vec{x}) + J_{0k}(\vec{x})r &= 0, \end{aligned} \quad (D.3)$$

$$\begin{aligned} r(\vec{p})r(-\vec{p}) &= 1, & [r^{(k)}, p_n]_{\pm} &= 0, & r^{(k)}\mathcal{H}(-p_k) - \mathcal{H}(-p_k)r^{(k)} &= 0, \\ r^{(k)}J_{nl}(-x_k) \pm J_{nl}(x_k)r^{(k)} &= 0, & r^{(k)}J_{0n}(-x_k) \pm J_{0n}(x_k)r^{(k)} &= 0, \end{aligned} \quad (D.4)$$

where “+” is taken if  $k = n$  or  $k = l$ ;

$$\begin{aligned} r^{(k)}(p_k)r^{(k)}(-p_k) &= 1, & \tau^{(1)}\mathcal{H}^* - \mathcal{H}\tau^{(1)} &= 0, & \tau^{(1)}p_k^* + p_k\tau^{(1)} &= 0, \\ \tau^{(1)}J_{kl}^* + J_{kl}\tau^{(1)} &= 0, & \tau^{(1)}J_{0k}^*(-t_0) - J_{0k}(t_0)\tau^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (D.5)$$

$$\begin{aligned} \tau^{(2)}p_k - p_k\tau^{(2)} &= 0, & \tau^{(2)}\mathcal{H} + \mathcal{H}\tau^{(2)} &= 0, \\ \tau^{(2)}J_{kl} - J_{kl}\tau^{(2)} &= 0, & \tau^{(2)}J_{0k}(-t_0) + J_{0k}(t_0)\tau^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (D.6)$$

$$\begin{aligned} \tau^{(3)}p_k^* + p_k\tau^{(3)} &= 0, & \tau^{(3)}\mathcal{H} + \mathcal{H}\tau^{(3)} &= 0, \\ \tau^{(3)}J_{kl}^* + J_{kl}\tau^{(3)} &= 0, & \tau^{(3)}J_{0k}^* + J_{0k}\tau^{(3)} &= 0, \end{aligned} \quad (D.7)$$

$$\begin{aligned} [\theta, p_n]_- &= 0, & \theta\mathcal{H}^*(-\vec{p}) + \mathcal{H}(\vec{p})\theta &= 0, \\ \theta J_{nl}^*(-\vec{x}) + J_{nl}(\vec{x})\theta &= 0, & \theta J_{0n}^*(-\vec{x}) - J_{0n}(\vec{x})\theta &= 0, & \theta\theta^*(-\vec{p}) &= 1, \end{aligned} \quad (D.8)$$

$$\begin{aligned} [\theta^{(n)}, p_m]_{\pm} &= 0, & \theta^{(n)}\mathcal{H}^*(-p_k) + \mathcal{H}(p_k)\theta^{(n)} &= 0, \\ \theta^{(n)}J_{ml}^*(-x_n) \pm J_{ml}(x_n)\theta^{(n)} &= 0, & \theta^{(n)}J_{0m}^*(-x_n) \pm J_{0m}(x_n)\theta^{(n)} &= 0, \\ \theta^{(n)}(p_n) (\theta^{(n)}(-p_n))^* &= 1, \end{aligned} \quad (D.9)$$

where “-” is taken if  $k = m$  or  $k = l$ .

With the help of definition (1.3.2)–(1.3.5), (D.1), (D.2) we find the connection between the operators  $r^{(k)}$ ,  $\tau^{(k)}$ ,  $\theta$  defined on the sets  $\{\chi\}$  and  $\{\Phi\}$

$$\begin{aligned} \{r^{(n)}\}^{\Phi} &= U \{r^{(n)}\}^{\chi} U^{-1}(\dots, -p_n), \\ \{r^{(n)}\}^{\chi} &= U^{-1} \{r^{(n)}\}^{\Phi} U(\dots, -p_n); \end{aligned} \quad (D.10)$$

$$\{\tau^{(1)}\}^{\Phi} = U \{\tau^{(1)}\}^{\chi} U^{-1*}, \quad \{\tau^{(1)}\}^{\chi} = U^{-1} \{\tau^{(1)}\}^{\Phi} U^*; \quad (\text{D.11})$$

$$\{\tau^{(2)}\}^{\Phi} = U \{\tau^{(2)}\}^{\chi} U^{-1}, \quad \{\tau^{(2)}\}^{\chi} = U^{-1} \{\tau^{(2)}\}^{\Phi} U; \quad (\text{D.12})$$

$$\{\tau^{(3)}\}^{\Phi} = U \{\tau^{(3)}\}^{\chi} U^{-1*}, \quad \{\tau^{(3)}\}^{\chi} = U^{-1} \{\tau^{(3)}\}^{\Phi} U^*; \quad (\text{D.13})$$

$$\{\theta\}^{\Phi} = U \{\theta\}^{\chi} U^{-1*}(-\bar{p}), \quad \{\theta\}^{\chi} = U^{-1} \{\theta\}^{\Phi} U^*(-\bar{p}); \quad (\text{D.14})$$

$$\begin{aligned} \{\theta^{(n)}\}^{\Phi} &= U \{\theta^{(n)}\}^{\chi} U^{-1*}(\dots, -p_n), \\ \{\theta^{(n)}\}^{\chi} &= U^{-1} \{\theta^{(n)}\}^{\Phi} U^*(\dots, -p_n); \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

$$\{r\}^{\Phi} = U \{r\}^{\chi} U^{-1}(-\bar{p}), \quad \{r\}^{\chi} = U^{-1} \{r\}^{\Phi} U(-\bar{p}), \quad (\text{D.16})$$

where, for example,  $\{r^{(n)}\}^{\Phi}$  ( $\{r^{(n)}\}^{\chi}$ ) denotes the operator  $r^{(k)}$ , defined on the set  $\{\Phi\}$  ( $\{\chi\}$ ).

From these relations it is seen that in a general case  $r$ ,  $r^{(k)}$ ,  $\tau^{(k)}$ ,  $\theta$ ,  $\theta^{(k)}$  are the operator functions dependent on  $p_l$  and  $\sigma_{\mu}$ .

1. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321; Preprint ИТФ-70-29, Киев, 1970.
2. Широков Ю.М., *ДАН СССР*, 1954, **694**, 857; 1954, **99**, 737.
3. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
4. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
5. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196;  
Lomot J.S., Moses H.E., *J. Math. Phys.*, 1962, **2**, 405.
6. Fronsdal C., *Phys. Rev.*, 1959, **113**, 1367.
7. Фушич В.И., *Теор. и мат. физика*, 1970, **4**, 360.

# О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения

В.И. ФУЩИЧ

The additional (implicit) symmetry of equations invariant under the full Poincaré group is studied. It is shown that relativistic equations are invariant under the homogeneous de Sitter group  $O(1, 4)$  (or  $O(2, 3)$ ) and the matrix group  $O(4)$ .

Изучена дополнительная (неявная) симметрия уравнений, инвариантных относительно полной группы Пуанкаре. Показано, что релятивистские уравнения инвариантны относительно однородной группы де Ситтера  $O(1, 4)$  (или  $O(2, 3)$ ) и матричной группы  $O(4)$ .

Хорошо известно, что некоторые уравнения движения как в нерелятивистской, так и в релятивистской механике обладают дополнительной симметрией (инвариантностью). Так, например, уравнение Шредингера для атома водорода неявно инвариантно относительно четырехмерной группы вращений [1]; уравнения Максвелла, Дирака (для нулевой массы) инвариантны относительно конформной группы [2].

В настоящей работе показано, что релятивистские уравнения, описывающие свободное движение частиц и (античастиц) с ненулевой и нулевой массами и с произвольным спином  $s$ , инвариантны относительно однородной группы де Ситтера  $O(1, 4)$  и матричной группы  $O(4)$ . Найден явный вид операторов, являющихся базисными элементами алгебры Ли группы  $O(4)$  и коммутирующих с гамильтонианом Дирака.

## 1. Дополнительная инвариантность уравнений для частицы с ненулевой массой

1. Для установления дополнительной симметрии уравнений, инвариантных относительно группы  $P(1, 3)$ , удобно исходить из уравнений в канонической форме. Релятивистское уравнение, описывающее свободное движение частицы и античастицы со спином  $s$  и массой  $m$ , в каноническом представлении имеет вид [3, 4]

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}^\Phi \Phi(t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{H}^\Phi = \gamma_0 E_1, \quad (1.1)$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2},$$

где  $\Phi$  — волновая функция частицы, имеющая  $2(2s + 1)$  компонент;  $1$  — единичная матрица размерности  $(2s + 1) \times (2s + 1)$ . На множестве решений  $\{\Phi\}$  уравнения (1.1) реализуется неприводимое представление полной группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  (включающей пространственно-временные отражения). Операторы Казимира группы  $P(1, 3)$  на множестве  $\{\Phi\}$  кратны единичному оператору

$$W^2 = W_\alpha W^\alpha = m^2 s(s + 1), \quad P^2 = P_\alpha P^\alpha = m^2, \quad W_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} P^\beta J^{\gamma\delta}, \quad (1.2)$$

где  $P_\alpha, J_{\alpha\beta}$  — генераторы группы  $P(1, 3)$ . На множестве  $\{\Phi\}$  эти генераторы имеют вид [3, 4]

$$P_0 = \mathcal{H}^\Phi = \gamma_0 E_1, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \tilde{S}_{ab}, \quad J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, \mathcal{H}^\Phi]_+ - \gamma_0 \frac{\tilde{S}_{ab} p_b}{E_1 + m},$$

$$\tilde{S}_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab} & 0 \\ 0 & S_{ab} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где  $S_{ab}$  —  $(2s + 1) \times (2s + 1)$ -матрицы, реализующие неприводимое представление алгебры  $O(3)^1$ .

Инвариантность уравнения (1.1) относительно преобразований из группы  $P(1, 3)$  была доказана в [3, 4]. Этот факт является следствием того, что для произвольного  $\Phi \in \{\Phi\}$  выполняется условие

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^\Phi, \mathcal{E} \right]_- \Phi = 0, \quad (1.5)$$

где  $\mathcal{E}$  — любой элемент из обертывающей алгебры  $\mathcal{E}(1, 3)$  группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  (относительно обертывающей алгебры  $\mathcal{E}(1, 3)$  см. [5]).

Теперь докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.** Уравнение (1.1) инвариантно относительно однородной группы де Ситтера  $O(1, 4)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим оператор

$$R_\mu = \frac{1}{2} (P^\alpha J_{\mu\alpha} + J_{\mu\alpha} P^\alpha), \quad (1.6)$$

принадлежащий обертывающей алгебре  $\mathcal{E}(1, 3)$ . Оператор  $R_\mu$  удовлетворяет таким коммутационным соотношениям (см., например, [5, 6, 7, 8]):

$$[R_\mu, R_\nu]_- = iP^2 J_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

$$[R_\mu, J_{\alpha\beta}]_- = i(g_{\mu\alpha} R_\beta - g_{\mu\beta} R_\alpha), \quad (1.8)$$

$$[R_\alpha, P_\mu]_- = i(g_{\alpha\mu} P^2 - P_\alpha P_\mu), \quad (1.9)$$

$$[P_\mu, R^2]_- = 2iP^2 R_\mu, \quad R^2 \equiv R_\alpha R^\alpha, \quad (1.10)$$

$$[J_{\mu\nu}, R^2]_- = 0, \quad [R_\mu, R^2]_- = -iP^2 (R^\alpha J_{\mu\alpha} + J_{\mu\alpha} R^\alpha). \quad (1.11)$$

Оператор

$$J_{\mu 4} = R_\mu / \sqrt{P^2} \quad (1.12)$$

вместе с операторами  $J_{\mu\nu}$  удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры  $O(1, 4)$ , поскольку

$$[J_{\mu 4}, J_{\nu 4}]_- = iJ_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.13)$$

<sup>1</sup>Группы и их алгебры обозначаются одинаковыми символами.

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}]_- = i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}). \quad (1.14)$$

Так как оператор  $J_{\mu 4}$  принадлежит алгебре  $\mathcal{E}(1, 3)$  ( $\sqrt{P^2}$  на решениях уравнения (1.1) кратен единичному оператору), то тем самым теорема доказана.

**Замечание 1.** Оператор  $R_\mu$  впервые рассматривал Ю.М. Широков [6]. В настоящее время такой оператор часто используется для получения спектра масс элементарных частиц в теоретико-групповом подходе [7].

**Замечание 2.** Уравнения вида

$$W^2\Psi(t, \mathbf{x}) = m^2s(s+1)\Psi(t, \mathbf{x}), \quad (1.15)$$

$$P^2\Psi(t, \mathbf{x}) = m^2\Psi(t, \mathbf{x}) \quad (1.16)$$

инварианты, как это следует из теоремы [8], относительно группы  $O(1, 4)$ .

**2.** В случае, когда  $P^2 = -\eta^2$  ( $\eta$  — действительный параметр), группа  $P(1, 3)$  имеет как унитарные, так и неунитарные представления [3], причем все унитарные представления (по спиновым индексам) бесконечномерны, а значит, и уравнения движения, на множестве решений которых реализуется представление  $\tilde{P}(1, 3)$ , будут бесконечнокомпонентны. Как показано в [9], для представлений класса III ( $P^2 < 0$ ) каноническое уравнение “движения” имеет вид

$$\begin{aligned} -i\frac{\partial\tilde{\Phi}(t, \mathbf{x})}{\partial x_3} &= \tilde{P}_3\tilde{\Phi}(t, \mathbf{x}), \\ \tilde{P}_3 &= \tilde{\gamma}_0 E_3, \quad E_3 = \sqrt{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + \eta^2}, \\ \tilde{\gamma}_0 &= \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad p_0 = -i\frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

здесь  $\tilde{\Phi}(t, \mathbf{x})$  — функция, преобразующаяся по неприводимому представлению полной группы  $\tilde{P}(1, 3)$ ,  $\hat{1}$  — единичный оператор.

На множестве  $\{\tilde{\Phi}\}$  генераторы группы  $P(1, 3)$  имеют вид [9]

$$\begin{aligned} P_0 &= p_0, \quad P_a = p_a, \quad P_3 = \tilde{P}_3 = \tilde{\gamma}_0 E_3 \quad a = 1, 2, \\ J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + \tilde{S}'_{ab}, \quad b = 1, 2, \\ J_{3a} &= x_3 p_a - \frac{1}{2}[x_a, \tilde{P}_3]_+ + \frac{\tilde{S}'_{ab} p_b + i\tilde{S}'_{a3} p_0}{E_3 + \eta}, \\ J_{0a} &= x_0 p_a - x_a p_0 - i\tilde{S}'_{3a}, \quad x_0 = t, \\ J_{30} &= x_3 p_0 - \frac{1}{2}[x_0, \tilde{P}_3]_+ - \tilde{\gamma}_0 \frac{i\tilde{S}'_{3a} p_a}{E_3 + \eta}, \\ \tilde{S}'_{ab} &= \begin{pmatrix} S'_{ab} & 0 \\ 0 & S'_{ab} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}'_{3a} = \begin{pmatrix} S'_{3a} & 0 \\ 0 & S'_{3a} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где операторы  $S'_{ab}$ ,  $iS'_{3a}$  реализуют неприводимое представление алгебры  $O(1, 2)$ .

Условие типа (1.5) в этом случае имеет вид

$$\left[ \tilde{P}_3 + i\frac{\partial}{\partial x_3}, \mathcal{E} \right] \tilde{\Phi} = 0. \quad (1.19)$$

Если теперь повторить те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, то придем к такому утверждению.

**Теорема 2.** Уравнение (1.17) инвариантно относительно группы  $O(2, 3)$

**Замечание 3.** Теоремы 1 и 2 очевидным образом обобщаются и на уравнения, инвариантные относительно группы  $P(n, l)$  — вращений и трансляций в  $(n + l)$ -мерном пространстве Минковского.

**3.** В этом пункте покажем, что уравнение (1.1), помимо инвариантности относительно групп  $P(1, 3)$  и  $O(1, 4)$ , инвариантно относительно преобразований (по спиновым индексам, которые не связаны с пространственно-временными преобразованиями)

$$A\Phi = \Phi', \quad (1.20)$$

где  $A$  — произвольная матрица размерности  $2(2s + 1) \times 2(2s + 1)$ , принадлежащая матричной алгебре  $O(4)$ .

Прежде всего отметим, что, как следует из представления Фолди–Широкова (1.3), на решениях уравнения (1.1) реализуется прямая сумма двух неприводимых представлений алгебры  $O(3)$

$$D(s) \oplus D(s). \quad (1.21)$$

Это означает, что на множестве  $\{\Phi\}$  можно реализовать прямую сумму двух неприводимых представлений алгебры  $O(4)$

$$D(s, 0) \oplus D(0, s). \quad (1.22)$$

На множестве  $\{\Phi\}$  базисные элементы алгебры  $O(4)$  имеют вид

$$\tilde{S}_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab} & 0 \\ 0 & S_{ab} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_{4a} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{abc} S_{bc} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{abc} S_{bc} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

( $a, b, c = 1, 2, 3$ ), причем

$$[\tilde{S}_{kl}, \tilde{S}_{rn}]_- = i(g_{kn}\tilde{S}_{lr} - g_{rk}\tilde{S}_{ln} + g_{lr}\tilde{S}_{kn} - g_{ln}\tilde{S}_{kr}), \quad k, r, n, l = 1, 2, 3, 4. \quad (1.24)$$

Поскольку матрицы  $\tilde{S}_{ab}$ ,  $\tilde{S}_{4a}$  коммутируют с гамильтонианом  $\mathcal{H}^\Phi$ , уравнение (1.1) инвариантно относительно группы  $O(4)$ . Таким образом, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 3.** Уравнение (1.1) инвариантно относительно группы  $O(4)$ .

Следует подчеркнуть, что из инвариантности уравнения (1.1) относительно группы  $O(4)$  вытекает, что, помимо орбитального момента  $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$  спинового момента  $\mathbf{S}$ , должен сохраняться еще один момент  $\mathbf{S}'$ . Компоненты векторов  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{S}'$  определяются через  $\tilde{S}_{kl}$  соотношениями

$$S_a = \frac{1}{2}(\tilde{S}_{bc} + \tilde{S}_{4a}), \quad S'_a = \frac{1}{2}(\tilde{S}_{bc} - \tilde{S}_{4a}), \quad (1.25)$$

$a, b, c$  — цикл  $(1, 2, 3)$ .

Возникновение еще одного момента  $\mathbf{S}'$  носит, по-видимому, чисто математический характер, связанный с  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантностью уравнения (1.1). Как будет видно ниже, для уравнения Вейля дополнительный момент  $\mathbf{S}'$  не возникает, в то

время как для уравнения Дирака с нулевой массой (без дополнительного условия) он появляется. Не возникает дополнительный момент (по отношению к спину и изоспину) и для четырехкомпонентного уравнения Дирака в пятимерном подходе, которое, как известно [9],  $C$ -неинвариантно.

## 2. Дополнительная инвариантность уравнений для частицы с нулевой массой ( $P^2 = 0$ , $W^2 \neq 0$ )

Рассмотрим два типа уравнений, описывающих свободное движение частицы с нулевой массой, с “непрерывным” и дискретным спином. В этом случае удобно исходить из следующих уравнений:

$$W_\alpha W^\alpha \Psi(t, \mathbf{x}) = \rho^2 \Psi(t, \mathbf{x}), \quad P_\alpha P^\alpha \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\rho^2$  — параметр, характеризующий неприводимое представление группы  $P(1, 3)$ , который (подобно массе для представлений классов I, III, когда  $P^2 \neq 0$ ) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если  $\rho^2 = 0$ , то уравнения (2.1) описывают свободное движение частицы с нулевой массой и дискретным спином (нейтрино, фотон и т.д.). Можно, конечно, исходить и из других уравнений движения, но поскольку любые другие уравнения, на решениях которых реализуется неприводимое представление  $\tilde{P}(1, 3)$ , унитарно эквивалентны системе (2.1), то достаточно установить дополнительную инвариантность для уравнений (2.1).

Для уравнений (2.1) имеет место теорема.

**Теорема 4.** Уравнения (2.1) для  $\rho^2 > 0$  инвариантны относительно однородной группы де Ситтера  $O(1, 4)$ .

**Доказательство.** В том случае, когда  $P^2 = 0$ , оператор  $R_\mu$  удовлетворяет таким коммутационным соотношениям (см. соотношения (1.7)–(1.11)):

$$[R_\mu, R_\nu]_- = 0, \quad (2.2)$$

$$[R_\mu, J_{\alpha\beta}]_- = i(g_{\mu\alpha} R_\beta - g_{\mu\beta} R_\alpha), \quad (2.3)$$

$$[R_\mu, P_\alpha]_- = iP_\alpha R_\mu, \quad (2.4)$$

$$[R^2, P_\mu]_- = [R^2, J_{\alpha\beta}]_- = [R^2, R_\gamma]_- = 0. \quad (2.5)$$

Из соотношений (2.2) и (2.3) видно, что операторы  $R_\mu$  и  $J_{\alpha\beta}$  — базисные элементы алгебры типа Пуанкаре  $R(1, 3)$ . Оператор  $W^2$  в этом случае совпадает с оператором  $R^2$ , который, подобно оператору  $P^2$  в алгебре  $P(1, 3)$ , является оператором Казимира алгебры  $R(1, 3)$ . Вектор типа Паули–Любанского алгебры  $R(1, 3)$  имеет вид

$$\mathcal{V}_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} R^\beta J^{\gamma\delta}. \quad (2.6)$$

Оператор  $\mathcal{V}^2 = \mathcal{V}_\alpha \mathcal{V}^\alpha$  — второй оператор Казимира алгебры  $R(1, 3)$ . Рассматривая операторы

$$J_{\mu 4}^R = F_\mu / \sqrt{R^2}, \quad (2.7)$$

где

$$F_\mu = \frac{1}{2}(R^\alpha J_{\mu\alpha} + J_{\mu\alpha} R^\alpha), \quad (2.8)$$

и буквально повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, мы завершаем доказательство теоремы 4.

Проводя аналогичные рассуждения для случая  $\rho^2 < 0$ , приходим к утверждению.

**Теорема 5.** Уравнения (2.1) для  $\rho^2 < 0$  инвариантны относительно группы  $O(2, 3)$ .

Система уравнений (2.1) в случае  $\rho^2 = 0$  инвариантна относительно группы  $O(2, 4) \supset O(1, 4)$ . Этот результат следует из теоремы о конформной инвариантности уравнений, описывающих свободное движение частиц с нулевой массой и дискретным спином [2].

2. Тот факт, что при  $P^2 = 0$  и  $W^2 \neq 0$  операторы  $R_\mu$ ,  $J_{\alpha\beta}$  удовлетворяют алгебре типа Пуанкаре  $R(1, 3)$  (см. (2.3), (2.4)), позволяет рассматривать их как операторы “четырёхмерного импульса” в пространстве функций  $\{\Phi^R(y_0, y_1, y_2, y_3)\}$ , где

$$R_\mu \Phi^R(y_0, y_1, y_2, y_3) = r_\mu \Phi^R(y_0, y_1, y_2, y_3), \quad (2.9)$$

$$r_0 = i \frac{\partial}{\partial y_0}, \quad r_a = -i \frac{\partial}{\partial y_a}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Каноническое уравнение движения (для  $\rho^2 > 0$ ), инвариантное относительно алгебры  $R(1, 3)$ , имеет вид

$$i \frac{\partial \Phi^R(y_0, \mathbf{y})}{\partial y_0} = \gamma_0 E^R \Phi^R(y_0, \mathbf{y}), \quad E^R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \rho^2}, \quad (2.11)$$

где  $\Phi^R(y_0, \mathbf{y})$  —  $2(2s + 1)$ -компонентная волновая функция.

На множестве решений уравнения (2.11)  $\{\Phi^R\}$  операторы Казимира алгебры  $R(1, 3)$  кратны единичным операторам, т.е.

$$R^2 \Phi^R = R^\alpha R_\alpha \Phi^R = \rho^2 \Phi^R, \quad \mathcal{V}^2 \Phi^R = \mathcal{V}^\alpha \mathcal{V}_\alpha \Phi^R = \rho^2 s(s + 1) \Phi^R. \quad (2.12)$$

Базисные элементы алгебры  $R(1, 3)$  на  $\{\Phi^R\}$  имеют вид (1.3), где следует совершить замену

$$P_\mu \rightarrow R_\mu, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial}{\partial x_a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y_a}, \quad E_1 \rightarrow E^R.$$

Уравнение (2.11), как и (1.1), инвариантно относительно группы де Ситтера  $O(1, 4)$  и матричной группы  $O(4)$ .

Таким образом, параметры  $\rho$  и  $s$ , характеризующие неприводимые представления алгебры  $R(1, 3)$ , в  $\Phi^R$ -представлении следует интерпретировать как “массу и спин” частицы. Это означает, что представлениям группы Пуанкаре, для которых  $P^2 = 0$  и  $W^2 \neq 0$ , можно придать вполне ясный смысл, если в качестве полного набора коммутирующих операторов выбрать операторы  $R_\mu$  и одну из компонент  $\mathcal{V}_\mu$ , например  $\mathcal{V}_3$ . Важно отметить, что в пространстве представлений группы  $P(1, 3)$ , где операторы  $R_\mu$  диагональны, операторы  $P_\mu$  недиагональны.

### 3. Об инвариантности уравнения Дирака

1. В этом пункте найдем явный вид операторов, являющихся базисными элементами алгебры Ли группы  $O(4)$ , коммутирующих с гамильтонианом Дирака.

Уравнение Дирака

$$i \frac{\partial \Psi'(t, \mathbf{x})}{\partial t} = (\gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 m) \Psi'(t, \mathbf{x}), \quad a = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

после преобразования

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \gamma_4), \quad (3.2)$$

принимает вид

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi(t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{H} = \gamma_0 \gamma_k p_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (3.3)$$

$$\Psi = U_1 \Psi', \quad p_4 \equiv m.$$

Для наших целей будет удобно исходить из уравнения Дирака в форме (3.3), что позволит провести одновременно все рассмотрения для  $m > 0$  и  $m < 0$ .

Уравнение (3.3) после преобразования

$$U \left( p, s = \frac{1}{2} \right) = \exp \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{E} \right\} \equiv \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{E} \right), \quad E = \sqrt{p_k^2} \equiv E_1 \quad (3.4)$$

примет канонический вид

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}^\Phi \Phi(t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{H}^\Phi = \gamma_0 E, \quad (3.5)$$

где  $\gamma_0$  — четырехрядная матрица Дирака (см. (1.1)).

Генераторы группы  $P(1, 3)$  на множестве  $\{\Phi\}$  выглядят так<sup>2</sup>:

$$P_0 \equiv \mathcal{H}^\Phi = \gamma_0 E, \quad P_a = p_a, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + \tilde{S}_{ab}, \quad (3.6)$$

$$J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, \mathcal{H}^\Phi]_+ - \gamma_0 \frac{\tilde{S}_{ab} p_b + \tilde{S}_{a4} p_4}{E},$$

$$\tilde{S}_{kl} = \frac{i}{4} (\gamma_k \gamma_l - \gamma_l \gamma_k), \quad \tilde{S}_{0k} = \frac{i}{4} (\gamma_0 \gamma_k - \gamma_k \gamma_0), \quad (3.7)$$

$$\tilde{S}_{5k} = -\frac{i}{2} \gamma_k, \quad \tilde{S}_{05} = \frac{i}{2} \gamma_0.$$

Матрицы  $\tilde{S}_{kl}$  — генераторы группы  $O(4)$  и, кроме того, коммутируют с гамильтонианом  $\mathcal{H}^\Phi$  в представлении  $\Phi$ . Это и означает, что уравнение (3.5) дополнительно инвариантно относительно матричной алгебры  $O(4)$ . С гамильтонианом  $\mathcal{H}^\Phi$ , очевидно, коммутирует и матрица  $\tilde{S}_{05}$ .

Чтобы непосредственно показать, что уравнение (3.3) инвариантно относительно алгебры  $O(4)$ , достаточно найти операторы типа  $\tilde{S}_{kl}$ , которые коммутировали бы с оператором  $\mathcal{H}$ . Эти операторы нетрудно найти, если воспользоваться унитарным оператором  $U^{-1}$ , связывающим представления  $\Phi$  и  $\Psi$ .

<sup>2</sup>Представление (3.6) справедливо не только для спина  $s = 1/2$ , но и для произвольного спина  $s$ .

Можно непосредственно проверить, что операторы

$$\begin{aligned} S_{kl}^{\Psi} &= U^{-1} \tilde{S}_{kl} U = \tilde{S}_{kl} + \frac{1}{E} (\tilde{S}_{5k} p_l - \tilde{S}_{5l} p_k) \left( 1 - \frac{2i S_{5r} p_r}{E} \right), \\ S_{05}^{\Psi} &= U^{-1} \tilde{S}_{05} U = \frac{i \mathcal{H}}{2E} \end{aligned} \quad (3.8)$$

коммутируют с оператором  $\mathcal{H}$ .

Таким образом, уравнение (3.3), а значит, и уравнение (3.1), как для ненулевой, так и для нулевой массы инвариантно относительно алгебры  $O(4)$ . Этот результат является частным случаем более общего утверждения, доказанного в п. 3, раздела 1.

Следует отметить, что поскольку с  $\gamma_0$  коммутируют только матрицы  $\tilde{S}_{kl}$  и  $\tilde{S}_{05}$  (матрицы  $\gamma_0 \tilde{S}_{rn}$ ,  $\tilde{S}_{rl} \tilde{S}_{kn}$  — линейные комбинации  $\tilde{S}_{kl}$  и  $\tilde{S}_{05}$ ), то алгебра Ли, порожденная ими, является максимальной алгеброй, относительно которой уравнение (3.5) инвариантно.

Дополнительная симметрия уравнения Дирака методами, отличными от наших, исследовалась в работах [10].

Ради полноты изложения приведем явный вид оператора координаты в представлении  $\Psi$

$$X_a^{\Psi} = U^{-1} x_a U = x_a + \frac{1}{E} \left( \tilde{S}_{a5} + \frac{\tilde{S}_{5k} p_k}{E^2} p_a + \frac{\tilde{S}_{ab} p_b + \tilde{S}_{a4} p_4}{E} \right). \quad (3.9)$$

## 2. Двухкомпонентное уравнение Вейля

$$i \frac{\partial \chi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \sigma_b p_b \chi(t, \mathbf{x}), \quad (3.10)$$

как известно, эквивалентно уравнению Дирака для нулевой массы с дополнительным условием, т.е. эквивалентно системе уравнений

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \gamma_0 \gamma_a p_a \Psi(t, \mathbf{x}), \quad a = 1, 2, 3, \quad (3.11)$$

$$(1 - i\gamma_4) \Psi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (3.12)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что дополнительное условие (3.12) неинвариантно относительно операторов  $\tilde{S}_{kl}^{\Psi}$ , т.е.

$$[\gamma_4, \tilde{S}_{kl}^{\Psi}]_- \neq 0.$$

Итак, система уравнений (3.11), (3.12) не обладает дополнительной симметрией относительно группы  $O(4)$ .

Если над уравнением (3.10) совершить преобразование типа Фолди–Воутхойзена [11], то оно примет канонический вид

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \sigma_3 E \Phi(t, \mathbf{x}), \quad E = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) уже явно инвариантно относительно преобразования

$$\Phi \rightarrow \sigma_3 \Phi, \quad (3.14)$$

следовательно, уравнение Вейля (3.10) дополнительно инвариантно относительно группы  $O(2)$ .

**3.** Из предыдущего пункта ясно, что дополнительная инвариантность уравнений движений зависит от компонентности волновой функции. Ниже будет установлена зависимость дополнительной симметрии уравнений от размерности пространства Минковского, в котором они заданы.

Рассмотрим в пятимерном пространстве Минковского два неэквивалентных уравнения типа Дирака, инвариантных относительно неоднородной группы де Ситтера  $P(1, 4)$ :

$$i \frac{\partial \Psi_{\pm}(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = (\gamma_0 \gamma_k p_k + \gamma_0 \varkappa) \Psi_{\pm}(t, \mathbf{x}, x_4),$$

$$p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$
(3.15)

где  $\Psi_{\pm}$  — четырехкомпонентный спинор,  $\varkappa$  — постоянная величина. Проводя для уравнений (3.15) такой же анализ, как и для (3.3) (с некоторыми очевидными изменениями), можно показать, что уравнение (3.15) для функции  $\Psi_{-}$  (или  $\Psi_{+}$ ) дополнительно инвариантно относительно группы  $O(4)$ .

Итак, четырехкомпонентное уравнение Дирака в пятимерном подходе, помимо инвариантности относительно групп  $P(1, 4)$  и  $O(1, 5)$ , инвариантно относительно матричной группы  $O(4)$ . Из этого результата, в частности, следует, что спиновый и изоспиновый моменты в пятимерной схеме квантовой механики сохраняются. Это и следовало ожидать, поскольку малой группой группы  $P(1, 4)$  является группа  $O(4)$ , которая локально изоморфна группе  $SU(2) \times SU(2)$ .

Особенностью уравнения (3.15) для функции  $\Psi_{+}$  (или  $\Psi_{-}$ ) является то, что оно в отличие от обычного уравнения Дирака неинвариантно относительно  $C$ -преобразований (более детально см. [9]). В пятимерном подходе простейшим спинорным  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантным уравнением является восьмикомпонентное уравнение [9]

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma_0 \gamma_k & 0 \\ 0 & \gamma_0 \gamma_k \end{pmatrix} p_k + \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{pmatrix} \varkappa \right\} \Psi(t, \mathbf{x}, x_4),$$

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_{+} \\ \Psi_{-} \end{pmatrix},$$
(3.16)

являющееся объединением двух уравнений (3.15).

Для этого уравнения справедливо следующее утверждение: уравнение (3.16) инвариантно относительно матричной алгебры  $O(6)$ . Чтобы доказать это утверждение, следует представить уравнение (3.16) в форме

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x}, x_4)}{\partial t} = (\Gamma_0 \Gamma_k p_k + \Gamma_0 \varkappa) \Psi(t, \mathbf{x}, x_4),$$
(3.17)

где восьмирядные матрицы  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_k$  и  $\Gamma_5$ ,  $\Gamma_6$  — базисные элементы восьмимерной алгебры Клиффорда, а потом повторить рассуждения, приведенные в пункте 1.

Из приведенного анализа уравнений (3.3), (3.10), (3.15), (3.16) вытекает, что дополнительная инвариантность уравнений движений, инвариантных относительно неоднородных групп типа  $P(1, n)$ , зависит как от размерности пространства Минковского, так и от компонентности волновых функций.

**Замечание 4.** Если в уравнении (3.15) положить  $\varkappa = 0$ , оно будет описывать частицу и античастицу с переменной массой  $\sqrt{p_4^2}$  и фиксированным спином  $s = 1/2$  [9]. Уравнение (3.5) (для  $\varkappa = 0$ ) инвариантно относительно группы  $O(2, 5)$ , содержащей в качестве подгруппы конформную группу. Следует отметить, что обычное уравнение Дирака с фиксированной массой неинвариантно даже относительно конформной группы.

Автор выражает благодарность А.Л. Грищенко за проверку некоторых формул настоящей работы.

1. Фок В., *Z. Phys.*, 1936, **98**, 145.
2. Lomont J.S., *Nuovo Cim.*, 1957, **6**, 204;  
Gross L., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 687.
3. Широков Ю.М., *ДАН СССР*, 1954, **94**, 857; 1954, **99**, 737; *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
4. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
5. Rosen J., Roman P., *J. Math. Phys.*, 1966, **7**, 2072.
6. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1951, **21**, 748.
7. Böhm A., *Phys. Rev.*, 1966, **145**, 1212.
8. Sankaranarayanan A., *Nuovo Cim.*, 1965, **38**, 1441.
9. Фушич В.И., *ТМФ*, 1970, **4**, 360.
10. Pauli W., *Nuovo Cim.*, 1957, **6**, 204;  
Sen Gupta N.D., *Nuovo Cim.*, 1965, **36**, 1181;  
Ибрагимов Н.Х., *ДАН СССР*, 1969, **185**, 1226.
11. Fronsdal C., *Phys. Rev.*, 1959, **113**, 1367.

# О $PTC$ -неинвариантных лагранжианах

В.И. ФУЩИЧ

With the aid of the energy sign and helicity operators the Poincaré-noninvariant Lagrangians and the equations of motion are constructed, which are not invariant under the  $PTC$ -transformation.

С помощью операторов знака энергии и спиральности построены лагранжианы, инвариантные относительно группы Пуанкаре, и уравнения движения, которые неинвариантны относительно  $PTC$ -преобразования.

В настоящей заметке приведены несколько примеров пуанкаре-инвариантных лагранжианов, которые неинвариантны относительно  $PTC \equiv \Theta$ -преобразования. Построение примеров  $\Theta$ -неинвариантных лагранжианов основано на простом замечании, что при  $PTC$ -преобразовании частицы переходят в античастицы с обратной спиральностью. Поэтому, если уравнения движения фиксируют знак спиральности, то они будут  $PTC$ -инвариантны. Эта инвариантность не противоречит теореме Паули–Людерса [1], так как построенные лагранжианы нелокальны.

В релятивистской квантовой механике можно ввести два неэквивалентных оператора пространственно-временного отражения

$$\begin{aligned}\Theta_1\Psi(x) &= \theta_1\Psi(-x), & x &\equiv (t, \mathbf{x}), \\ \Theta_2\Psi(x) &= \theta_2^*\Psi(-x),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\theta_1, \theta_2$  — некоторые матрицы, размерность которых зависит от числа компонент волновой функции  $\Psi$ ; \* — операция комплексного сопряжения. Так как в теории поля на вектора состояний налагается требование положительности энергии, поэтому далее будем рассматривать только оператор  $\Theta_2$ .

Генераторы группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  при пространственно-временном отражении преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\Theta_2 P_0 \Theta_2^{-1} &= P_0, & \Theta_2 P_k \Theta_2^{-1} &= P_k, \\ \Theta_2 J_{kl} \Theta_2^{-1} &= -J_{kl}, & \Theta_2 J_{0k} \Theta_2^{-1} &= -J_{0k},\end{aligned}\tag{2}$$

Хорошо известно [2], что, кроме двух основных инвариантов  $P^2 = P_\mu P^\mu$  и  $W^2$ , собственная группа  $P(1, 3)$  имеет два дополнительных инварианта

$$\hat{\varepsilon} = \frac{P_0}{|P_0|} \quad (\text{для } P^2 \geq 0),\tag{3}$$

$$\hat{h} = \frac{J_{12}P_3 + J_{23}P_1 + J_{31}P_2}{|P_0|} \quad (\text{для } P^2 = 0, P_0 \neq 0).\tag{4}$$

Учитывая (2), легко установить такие соотношения:

$$\Theta_2 \hat{\varepsilon} \Theta_2^{-1} = \hat{\varepsilon}, \quad \Theta_2 \hat{h} \Theta_2^{-1} = -\hat{h}.\tag{5}$$

Рассмотрим теперь простейшие квадратичные формы, в которые входят операторы (3) и (4),

$$\bar{\Psi}(1 - \hat{\varepsilon})\Psi \quad \text{или} \quad \bar{\Psi}(1 + \hat{\varepsilon})\Psi, \quad (6)$$

$$\bar{X}(1 - \hat{h})X \quad \text{или} \quad \bar{X}(1 + \hat{h})X, \quad (7)$$

где  $\Psi$  и  $X$  — волновые функции, описывающие частицы с ненулевой и нулевой массой. Очевидно, что формы (6) и (7) пуанкаре-инвариантны, так как  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{h}$  — инварианты группы  $P(1, 3)$ . Форма (6) инвариантна относительно  $\Theta_2$ -отражения, а форма (7) неинвариантна относительно  $\Theta_2$ -отражения.

В квантовой теории поля функции  $\Psi(x)$  и  $X(x)$  являются ферми-операторами, которые при отражении преобразуются по правилам (см., например, [3])

$$\Psi(x) \xrightarrow{\Theta_2} \Theta_2 \Psi(x) \Theta_2^{-1} = -i\tilde{\gamma}_5 \tilde{\gamma}_0 \bar{\Psi}(-x),$$

$$\bar{\Psi}(x) \xrightarrow{\Theta_2} \Theta_2 \bar{\Psi} \Theta_2^{-1} = -i\bar{\Psi} \gamma_0 \gamma_5.$$

Из сказанного ясно, что лагранжианы, точнее некоторые инвариантные формы из операторов поля вида

$$L_2^\pm = g_1 \bar{\Psi}(1 \pm \hat{\varepsilon})\Psi \bar{X}(1 \pm \hat{h})X + g_2 \bar{\Psi}(1 \pm \hat{\varepsilon})\Psi \bar{X}(1 \pm \hat{h})X + \text{э.с.}, \quad (8)$$

$$L_2^\pm = g_3 \bar{\Psi} \gamma_\mu (1 \pm \hat{\varepsilon}) \Psi \bar{X} \gamma_\mu (1 \pm \hat{h}) X + \text{э.с.}, \quad (9)$$

где  $\bar{\Psi}$ ,  $\Psi$  — фермионные поля (спин 1/2) с ненулевой массой,  $\bar{X}$ ,  $X$  — фермионные поля с нулевой массой,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  — постоянные величины, неинвариантны относительно  $\Theta_2$ -преобразования.

Таким образом, используя интегральные операторы (3) и (4), можно построить пуанкаре-инвариантные формы, которые неинвариантны относительно  $PTC$ -преобразования.

Операторы  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{h}$  могут быть использованы для нахождения релятивистских уравнений, неинвариантных относительно  $PTC$ -преобразования [4, 5]. Так, например, уравнение Дирака для частицы с нулевой массой совместно с релятивистски инвариантным дополнительным условием

$$(1 + \hat{h})X = \left(1 + \gamma_5 \frac{\gamma_0 \gamma_k P_k}{\sqrt{P_i^2}}\right) X = 0 \quad (10)$$

или

$$(1 - \hat{h})X = \left(1 - \gamma_5 \frac{\gamma_0 \gamma_k P_k}{\sqrt{P_i^2}}\right) X = 0 \quad (11)$$

неинвариантно ни относительно  $\Theta_1$ -преобразования, ни относительно  $\Theta_2$ -преобразования.

Очевидно, что в качестве двух других дополнительных условий могут быть использованы такие два уравнения:

$$(1 + \hat{h}\hat{\varepsilon})X = (1 + \gamma_5)X = 0 \quad (12)$$

или

$$(1 - \hat{h}\hat{\varepsilon})X = (1 - \gamma_5)X = 0,$$

$$(1 + \hat{\varepsilon})X = \left(1 + \frac{\gamma_0 \gamma_k p_k}{\sqrt{p_l^2}}\right) X = 0$$

или

$$(1 - \hat{\varepsilon})X = \left(1 - \frac{\gamma_0 \gamma_k p_k}{\sqrt{p_l^2}}\right) X = 0. \quad (13)$$

Из приведенного вытекает такой результат: для частицы (и античастицы) нулевой массы и произвольного спина существуют три существенно различных (относительно  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -преобразований) двухкомпонентных уравнения.

1. Граверт Г., Людерс Г., Рольник Г., *УФН*, 1960, **71**, № 2, 289.
2. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
3. Roman P., *Theory of Elementary Particles*, Amsterdam, 1961.
4. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321.
5. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., *Lettere Nuovo Cim.*, 1970, **4**, 927.

# О релятивистских уравнениях движения без “лишних” компонент

*В.И. ФУЩИЧ, А.Л. ГРИЩЕНКО, А.Г. НИКИТИН*

On the basis of a definite representation (2.1) for the generators of the proper Poincaré group all the operator functions  $H$  (up to unitary equivalence) which the equation (1.1) is invariant under the total Poincaré group (including space-time reflections) are described. For the case of arbitrary spin, the unitary operator connecting the representation (2.1) with the canonical Foldy–Shirokov representation is found. The explicit forms of the coordinate, velocity and spin operators are obtained in the representation (2.1) for arbitrary spin  $s$ .

Исходя из определенного представления для генераторов собственной группы Пуанкаре (2.1) описаны все (с точностью до унитарной эквивалентности) операторные функции  $H$ , при которых уравнение (1.1) инвариантно относительно полной группы Пуанкаре (включающей пространственно-временные отражения). Найден унитарный оператор для произвольного спина, связывающий представление (2.1) с каноническим представлением Фолди–Широкова. Получены явные виды операторов координаты, скорости и спина в представлении (2.1) для произвольного спина  $s$ .

## 1. Введение

За последнее время появился ряд работ, посвященных задаче нахождения релятивистски-инвариантных уравнений, описывающих свободное движение частицы (и античастицы) с произвольным спином  $s$ , волновые функции которых имеют только  $2(2s+1)$  компонент. Такая задача может быть сведена к задаче об описании всех тех операторных функций  $H$  (гамильтонианов частиц с произвольным спином  $s$ ), зависящих от операторов импульса и спина частиц, для которых уравнение типа Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = H \Psi(t, \mathbf{x}) \quad (1.1)$$

инвариантно относительно полной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1,3)$  (включающей пространственно-временные отражения). Другими словами, это означает, что оператор  $H$  в (1.1) должен быть таким, чтобы на множестве решений  $\{\Psi(t, \mathbf{x})\}$  уравнения (1.1) реализовалось неприводимое представление группы  $\tilde{P}(1,3)$ .

Вышеприведенная задача решена в [1] и [2, 3] исходя из специфического представления для генераторов собственной группы Пуанкаре  $P(1,3)$ . Особенностью этого представления является то, что оно связано с каноническим представлением Фолди–Широкова не унитарным (за исключением случая  $s = 1/2$ ), а изометрическим оператором. Это обстоятельство может привести к трудностям, связанным с физической интерпретацией динамических переменных, найденных в [1–5], при введении взаимодействия в уравнение движения вида (1.1).

В настоящей работе исходя из определенного представления для генераторов группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1,3)$  (отличного от представления, используемого в [1–3]), которое связано с каноническим представлением Фолди–Широкова унитарным оператором для всех спинов  $s$ , решена задача (1.1), т.е. описаны все операторы  $H$  (с точностью до унитарной эквивалентности), для которых уравнение (1.1) инвариантно относительно полной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1,3)$ .

## 2. Постановка задачи

Будем исходить из следующего представления для генераторов  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  группы  $P(1,3)$ :

$$\begin{aligned} P_0 &\equiv H, & P_k &\equiv p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}, & k &= 1, 2, 3, \\ J_{kl} &= x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \\ J_{0k} &= t p_k - \frac{1}{2} [x_k, H]_+, & [x_k, H]_+ &\equiv x_k H + H x_k, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $H$  — неизвестная операторная функция,  $S_{kl}$  — матрицы размерности  $2(2s+1) \times 2(2s+1)$ , реализующие прямую сумму двух неприводимых представлений  $D(s)$  алгебры  $SO(3)$ . Операторы  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger(t, \mathbf{x}) \Psi_2(t, \mathbf{x}),$$

$\dagger$  — операция эрмитова сопряжения.

Представление (2.1) отличается от соответствующего представления в [1]. Только в случае, когда  $s = 1/2$ , представление (2.1) совпадает с представлением [1]. Такое различие в исходных положениях приводит к результатам, совершенно отличным от результатов работ [1–3].

Операторы пространственного  $P$  и временных  $T^{(1)}, T^{(2)}$  отражений определим обычным образом

$$\begin{aligned} P\Psi(t, \mathbf{x}) &= r\Psi(t, -\mathbf{x}), & P^2 &\sim 1, \\ T^{(1)}\Psi(t, \mathbf{x}) &= \tau^{(1)}\Psi^*(-t, \mathbf{x}), & (T^{(1)})^2 &\sim 1, \\ T^{(2)}\Psi(t, \mathbf{x}) &= \tau^{(2)}\Psi^*(-t, \mathbf{x}), & (T^{(2)})^2 &\sim 1, \end{aligned}$$

где матрицу  $r$ , не умаляя общности, можно выбрать так:

$$r = I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad r = \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$1 - (2s+1) \times (2s+1)$ -единичная матрица. Матрицы  $\tau^{(1)}, \tau^{(2)}$  можно выбрать, например, в виде  $2(2s+1) \times 2(2s+1)$ -матриц Паули  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Для нас в дальнейшем явный вид матриц  $\tau^{(1)}$  и  $\tau^{(2)}$  несуществен, поэтому мы его не будем детализировать. Оператор зарядового сопряжения эквивалентен ( $\sim$ ) произведению операторов  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$ , поэтому мы его не рассматриваем.

Операторы  $P, T^{(1)}, T^{(2)}$  и генераторы  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} [P, H]_- &= 0, & [P, P_k]_+ &= 0, & [P, J_{kl}]_+ &= 0, & [P, J_{0k}]_- &= 0, \\ [T^{(1)}, H]_- &= [T^{(1)}, J_{0k}]_- = 0, & [T^{(1)}, P_k]_+ &= [T^{(1)}, J_{kl}]_+ = 0, \\ [T^{(2)}, H]_+ &= [T^{(2)}, J_{0k}]_+ = 0, & [T^{(2)}, P_k]_- &= [T^{(2)}, J_{kl}]_- = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

На множестве решений  $\{\Psi(t, \mathbf{x})\}$  уравнения (1.1) должно реализоваться неприводимое представление группы  $\tilde{P}(1, 3)$ , которое, как известно, характеризуется массой  $m$  и спином  $s$ . Это означает, что

$$H^2 = p^2 + m^2. \quad (2.3)$$

Условие кратности единичному оператору квадрата вектора Паули–Любанского на  $\{\Psi(t, \mathbf{x})\}$  достигается выбором матриц  $S_{kl}$  в виде

$$S_{kl} = \begin{pmatrix} s_n & 0 \\ 0 & s_n \end{pmatrix} = S_n, \quad k, l, n - \text{цикл } (1, 2, 3),$$

где  $s_n$  —  $(2s + 1) \times (2s + 1)$ -мерные матрицы, реализующие неприводимое представление алгебры  $SO(3)$ , удовлетворяющие соотношениям

$$[s_k, s_l]_- = i\varepsilon_{klm}s_m.$$

Поскольку уравнение (1.1) по предположению инвариантно относительно группы  $\tilde{P}(1, 3)$ , то оператор  $H$  должен быть таким, чтобы удовлетворялись следующие соотношения [4, 5]:

$$[H, P_k]_- = [H, J_{kl}]_- = 0, \quad [H, J_{0k}]_- = ip_k, \quad [p_n, J_{0k}]_- = i\delta_{nk}H, \\ [J_{kl}, J_{0n}]_- = i\delta_{kn}J_{0l} - i\delta_{nl}J_{0k}, \quad (2.4)$$

$$[J_{0k}, J_{0n}]_- = -iJ_{kn}, \quad (2.5)$$

$$[P, H]_- = [T^{(1)}, H]_- = 0, \quad [T^{(2)}, H]_+ = 0. \quad (2.6)$$

Таким образом, задача о нахождении операторной функции  $H$ , при которой уравнение (1.1) будет инвариантно относительно группы  $\tilde{P}(1, 3)$ , сводится к решению системы операторных соотношений (2.4)–(2.6) при условии (2.3).

### 3. Решение системы (2.4)–(2.6)

Для решения соотношений (2.4)–(2.6) используем разложение операторов, входящих в (2.4)–(2.6), по полной системе операторов ортогонального проектирования, что позволяет свести нашу задачу к решению функциональных уравнений.

**1.** Рассмотрим следующую систему операторов проектирования:

$$\Lambda_{s_3} = \prod_{\substack{s'_3 \neq -s \\ s'_3 \neq s_3}}^s \frac{S_p - s'_3}{s_3 - s'_3}, \quad -s \leq s_3 \leq s, \quad (3.1)$$

где  $S_p = S_k p_k / p$ ,  $p = |\mathbf{p}|$ . Нетрудно убедиться (более подробно об операторах проектирования см. [2]), что совокупность операторов  $\Lambda_{s_3}$ , действительно является совокупностью операторов ортогонального проектирования на подпространства, являющиеся собственными подпространствами оператора  $S_p$  с собственными значениями  $s_3$  (спиральность частицы), т.е.

$$\Lambda_{s_3} \Lambda_{s'_3} = \delta_{s_3 s'_3} \Lambda_{s'_3}, \quad \sum_{s_3=-s}^s \Lambda_{s_3} = I,$$

$$S_p^n = \sum_{s_3=-s}^s (s_3)^n \Lambda_{s_3}, \quad n = 0, 1, \dots, 2s.$$

Иногда удобно пользоваться не системой операторов  $\Lambda_{s_3}$ , а системой операторов  $B_{s_3}, C_{s_3}$ , определенных ниже:

$$B_{s_3} = \Lambda_{s_3} + \Lambda_{-s_3}, \quad C_{s_3} = \Lambda_{s_3} - \Lambda_{-s_3}, \quad 1/2 \leq s_3 \leq s,$$

$$B_0 \equiv \Lambda_0, \quad \sum_{s_3 \geq 0} B_{s_3} = I.$$

2. Условия (2.6) будут удовлетворяться, если  $H$  имеет вид

$$H_s = \sum_{s_3=-s}^s (\sigma_1 g_{s_3}(p) + \sigma_3 f_{s_3}(p)) \Lambda_{s_3}, \quad (3.2)$$

где неизвестные функции  $g_{s_3}, f_{s_3}$  (зависящие только от  $p$ ) должны иметь следующие свойства:

если  $r = I$ , то

$$g_{-s_3} = g_{s_3}, \quad f_{-s_3} = f_{s_3}, \quad 0 \leq s_3 \leq s; \quad (3.3)$$

если  $r = \sigma_3$ , то имеются два случая:

$$g_{-s_3} = -g_{s_3}, \quad f_{-s_3} = f_{s_3}, \quad g_0 = 0, \quad f_0 = \pm E, \quad 1/2 \leq s_3 \leq s, \quad (3.4)$$

$$g_{-s_3} = -g_{s_3}, \quad f_{-s_3} = -f_{s_3}, \quad g_0 = f_0 = 0, \quad 1/2 \leq s_3 \leq s. \quad (3.5)$$

Следует отметить, что соотношения (2.6) будут удовлетворяться также, если в (3.2) сделать замены

$$\sigma_3 \rightarrow \sigma_2 \quad \text{или} \quad \sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \quad \text{или} \quad \sigma_1 \rightleftharpoons \sigma_3.$$

Все операторы  $H_s$ , получающиеся при такой замене, унитарно эквивалентны (3.2), поэтому мы их не будем рассматривать в дальнейшем.

Условие (2.3) накладывает на функции  $g_{s_3}, f_{s_3}$  дополнительное ограничение

$$f_{s_3}^2 + g_{s_3}^2 = E^2 = p^2 + m^2, \quad -s \leq s_3 \leq s. \quad (3.6)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что соотношения (2.4) с оператором  $H_s$  в форме (3.2) удовлетворяются, если имеет место (3.6). Таким образом, осталось рассмотреть соотношение (2.5), которое совместно с (3.3)–(3.5) и определяет окончательную структуру оператора  $H_s$ , т.е. явный вид коэффициентных функций  $g_{s_3}, f_{s_3}$  в (3.2).

Соотношения (2.5) с учетом представления (2.1) можно записать в виде

$$\frac{1}{4} [[x_k, H_s]_-, [x_l, H_s]_-]_- = -iS_n, \quad k, l, n - \text{цикл } (1,2,3). \quad (3.7)$$

Умножая (3.7) на  $p_n$ , суммируя по  $n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) и используя структуру оператора  $J_{kl}, k \neq l$  (см. (2.1)), получаем

$$S[x, H_s]_- H_s = 3ipS_p = 3ip \sum_{s_3=-s} s_3 \Lambda_{s_3}. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.2) в (3.8), используя при этом (3.6) и коммутационные соотношения (Д.1), получаем уравнения для коэффициентных функций

$$\sum_{s_3=-s}^s (g_{s_3}g_{s'_3} + f_{s_3}f_{s'_3}) [-s'_3 a_{s_3 s'_3} + d_{s_3 s'_3} (s(s+1) - (s'_3)^2)] = 2p^2 s'_3, \quad (3.9)$$

$$-s + 1 \leq s'_3 \leq s - 1,$$

$$\sum_{s_3=-s}^s (g_{s_3}g_s + f_{s_3}f_s) d_{s_3 s} = 2p^2, \quad (3.10)$$

$$\sum_{s_3=-s}^s (g_{s_3}g_{-s} + f_{s_3}f_{-s}) d_{s_3 -s} = -2p^2. \quad (3.11)$$

Учитывая численные значения коэффициентов  $d_{s_3 s'_3}$ , приведенных в дополнении, а также (3.6), (3.10), (3.11), получаем формулу

$$f_{\pm s} f_{\pm(s-1)} + g_{\pm s} g_{\pm(s-1)} = m^2 - p^2. \quad (3.12)$$

Записывая уравнение (3.9) для  $s'_3 = s - 1, s - 2, s - 3$  и т.д. и используя при этом формулы типа (3.12) для  $s_3 = s, s - 1, s - 2$  и т.д. по индукции получаем следующую рекуррентную формулу:

$$f_{s_3} f_{s_3-1} + g_{s_3} g_{s_3-1} = m^2 - p^2, \quad -s + 1 \leq s_3 \leq s. \quad (3.13)$$

Из (3.13) совместно с (3.6) следует, что для каждого конкретного  $s_3$  имеют место формулы

$$f_{s_3} = \frac{m^2 - p^2}{E^2} f_{s_3-1} + \frac{2mp}{E^2} g_{s_3-1}, \quad g_{s_3} = \frac{m^2 - p^2}{E^2} g_{s_3-1} - \frac{2mp}{E^2} f_{s_3-1}, \quad (3.14)$$

$$-s + 1 \leq s_3 \leq s;$$

$$f_{s_3} = \frac{m^2 - p^2}{E^2} f_{s_3-1} - \frac{2mp}{E^2} g_{s_3-1}, \quad g_{s_3} = \frac{m^2 - p^2}{E^2} g_{s_3-1} + \frac{2mp}{E^2} f_{s_3-1}, \quad (3.15)$$

$$-s + 1 \leq s_3 \leq s;$$

Итак, рекуррентные формулы (3.14), (3.15) совместно с условиями (3.3)–(3.5) дают возможность найти все коэффициентные функции  $f_{s_3}, g_{s_3}$  оператора  $H_s$  в (3.2), если известна хотя бы одна функция из набора  $f_{s_3}, -s \leq s_3 \leq s$  (или  $g_{s_3}$ ). Следовательно, система соотношений (2.4)–(2.6) будет удовлетворяться, если  $H_s$  имеет вид (3.2), а  $f_{s_3}, g_{s_3}$  удовлетворяют условиям (3.14), (3.15), (3.3)–(3.5).

Этим самым описаны все возможные операторные функции  $H_s$ , при которых уравнение (1.1) будет инвариантно относительно полной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, 3)$ .

**Замечание 1.** Формулы (3.13)–(3.15) справедливы и в том случае, когда  $m = 0$ .

**Замечание 2.** Класс операторов  $H_s$  с функциями  $f_{s_3}, g_{s_3}$ , удовлетворяющими условиям (3.5), описывает частицы с нулевой массой ( $m = 0$ ) полуцелым спином  $s$ , поскольку условия (3.6) и (3.13) удовлетворяются только в этом случае. При этом формулы (3.14) и (3.15) совпадают и определяют  $f_{s_3}, g_{s_3}$  с точностью до произвольной функции.

**Замечание 3.** Класс операторов  $H_s$  с функциями  $f_{s_3}, g_{s_3}$ , удовлетворяющими (3.3), описывает частицы с целым спином, так как условия (3.6) и (3.13) совместны только для целых  $s$ . При этом формулы (3.14), (3.15) определяют  $H_s$  с точностью до произвольной функции.

**Замечание 4.** Класс операторов  $H_s$  с функциями  $f_{s_3}, g_{s_3}$ , удовлетворяющими условиям (3.4), описывает частицы как целого, так и полуцелого спина. В этом случае коэффициентные функции  $f_{s_3}, g_{s_3}$  определяются по формулам (3.14) и (3.15) однозначно как для целых, так и полуцелых спинов, поскольку

$$g_0 = 0, \quad f_0 = \pm E \quad \text{для целых } s, \quad (3.16)$$

$$g_{1/2} = \pm p, \quad f_{1/2} = \pm m \quad \text{для полуцелых } s. \quad (3.17)$$

Последнее соотношение вытекает из условий (3.6) и (3.13).

Все сказанное в замечаниях 2, 3, 4 получено на основе исследования совместности условий (3.3)–(3.6) и (3.13) для  $s_3 = 0, 1/2$ .

Оператор (3.2) полезно записать в виде такого рекуррентного соотношения:

$$H_s = H_{s-1} = D(s), \quad (3.18)$$

где

$$D(s) = \sigma_1(g_s \Lambda_s + g_{-s} \Lambda_{-s}) + \sigma_3(f_s \Lambda_s + f_{-s} \Lambda_{-s}).$$

Это соотношение дает возможность по гамильтониану для спина  $s - 1$  найти гамильтониан для спина  $s$  (и наоборот). Конечно, оператор  $H_{s-1}$  должен быть определен в том же самом пространстве (размерности  $2(2s + 1)$  по спиновым индексам), что и оператор  $H_s$ , хотя на самом деле он задан в пространстве размерности  $2(2s - 1)$ . Оператор  $H_{s-1}$  в пространстве размерности  $2(2s + 1)$  имеет тот же вид, что и в пространстве размерности  $2(2s - 1)$ , за исключением того, что матрицы  $S_k$  имеют уже размерность  $2(2s + 1) \times 2(2s + 1)$ . Из (3.18) видно, что гамильтониан для сколь угодно высокого спина полностью определяется гамильтонианом для нижайших спинов  $s = 1/2, s = 1$ .

Формула (3.18) может оказаться полезной при введении взаимодействия в уравнение (1.1) для  $s > 1/2$ .

#### 4. Примеры операторов $H_s$

В этом разделе по вышеизложенной методике будут найдены наиболее простые операторы  $H_s$  ( $m \neq 0$ ), коэффициентные функции которых удовлетворяют условиям (3.4). Кроме того, для  $m = 0$  будут найдены все возможные (в рамках представления (2.1)) операторы  $H_s$ , удовлетворяющие соотношениям (2.4)–(2.6).

**1.** Рекуррентные формулы (3.14), (3.15) равноправны, поэтому их можно употреблять в любом порядке, причем различный порядок чередования этих формул дает различные виды операторов  $H_s$ . Это обстоятельство приводит к тому, что число возможных операторов  $H_s$  с увеличением спина  $s$  возрастает.

Прежде чем переходить к конкретным вычислениям операторов  $H_s$ , отметим, что формулы (3.14) и (3.15) справедливы как для  $s_3 \geq 0$ , так и для  $s_3 < 0$ . Однако для конкретных вычислений удобно использовать их только для  $s_3 > 0$ . Коэффициентные функции  $f_{s_3}, g_{s_3}$ , для  $s_3 < 0$  находятся тогда по (3.4).

Согласно сказанному в разделе 3 для определения функций  $f_{s_3}$ ,  $g_{s_3}$  по формулам (3.14), (3.15) достаточно знать какую-либо одну функцию из набора  $f_{s_3}$ ,  $-s \leq s_3 \leq s$  (или  $g_{s_3}$ ).

Рассмотрим случай полуцелого спина, когда (см. (3.17))

$$f_{1/2} = m, \quad g_{1/2} = p.$$

Для нахождения функций  $f_{1/2}$ ,  $g_{1/2}$  можно, вообще говоря, воспользоваться как формулой (3.14), так и (3.15). Воспользовавшись ради конкретности формулой (3.14), получаем  $f_{3/2} = m$ ,  $g_{3/2} = -p$ . Согласно условию (3.4) имеем  $f_{-3/2} = m$ ,  $g_{-3/2} = p$ .

Для нахождения  $f_{5/2}$ ,  $g_{5/2}$  можно также воспользоваться как формулой (3.14), так и (3.15). Используя формулу (3.15), находим  $f_{5/2} = m$ ,  $g_{5/2} = p$ . Согласно условию (3.4) имеем  $f_{-5/2} = m$ ,  $g_{-5/2} = -p$ .

Продолжая этот процесс вычисления функций  $f_{s_3}$ ,  $g_{s_3}$  для  $s_3 = 7/2$ ,  $s_3 = 9/2$ ,  $s_3 = 11/2$  и т.д., т.е. поочередно используя формулы (3.14) для  $s_3 = 7/2$ , (3.15) для  $s_3 = 9/2$ , (3.14) для  $s_3 = 11/2$  и т.д., получаем

$$H_s = \sigma_3 m + \sigma_1 p \sum_{s_3 \geq 1/2}^s (-1)^{s_3 - \frac{1}{2}} C_{s_3}. \quad (4.1)$$

Если исходные функции имеют вид  $f_{1/2} = m$ ,  $g_{1/2} = -p$  (см. (3.17)), то для вычисления  $f_{3/2}$ ,  $g_{3/2}$  применим (3.15), а для  $f_{5/2}$ ,  $g_{5/2}$  применим (3.14), для  $f_{7/2}$ ,  $g_{7/2}$  снова применим (3.15) и т.д. (чередую формулы (3.14) и (3.15) для  $s_3 = 9/2$ ,  $s_3 = 11/2$  и т.д.). Эти вычисления приводят к

$$H_s = \sigma_3 m - \sigma_1 p \sum_{s_3 \geq 1/2}^s (-1)^{s_3 - \frac{1}{2}} C_{s_3}. \quad (4.2)$$

Если исходные функции имеют вид  $f_{1/2} = -m$ ,  $g_{1/2} = \pm p$  (см. (3.17)), то аналогичные вычисления приводят к таким операторам:

$$H_s = -\sigma_3 m \pm \sigma_1 p \sum_{s_3 \geq 1/2}^s (-1)^{s_3 - \frac{1}{2}} C_{s_3}. \quad (4.3)$$

Подобным же способом вычисляются коэффициентные функции  $f_{s_3}$ ,  $g_{s_3}$  для целых спинов. Если  $f_0 = E$ ,  $g_0 = 0$  (см. (3.16)), то гамильтониан  $H_s$  имеет вид

$$H_s = \sigma_3 \left( E - \frac{2p^2}{E} \sum_{n=0}^N B_{2n+1} \right) + \sigma_1 \frac{2mp}{E} \sum_{n=0}^N C_{2n+1}, \quad (4.4)$$

где  $B_{2n+1}$ ,  $C_{2n+1}$  — операторы, определенные в разделе 3,

$$N = \begin{cases} \frac{s-1}{2}, & \text{если } s \text{ нечетное,} \\ \frac{s}{2} - 1, & \text{если } s \text{ четное.} \end{cases} \quad (4.5)$$

Если взять  $f_0 = -E$ ,  $g_0 = 0$ , то точно таким же способом получим оператор  $H_s$  отличающийся от (4.4) только знаком.

**Замечание 1.** Оператор  $H_s$  в (4.1) для  $s = 1/2$  совпадает с гамильтонианом Дирака. Оператор  $H_s$  в (4.4) для  $s = 1$  совпадает с гамильтонианом Йордана–Мукунды [7], полученным совершенно другим методом.

**Замечание 2.** Операторы  $H_s$ , имеющие вид (4.1)–(4.4), получены при определенном правиле использования (чередования) формул (3.14), (3.15). Если эти формулы использовать в ином порядке, то мы будем получать более сложные выражения для операторов  $H_s$ , которые трудно записать в компактном виде для произвольного спина  $s$ . Например, если пользоваться формулой (3.15) для вычислений функций  $f_{s_3}$ ,  $g_{s_3}$ , но не использовать при этом (3.14), то для  $s = 3/2$  при тех же  $f_{1/2}$ ,  $g_{1/2}$  (см. (3.17)) получаем

$$H_{3/2} = \pm \left\{ \sigma_3 m \left( 1 - \frac{4p^2}{E^2} B_{3/2} \right) \pm \sigma_1 p \left( C_{1/2} + \frac{3m^2 - p^2}{E^2} C_{3/2} \right) \right\}. \quad (4.6)$$

Если  $s = 2$  и  $f_0 = E$ , то вычисляя  $f_2$ ,  $g_2$  по формулам (3.15), получаем

$$H_2 = \sigma_3 \left( E - \frac{2p^2}{E} B_1 - \frac{8m^2 p^2}{E^3} B_2 \right) + \sigma_1 \frac{2mp}{E} \left( C_1 + 2 \frac{m^2 - p^2}{E^2} C_2 \right). \quad (4.7)$$

Если  $f_0 = -E$ , то мы получим  $H_2$ , отличающийся от (4.7) только общим знаком.

Итак, операторы  $H_s$ , задаваемые формулами (4.1)–(4.7), удовлетворяют соотношениями (2.4)–(2.6), а уравнения (1.1) с такими  $H_s$  описывают частицу (и античастицу) с целым и полуцелым спином.

**Замечание 3.** Из приведенного следует, что явный вид операторов  $H_s$  для данного спина  $s$  зависит не только от заданных начальных функций (типа  $f_{1/2}$ ,  $g_{1/2}$ ,  $f_0$ ,  $g_0$ ), но и от порядка использования формул (3.14), (3.15). Число возможных (допускаемых соотношениями (2.4)–(2.6)) операторов  $H_s$  увеличивается с возрастанием спина частицы, что связано с увеличением возможностей использования формул (3.14), (3.15) в различном порядке.

**Замечание 4.** Несмотря на то, что явные виды гамильтонианов для одного и того же спина  $s$  имеют различную структуру, все они унитарно эквивалентны в случае свободной теории. При этом следует подчеркнуть, что с физической точки зрения они неэквивалентны в том смысле, что введение взаимодействия, например, по правилу  $p_k \rightarrow p_k - eA_k$  приведет к различным результатам. Вопрос о введении взаимодействия в уравнение (1.1) с найденными операторами  $H_s$  будет рассмотрен в следующей работе.

**2.** В том случае, когда масса частицы равна нулю ( $m = 0$ ), формулы (3.14), (3.15) совпадают и принимают вид

$$f_{s_3} = -f_{s_3-1}, \quad g_{s_3} = -g_{s_3-1}, \quad -s + 1 \leq s_3 \leq s. \quad (4.8)$$

Если воспользоваться формулами (3.16), (4.8) для  $m = 0$ , то для целых спинов получаем

$$H_s = \pm \sigma_3 p \sum_{s_3=-s}^s (-1)^{s_3} \Lambda_{s_3} = \pm \sigma_3 p \sum_{s_3 \geq 0}^s (-1)^{s_3} B_{s_3}. \quad (4.9)$$

Для полуцелых спинов условия (3.17) для  $m = 0$  и (4.8) приводят к следующему результату:

$$H_s = \pm \sigma_1 p \sum_{s_3 = -s}^s (-1)^{s_3 - \frac{1}{2}} \Lambda_{s_3} = \pm \sigma_1 p \sum_{s_3 \geq \frac{1}{2}}^s (-1)^{s_3 - \frac{1}{2}} C_{s_3}. \quad (4.10)$$

Оператор (4.10) для  $m = 1/2$  совпадает с гамильтонианом Чини–Тушека в ультра-релятивистском пределе.

Формулы (4.8) справедливы и в том случае, когда коэффициентные функции  $f_{s_3}$ ,  $g_{s_3}$  удовлетворяют условиям (3.3), (3.5) (для  $m = 0$ ).

Если воспользоваться условием (3.3) и замечанием 2 раздела 3, то из (4.8) получаем

$$H_s = \sum_{s_3 \geq 0}^s (-1)^{s_3} (\sigma_3 f_0 + \sigma_1 g_0) B_{s_3}, \quad g_0^2 + f_0^2 = p^2. \quad (4.11)$$

Если воспользоваться условием (3.5) и замечанием 3 раздела 3, то из (4.8) получаем

$$H_s = \sum_{s_3 \geq \frac{1}{2}}^s (-1)^{s_3 - \frac{1}{2}} (\sigma_3 f_{1/2} + \sigma_1 g_{1/2}) C_{s_3}, \quad f_{1/2}^2 + g_{1/2}^2 = p^2. \quad (4.12)$$

Отметим, что операторы  $H_s$  в (4.11), (4.12) определены с точностью до произвольной функции  $f_0$  (или  $g_0$ ) для целого спина  $s$  и  $f_{1/2}$  (или  $g_{1/2}$  для полуцелого  $s$ , поскольку требуется лишь выполнение условия

$$f_{s_3}^2 + g_{s_3}^2 = p^2, \quad s_3 = 0, 1/2.$$

Волновая функция в уравнении (1.1) имеет  $2(2s + 1)$  компонент. Известно, что волновая функция частицы (античастицы) с нулевой массой должна иметь только две компоненты, соответствующих значению проекции спина  $s_3 = s$  и  $s_3 = -s$ . Это означает, что на волновую функцию, удовлетворяющую уравнению (1.1) с операторами  $H_s$  вида (4.9)–(4.12), следует наложить дополнительные релятивистски-инвариантные условия, выделяющие только две физически реализуемые компоненты. Эти условия имеют вид:

$$\left\{ I - \frac{1}{2} \left( B_s \pm \frac{H_s}{p} C_s \right) \right\} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad B_{s_3} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad 0 \leq s_3 \leq s - 1, \quad (4.13)$$

или

$$\left\{ I - \frac{1}{2} (B_s \pm C_s) \right\} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad B_{s_3} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad 0 \leq s_3 \leq s - 1, \quad (4.14)$$

или

$$\left\{ I - \frac{1}{2} \left( I \pm \frac{H_s}{p} \right) B_s \right\} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad B_{s_3} \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad 0 \leq s_3 \leq s - 1. \quad (4.15)$$

Учитывая (3.1), а также коммутационные соотношения (2.2), приходим к следующему результату:

- 1) условия (4.13)  $T^{(1)}$ -,  $CP^{(k)}$ -инвариантны ( $k = 1, 2, 3$ ), но  $C$ -,  $T^{(2)}$ -неинвариантны;
- 2) условия (4.14)  $C$ -,  $T^{(1)}$ -,  $T^{(2)}$ -инвариантны, но  $P^{(k)}$ -неинвариантны;
- 3) условия (4.15)  $T^{(1)}$ -,  $P^{(k)}$ -инвариантны, но  $C$ -,  $T^{(2)}$ -неинвариантны.

Таким образом, уравнение (1.1) с оператором  $H_s$  вида (4.9)–(4.12) и одним из дополнительных условий (4.13)–(4.15) инвариантно относительно собственной группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ , но только частично инвариантно относительно  $P^{(k)}$ -,  $T^{(i)}$ -,  $C$ -преобразований. В формулах (4.13)–(4.15) нужно брать один знак + или –.

Для спина  $s = 1/2$  уравнение (1.1) с дополнительным условием (4.13) эквивалентно хорошо известному двухкомпонентному уравнению Вейля для нейтрино.

Для спина  $s = 1$  уравнение (1.1) с дополнительным условием (4.15) эквивалентно уравнениям Максвелла в вакууме.

### 5. Переход к каноническому представлению

Генераторы  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  группы  $P(1, 3)$  в каноническом представлении Фолди–Широкова имеют вид

$$P_0^c = H^c = \sigma_3 E, \quad P_k^c = p_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.1)$$

$$J_{kl}^c = x_k p_l - x_l p_k + S_{kl}, \quad J_{0k}^c = t p_k - \frac{1}{2} [x_k, H^c]_+ - \sigma_3 \frac{S_{kr} p_r}{E + m}.$$

В этом представлении уравнение типа (1.1), инвариантное относительно полной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1, 3)$ , имеет вид

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = H^c \Phi(t, \mathbf{x}), \quad (5.2)$$

где  $\Phi(t, \mathbf{x})$  –  $2(2s + 1)$ -компонентная волновая функция. Поскольку на множестве решений  $\{\Phi(t, \mathbf{x})\}$  уравнения (5.2) реализуется неприводимое представление группы  $\tilde{P}(1, 3)$ , то очевидно, что между волновыми функциями  $\Psi$  и  $\Phi$  должна существовать связь

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = U \Psi(t, \mathbf{x}),$$

где  $U$  – некоторый унитарный оператор, который будет определен ниже.

Из сказанного ясно, что задача, которая была нами решена в разделе 3, эквивалентна задаче нахождения (описания) всех тех унитарных операторов  $U$ , для которых алгебра (5.1) переходит в алгебру (2.1). Для спина  $s = 1/2, 1$  такие операторы были найдены в [6, 7].

В этом разделе описан класс операторов  $U$  для произвольного спина и найдены выражения для операторов координаты  $X_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , скорости  $\dot{X}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , спина  $\Sigma_{kl}$  и знака энергии  $\hat{\varepsilon}$ .

1. Оператор  $U$  будем искать в виде

$$U_s = \sum_{s_3=-s}^s (a_{s_3} + i\sigma_2 b_{s_3}) \Lambda_{s_3}, \quad (5.3)$$

где  $a_{s_3}(p)$ ,  $b_{s_3}(p)$  – действительные функции от  $p$ . Из условия унитарности  $U_s U_s^\dagger = I$  следует, что

$$a_{s_3}^2 + b_{s_3}^2 = 1, \quad -s \leq s_3 \leq s. \quad (5.4)$$

Генераторы (5.1) связаны с генераторами (2.1) соотношениями

$$J_{kl} = U_s^\dagger J_{kl}^c U_s = J_{kl}^c, \quad P_k = P_k^c, \quad H_s = U_s^\dagger H^c U_s, \quad (5.5)$$

$$J_{0k} = U_s^\dagger J_{0k}^c U_s \quad \text{или} \quad J_{0k}^c = U_s J_{0k} U_s^\dagger. \quad (5.6)$$

Из (5.5), используя явные выражения для  $H^c$  и  $H_s$  (см. (3.2), (5.1)), получаем

$$f_{s_3} = E (a_{s_3}^2 - b_{s_3}^2), \quad (5.7)$$

$$g_{s_3} = 2E a_{s_3} b_{s_3}, \quad -s \leq s_3 \leq s. \quad (5.8)$$

Используя явный вид операторов  $J_{0k}$ ,  $J_{0k}^c$  (см. (2.1), (5.1)) и соотношение (5.6), получаем

$$[[U_s, x_k]_- U_s^\dagger, H^c]_+ = 2\sigma_3 \frac{S_{kr} p_r}{E + m}. \quad (5.9)$$

С другой стороны, учитывая (5.3), (5.4), находим

$$[[U_s, x_k]_- U_s^\dagger, H^c]_+ = 2\sigma_3 E \sum_{s_3, s_3''=-s}^s (a_{s_3'} a_{s_3} + b_{s_3'} b_{s_3}) [\Lambda_{s_3}, x_k]_- \Lambda_{s_3'}. \quad (5.10)$$

Из (5.9) и (5.10) с учетом формул (Д.1), (Д.2) следуют такие соотношения:

$$\sum_{s_3=-s}^s (a_{s_3} a_s + b_{s_3} b_s) d_{s_3 s} = \frac{E - m}{E}, \quad (5.11)$$

$$\sum_{s_3=-s}^s (a_{s_3} a_{-s} + b_{s_3} b_{-s}) d_{s_3 -s} = \frac{m - E}{E}, \quad (5.12)$$

$$\sum_{s_3=-s}^s (a_{s_3} a_{s_3'} + b_{s_3} b_{s_3'}) d_{s_3 s_3'} = \frac{m - E}{E}, \quad -s + 1 \leq s_3' \leq s. \quad (5.13)$$

Используя численные значения коэффициентов  $d_{s_3 s_3'}$  (см. (Д.3)), приводим соотношения (5.11), (5.12) к виду

$$a_{\pm s} a_{\pm(s-1)} + b_{\pm s} b_{\pm(s-1)} = m/E. \quad (5.14)$$

Записывая (5.13) для  $s_3' = s - 1, s - 2, s - 3$ , и т.д. и используя при этом формулы типа (5.14) для  $s_3 = s, s - 1, s - 2$ , и т.д., мы по индукции доказываем следующие соотношения (см. доказательство формулы (3.13)):

$$a_{s_3} a_{s_3-1} + b_{s_3} b_{s_3-1} = m/E, \quad -s + 1 \leq s_3 \leq s. \quad (5.15)$$

Из совместности соотношений (5.4) и (5.15) следуют такие рекуррентные формулы:

$$a_{s_3} = \frac{m}{E} a_{s_3-1} + \frac{p}{E} b_{s_3-1}, \quad b_{s_3} = \frac{m}{E} b_{s_3-1} - \frac{p}{E} a_{s_3-1}, \quad -s + 1 \leq s_3 \leq s; \quad (5.16)$$

$$a_{s_3} = \frac{m}{E} a_{s_3-1} - \frac{p}{E} b_{s_3-1}, \quad b_{s_3} = \frac{m}{E} b_{s_3-1} + \frac{p}{E} a_{s_3-1}, \quad -s + 1 \leq s_3 \leq s. \quad (5.17)$$

Формулы (5.4), (5.16), (5.17) определяют все возможные функции  $a_{s_3}$ ,  $b_{s_3}$ , если известна хотя бы одна функция из набора  $a_{s_3}$ ,  $-s \leq s_3 \leq s$  (или  $b_{s_3}$ ). Выбирать эту функцию  $a_{s_3}$  (или  $b_{s_3}$ ), например, для  $s_3 = 0, 1/2$ , необходимо так, чтобы выполнялись соотношения (3.3)–(3.6), (5.7), (5.8), (5.16), (5.17).

Таким образом, формулы (5.4), (5.7), (5.8), (5.16), (5.17) совместно с условиями (3.3)–(3.5), взятыми для какого-либо одного  $|s_3|$ , дают решение нашей задачи, т.е. с помощью этих формул описаны все унитарные операторы  $U_s$  (см. (5.3)), переводящие алгебру (5.1) в (2.1).

Выбирая, например, исходные функции  $a_{s_3}$ ,  $b_{s_3}$  в виде

$$a_{1/2} = a_{-1/2} = \frac{E + m}{\sqrt{2E(E + m)}}, \quad b_{1/2} = -b_{-1/2} = \frac{p}{\sqrt{2E(E + m)}}$$

для полуцелых  $s$ , и  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$  для целых  $s$ , по формулам (5.16), (5.17) находим такие операторы  $U_s$ :

$$U_s = \frac{E + \sigma_3 H_s}{\sqrt{2E(E + m)}} \quad \text{для полуцелых } s, \tag{5.18}$$

$$U_s = 1 + \frac{m - E}{E} \sum_{n=0}^N B_{2n+1} + i\sigma_2 \frac{p}{E} \sum_{n=0}^N C_{2n+1} \quad \text{для целых } s, \tag{5.19}$$

где число  $N$  определено в (4.5).

Оператор (5.18) переводит  $H^c$  в оператор (4.1). Оператор (5.19) переводит  $H^c$  в оператор (4.4). Для  $s = 1/2$  оператор (5.18) совпадает с оператором Фолди–Воутхойзена.

Ради полноты изложения отметим, что если задан оператор  $H_s$  в представлении (2.1) (а значит, заданы все  $f_{s_3}$ ,  $g_{s_3}$ ), то коэффициентные функции  $a_{s_3}$ ,  $b_{s_3}$  определяются через  $f_{s_3}$ ,  $g_{s_3}$  с помощью формул (5.8) и (5.20), т.е.

$$a_{s_3} = \pm \sqrt{\frac{E + f_{s_3}}{2E}}, \quad b_{s_3} = \sqrt{\frac{E - f_{s_3}}{2E}}, \quad -s \leq s_3 \leq s. \tag{5.20}$$

Формулы (5.20) являются решениями системы (5.4) и (5.7).

Для того чтобы унитарный оператор  $U_s$  (см. (5.3)) с коэффициентными функциями (5.20), удовлетворяющими (5.7), (5.8), переводил алгебру (2.1) в (5.1), необходимо еще, чтобы  $a_{s_3}$ ,  $b_{s_3}$  удовлетворяли (5.15) (а следовательно, и (5.16), (5.17)).

**2.** Операторы координаты  $X_k$ , скорости  $\dot{X}_k$ , спина  $\Sigma_{kl}$ , знака энергии  $\hat{\epsilon}$  в представлении (2.1) имеют следующий вид:

$$X_k = x_k + \frac{S_{kr} p_r}{E(E + m)} + \sigma_2 \left\{ -i \frac{S_{kr} p_r}{p^2} \sum_{s'_3 = -s+1}^{s-1} \Lambda_{s'_3} \sum_{s_3 = -s}^s (a_{s_3} b_{s'_3} - a_{s'_3} b_{s_3}) a_{s_3 s'_3} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left. \sum_{s'_3, s_3 = -s}^s \left( \frac{S_{nl}}{p} - \frac{p_k}{p^2} s'_3 \right) (a_{s_3} b_{s'_3} - a_{s'_3} b_{s_3}) d_{s_3 s'_3} \Lambda_{s'_3} \right\} - \\
& - \sigma_2 \frac{p_k}{p} \sum_{s_3 = -s}^s \left( a_{s_3} \frac{\partial b_{s_3}}{\partial p} - \frac{\partial a_{s_3}}{\partial p} b_{s_3} \right) \Lambda_{s_3}, \quad k, n, l - \text{цикл } (1, 2, 3); \\
\Sigma_{kn} & = S_{kn} + \frac{pplS_p - S_{kn}p^2}{E(E+m)} + \sigma_2 \frac{S_{lr}pr}{p} \sum_{s'_3 = -s}^s \Lambda_{s'_3} \sum_{s_3 = -s}^s d_{s_3 s'_3} (a_{s_3} b_{s'_3} - b_{s_3} a_{s'_3}) - \\
& - i\sigma_2 \sum_{s'_3 = -s+1}^{s-1} \Lambda_{s'_3} \left( \frac{pl}{p} s'_3 - S_{kn} \right) \sum_{s_3 = -s}^s a_{s_3 s'_3} (a_{s_3} b_{s'_3} - a_{s'_3} b_{s_3}), \\
\dot{X}_k & = \frac{p_k H_s}{E^2}, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{H_s}{E},
\end{aligned}$$

где  $a_{s_3 s'_3}$ ,  $d_{s_3 s'_3}$  даны в (Д.3), а  $a_{s_3}$ ,  $b_{s_3}$  определяются вышеописанным методом. Для операторов  $U_s$  в (5.18), (5.19) операторы  $X_k$ ,  $\Sigma_{kn}$  имеют вид

$$\begin{aligned}
X_k & = x_k + \frac{S_{kr}pr}{E(E+m)} - \frac{S_{kr}prE - imp_k(\sigma_3 H_s - m)}{p^2 E^2}, \\
\Sigma_{kn} & = \frac{m}{E} S_{kn} + \frac{pplS_p}{E(E+m)} + \frac{1}{E} \left( S_{kn} - \frac{pl}{p} S_p \right) (\sigma_3 H_s - m),
\end{aligned}$$

$k, n, l$  — цикл (1, 2, 3),  $s$  — полуцелое;

$$\begin{aligned}
X_k & = x_k + \frac{S_{kr}pr}{E(E+m)} + i\sigma_2 \frac{S_{kr}pr}{pE} \sum_{s_3 > 0}^{s-1} (-1)^{s_3} C_{s_3} - \sigma_2 \frac{S_{nl}}{E} B_0 - \\
& - \sigma_2 \frac{mp_k}{E^2 p} \sum_{n=0}^N C_{2n+1} + i\sigma_2 (-1)^s \frac{S_{kr}pr}{Ep} B_s, \\
\Sigma_{kn} & = \frac{m}{E} S_{kn} + \frac{pplS_p}{E(E+m)} - \sigma_2 \frac{S_{lr}pr}{E} B_0 + \sigma_2 (-1)^s \frac{S_{lr}pr}{E} B_s - \\
& - i\sigma_2 \frac{p}{E} \left( S_{kn} - \frac{pl}{p} S_p \right) \sum_{s_3 > 0}^{s-1} (-1)^{s_3} C_{s_3},
\end{aligned}$$

$k, n, l$  — цикл (1, 2, 3),  $s$  — целое.

Операторы  $X_k$ ,  $\dot{X}_k$ ,  $\Sigma_{kn}$ ,  $\hat{\varepsilon}$  для спина  $s = 1/2$  совпадают с операторами, полученными в [6].

### Дополнение

В дополнении мы приводим без доказательства все те формулы, которые были использованы нами для получения результатов, приведенных в основном тексте.

$$[x_k, \Lambda_{s_3}]_- = \frac{S_{kr}pr}{p^2} \sum_{s'_3 = -s+1}^{s-1} a_{s_3 s'_3} \Lambda_{s'_3} + i \sum_{s'_3 = -s}^s \left( \frac{S_{nl}}{p} - \frac{p_k}{p^2} s'_3 \right) d_{s_3 s'_3} \Lambda_{s'_3}, \quad (\text{Д.1})$$

$$[S_{kn}, \Lambda_{s_3}]_- = \frac{iS_{lr}p_r}{p} \sum_{s'_3=-s}^s d_{s_3 s'_3} \Lambda_{s'_3} - \sum_{s'_3=-s+1}^{s-1} \left( S_{kn} - \frac{pl}{p} s'_3 \right) a_{s_3 s'_3} \Lambda_{s'_3}, \quad (\text{Д.2})$$

где  $a_{s'_3 s_3} \neq 0$ , если  $s'_3 = s_3, s_3 - 1, s_3 + 1$ ,

$$\begin{aligned} a_{s_3 s_3} &= -1, & a_{s_3-1 s_3} &= a_{s_3+1 s_3} = 1/2, & -s+1 \leq s_3 \leq s-1, \\ d_{s'_3 s_3} &\neq 0, & \text{если } s'_3 &= s_3 - 1, s_3 + 1, & -s+1 \leq s_3 \leq s-1, \\ d_{s_3+1 s_3} &= -d_{s_3-1 s_3} = 1/2, & -d_{s-1 s} &= -d_{-s-s} = d_{-s+1-s} = d_{ss} = 1. \end{aligned} \quad (\text{Д.3})$$

$$\left( \frac{S_{kr}p_r}{p^2} \pm i \frac{S_{nl}}{p} \mp i \frac{pk}{p^2} s_3 \right) \Lambda_{s_3} = 0, \quad k, n, l - \text{цикл}(1,2,3), \quad s_3 = \pm s, \quad (\text{Д.4})$$

$$[S_{nl}, \Lambda_{s_3}]_- = -[x_k p_l - x_l p_k, \Lambda_{s_3}]_-, \quad [S_{kr}p_r, \Lambda_{s_3}]_- = -p^2 [x_k, \Lambda_{s_3}]_-,$$

$$S_{kr}p_r S_k = -S_k S_{kr}p_r = ip S_p = ip \sum_{s_3=-s}^s s_3 \Lambda_{s_3},$$

$$S_{kr}p_r S_{kr'}p_{r'} = p^2 \sum_{s_3=-s}^s [s(s+1) - s_3^2] \Lambda_{s_3}, \quad S_k S_k = \mathbf{S}^s = s(s+1).$$

1. Weaver D.L., Hammer C.L., Good R.H., *Phys. Rev. B*, 1964, **135**, 241.
2. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1966, **143**, 987.
3. Williams S.A., Draayer J.P., Weber T.A., *Phys. Rev.*, 1966, **152**, 1207.
4. Широков Ю.М., *ДАН СССР*, 1954, **94**, 857; 1955, **99**, 737.
5. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
6. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
7. Jordan T.F., Mukunda N., *Phys., Rev.*, 1963, **132**, 1842.

# Об уравнениях движения, инвариантных относительно группы $P(1, n)$ . II

Л.П. СОКУР, В.И. ФУЩИЧ

Equations are deduced which generalize Dirac equation and are invariant relative to the rotations and translations in the  $(n + 1)$ -dimensional Minkowski space. The group-theoretical analysis of the equations obtained is carried out.  $P$ -,  $T$ - and  $C$ -properties of the equations are studied.

Выведены уравнения, являющиеся обобщением уравнения Дирака, которые инвариантны относительно вращений и трансляций в  $(n + 1)$ -мерном пространстве Минковского. Проведен теоретико-групповой анализ выведенных уравнений. Изучены  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -свойства этих уравнений.

## 1. Введение

Настоящая работа является продолжением и обобщением некоторых результатов, приведенных в [1] для групп  $P(1, 3)$  и  $P(1, 4)$ .

В [1] было отмечено, что уравнение Дирака с ненулевой массой ( $\varkappa = m$ )

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu p^\mu - \varkappa)\Psi(t, \mathbf{x}) &= 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3), \\ p_0 &= i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.1)$$

эквивалентно четырем уравнениям вида<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} p_\mu \Psi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{id}(S_{\mu\nu} p^\nu + \varkappa S_{\mu n+1})\Psi(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3), \quad n = 3, \quad d = 1/2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где матрицы

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad S_{\mu 4} = \frac{i}{2}\gamma_\mu, \quad S_{4\mu} = -\frac{i}{2}\gamma_\mu \quad (1.3)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы  $SO(1, 4)$

$$\begin{aligned} [S_{AB}, S_{CD}]_- &= i(g_{AD}S_{BC} + g_{BC}S_{AD} - g_{AC}S_{BD} - g_{BD}S_{AC}) \\ (A, B, \dots &= 0, 1, \dots, 4). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнение Дирака в форме (1.2) имеет по сравнению с формой (1.1) ряд преимуществ. Во-первых, все матрицы  $S_{\mu\nu}$ ,  $S_{\mu 4}$ , входящие в это уравнение, удовлетворяют не алгебре Клиффорда, как это имеет место в случае уравнения (1.1), а алгебре Ли группы  $SO(1, 4)$ . Это обстоятельство позволит показать, что уравнение (1.2) с матрицами  $S_{\mu\nu}$ ,  $S_{\mu 4}$  (соответствующей размерности) из алгебры  $SO(1, 4)$  при некотором выборе значения параметра  $d$  описывает свободное движение частицы и

Теоретическая и математическая физика, 1971, **6**, № 3, С. 348–363.

<sup>1</sup>Все обозначения, приведенные без объяснений, те же, что и в [1].

античастицы с произвольным спином  $s$ . Во-вторых, уравнение (1.2) сравнительно легко обобщается на группы более широкие, чем группа  $P(1, 3)$ . Действительно, если в уравнении (1.2) индекс  $\mu$  пробегает значения  $0, 1, \dots, n$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а матрицы принадлежат алгебре  $SO(1, n + 1)$  (или  $SO(2, n)$ ), то такое уравнение, как будет показано ниже, инвариантно относительно группы  $P(1, n)$  — группы вращений и трансляций в  $(1 + n)$ -мерном пространстве Минковского.

Все неприводимые представления группы  $P(1, n)$  (обобщенная группа Пуанкаре) могут быть построены и изучены методом Вигнера (см., например, [2, 1]).

Уравнение вида (1.2) в том случае, когда  $\varkappa = 0$ , рассматривалось в [3] для группы  $P(1, 3)$  и в [4] для группы  $P(1, 4)$ .

В данной работе будут выведены уравнения, инвариантные относительно группы  $P(1, n)$ . Проведен их теоретико-групповой анализ и изучены свойства этих уравнений относительно пространственно-временных отражений. Полученные уравнения являются обобщением уравнений (1.2).

## 2. Вывод уравнений

Пусть на некотором множестве  $M \equiv \{\Psi(t, \mathbf{x})\}$ , состоящем из функций  $\Psi(t, \mathbf{x})$ , которое всюду плотно в каком-то гильбертовом пространстве, задано следующее представление алгебры Ли групп  $P(1, n)$ :

$$P^\mu = p^\mu = i \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n, \quad t \equiv x_0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu},$$

где  $S_{\mu\nu}$  — базисные элементы некоторого приводимого представления<sup>2</sup> алгебры Ли группы  $SO(1, n)$ . Поскольку на  $M$  реализуется не только представление алгебры  $P(1, n)$ , но и представление матричной алгебры  $SO(1, n)$ , то в  $M$  можно так выбрать систему базисных векторов  $\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$ , что  $\alpha$ -мультииндексы, нумерующие компоненты волновой функции  $\Psi(t, \mathbf{x})$ , являются схемами Гельфанда–Цетлина ( $\Gamma$ -Ц) [5]. Линейную оболочку, порожденную базисными векторами  $\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})$ , обозначим через  $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$ .

Рассмотрим систему уравнений

$$p_\mu \Psi(t, \mathbf{x}) = (L_{\mu\nu} p^\nu + \varkappa L_\mu) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad P_\mu \equiv L_{\mu\nu} p^\nu + \varkappa L_\mu, \quad (2.2)$$

где  $L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu}$ ,  $L_\mu$  — некоторые матрицы, размерность которых определяет компонентность волновой функции  $\Psi(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$ . Будем требовать, чтобы всякое решение уравнения (2.2) было решением  $(1 + n)$ -мерного уравнения Клейна–Гордона

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \Psi(t, \mathbf{x}) = \varkappa^2 \Psi(t, \mathbf{x}). \quad (2.3)$$

Это требование приводит к уравнению

$$L_\mu p^\mu \Psi(t, \mathbf{x}) = \varkappa \Psi(t, \mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.2), (2.4) будет инвариантной относительно преобразований из группы  $P(1, n)$ , если выполняются следующие коммутационные соотношения:

$$[P_\mu, J_{\sigma\rho}]_- = i(g_{\mu\sigma} p_\rho - g_{\mu\rho} p_\sigma), \quad (2.5a)$$

<sup>2</sup>Мы уточним это представление ниже после вывода уравнений движения.

$$[L_\mu, J_{\sigma\rho}]_- = i(g_{\mu\sigma}L_\rho - g_{\mu\rho}L_\sigma), \quad (2.5б)$$

$$[P_\mu, P_\nu]_- = 0. \quad (2.5в)$$

Из (2.5а), (2.5б) следует, что матрицы  $L_{\mu\nu}$  должны удовлетворять соотношениям

$$[S_{\sigma\rho}, L_{\mu\nu}]_- = i(g_{\sigma\nu}L_{\rho\mu} + g_{\rho\mu}L_{\sigma\nu} - g_{\sigma\mu}L_{\rho\nu} - g_{\rho\nu}L_{\sigma\mu}). \quad (2.6)$$

Поскольку матрицы  $L_{\mu\nu}$  антисимметричны и удовлетворяют (2.6), то на линейной оболочке  $\mathcal{L}\{L_{\mu\nu}\}$ , порождаемой матрицами  $L_{\mu\nu}$ , реализуется представление группы  $SO(1, n)$ , которое изоморфно присоединенному представлению. Отсюда можно заключить, что с точностью до постоянного множителя матрицы  $L_{\mu\nu}$  совпадают с матрицами  $S_{\mu\nu}$ , т.е.

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{id}S_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Условие (2.5б) будет выполняться, если матрицы  $L_\mu$  удовлетворяют соотношениям

$$[L_\mu, L_\nu]_- = \frac{1}{d}L_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Учитывая (2.6), (2.7), (2.8) и обозначая матрицу

$$L_\mu \equiv \frac{1}{d}S_{\mu n+1}, \quad (2.9)$$

приходим к выводу, что матрицы  $S_{AB} = (S_{\mu\nu}, S_{\mu n+1})$  ( $A, B = 0, 1, \dots, n+1$ ) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли  $SO(2, n)$ , т.е. соотношениям (1.4) с метрическим тензором

$$g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{nn} = g_{n+1 n+1} = 1.$$

Итак, уравнения (2.2), (2.4) принимают вид

$$\begin{aligned} p_\mu \Psi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{id}(S_{\mu\nu}p^\nu + i\kappa S_{\mu n+1})\Psi(t, \mathbf{x}), \\ \kappa \Psi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{d}S_{\mu n+1}p^\mu \Psi(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $\Psi(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$  — пространство, в котором реализуется конечномерное (неунитарное) представление группы  $SO(2, n)$ , точнее, в  $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$  должна реализоваться такая прямая сумма матричных представлений группы  $SO(1, n)$ , чтобы на ней могло быть реализовано некоторое приводимое или неприводимое представление группы  $SO(2, n)$ .

Систему уравнений (2.10) можно рассматривать как условия, которые сужают пространство  $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$  к некоторому  $P(1, n)$ -инвариантному подпространству  $\mathcal{L}\{\Psi_\beta(t, \mathbf{x})\} \subset \mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$ , где  $\{\Psi_\beta(t, \mathbf{x})\}$  — подсистема базисных векторов в  $\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$ .

Поскольку на  $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$  реализуется неунитарное представление группы  $SO(2, n)$ , то это значит, что часть матриц  $S_{AB}$  будет эрмитовой, а часть анти-эрмитовой. Удобно выбрать

$$\begin{aligned} S_{kl}^+ &= S_{kl}, & S_{0k}^+ &= -S_{0k}, & S_{0_{n+1}}^+ &= S_{0_{n+1}}, & S_{k_{n+1}}^+ &= -S_{k_{n+1}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$(k, l = 1, 2, \dots, n).$

Из требований эрмитовости гамильтониана  $H = \mathcal{P}_0$  вытекает, что  $d = d^*$ .

Таким образом, система уравнений (2.10) инвариантна относительно группы  $P(1, n)$ , и на ее решениях инвариант

$$P_\mu P^\mu \Psi(t, \mathbf{x}) = \varkappa^2 \Psi(t, \mathbf{x}). \quad (2.12)$$

### 3. Теоретико-групповой анализ уравнений (2.10)

В этом разделе ради простоты будет проведен теоретико-групповой анализ уравнений (2.10), инвариантных только относительно групп  $P(1, 3)$  и  $P(1, 4)$ , т.е. будет показано, что при определенном выборе параметра  $d$  и матриц  $S_{AB}$  на множестве решений уравнений (2.10) реализуется прямая сумма двух неприводимых представлений этих групп. Аналогичное утверждение справедливо и для уравнений, инвариантных относительно произвольной группы  $P(1, n)$ .

1. Уравнения (2.10), инвариантные относительно группы Пуанкаре, имеют вид

$$\begin{aligned} p_\mu \Psi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{id} (S_{\mu\nu} p^\nu + i\varkappa S_{\mu 4}) \Psi(t, \mathbf{x}), & \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3), \\ \varkappa \Psi(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{d} S_{\mu 4} p^\mu \Psi(t, \mathbf{x}), & \varkappa &= m. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Докажем следующее

**Утверждение 1.** Если матрицы  $S_{AB}$  ( $AB = 0, \dots, 4$ ) в уравнениях (3.1) реализуют неприводимое представление алгебры  $SO(2, 3)$ , задаваемое числами Г-Ц  $(\mu_0, \mu_1)$ , и  $d = \mu_0$ , на множестве решений уравнений (3.1) реализуется прямая сумма

$$D^+(\varkappa; s = \mu_1) \oplus D^-(\varkappa; s = \mu_1) \quad (3.2)$$

неприводимых представлений группы  $P(1, 3)$ .

Прежде чем приступить к доказательству этого утверждения, заметим, что между конечномерными представлениями алгебр  $SO(2, 3)$  и  $SO(5)$  существует взаимно-однозначное соответствие, которое можно задать следующим способом:

$$\Sigma_{12} = S_{04}, \quad \Sigma_{1k+2} = \frac{1}{i} S_{0k}, \quad \Sigma_{k+2l+2} = S_{kl}, \quad \Sigma_{2k+2} = \frac{1}{i} S_{4k}, \quad (3.3)$$

где  $\Sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 5$ ) — базисные элементы алгебры  $SO(5)$ , заданные в том же самом пространстве, что и операторы  $S_{AB}$ .

Выберем в  $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$  базис Г-Ц. При этом индекс  $\alpha$  задается схемой

$$\alpha = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ m_{04} & m_{14} \\ m_{03} & \\ m_{02} & \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

(по сравнению с [5] в (3.4) сделаны некоторые удобные для нас переобозначения).

Все числа  $\mu = (\mu_0, \mu_1)$  и  $m = (m_{02}, m_{03}, m_{04}, m_{14})$  одновременно целые или полуцелые и удовлетворяют неравенствам

$$\mu_0 \geq m_{04} \geq \mu_1 \geq |m_{14}| \geq 0, \quad m_{04} \geq m_{03} \geq |m_{14}|, \quad m_{03} \geq |m_{02}|. \quad (3.5)$$

В базисе  $\Gamma$ - $\Pi$  матрицы  $\Sigma_{ij}$  (а значит, и матрицы  $S_{AB}$ ) известны и задаются формулами [5]

$$\Sigma_{12}\Psi_\alpha = m_{02}\Psi_\alpha, \quad (3.6)$$

$$\Sigma_{23}\Psi_\alpha = \pm \frac{1}{2i} \left\{ [(m_{03} - m_{02})(m_{03} + m_{02} + 1)]^{1/2} \Psi_{\alpha(m_{02} \rightarrow m_{02}+1)} - [(m_{03} - m_{02} + 1)(m_{03} + m_{02})]^{1/2} \Psi_{\alpha(m_{02} \rightarrow m_{02}-1)} \right\}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{34}\Psi_\alpha = \pm \left\{ \left[ \frac{(m_{03} + m_{02} + 1)(m_{03} - m_{02} + 1)(m_{04} + m_{03} + 2)}{(2m_{03} + 1)(2m_{03} + 3)} \times \right. \right. \\ \times \left. \frac{(m_{04} - m_{03})(m_{03} - m_{14} + 1)(m_{03} + m_{04} + 1)}{(m_{03} + 1)^2} \right]^{1/2} \Psi_{\alpha(m_{03} \rightarrow m_{03}+1)} - \\ \left. - \left[ \frac{(m_{03} + m_{02})(m_{03} - m_{02})(m_{04} + m_{03} + 1)(m_{04} - m_{03} + 1)}{(2m_{03} - 1)(2m_{03} - 1)} \times \right. \right. \\ \left. \times \frac{(m_{03} - m_{14})(m_{03} + m_{14})}{m_{03}^2} \right]^{1/2} \Psi_{\alpha(m_{03} \rightarrow m_{03}-1)} \right\} + m_{14} \frac{m_{02}(m_{04} + 1)}{m_{03}(m_{03} + 1)} \Psi_\alpha. \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{45}\Psi_\alpha = \pm \frac{1}{2i} \left\{ \left[ \frac{(m_{03} - m_{04} - 1)(m_{03} + m_{04} + 2)(\mu_1 - m_{04} - 1)}{(m_{04} + m_{14} + 1)(m_{04} + m_{14} + 2)} \times \right. \right. \\ \times \left. \frac{(\mu_1 + m_{04} + 2)(\mu_0 - m_{04})(\mu_0 + m_{04} + 3)}{(m_{14} - m_{04} - 2)(m_{14} - m_{04} - 1)} \right]^{1/2} \Psi_{\alpha(m_{04} \rightarrow m_{04}+1)} + \\ \left. + \left[ \frac{(m_{03} - m_{14})(m_{14} + m_{03} + 1)(\mu_1 - m_{14})}{(m_{04} + m_{14} + 1)(m_{04} + m_{14} + 2)} \times \right. \right. \\ \times \left. \frac{(\mu_1 + m_{14} + 1)(\mu_0 - m_{14} + 1)(\mu_0 + m_{14} + 2)}{(m_{04} - m_{14})(m_{04} + m_{14} + 1)} \right]^{1/2} \Psi_{\alpha(m_{14} \rightarrow m_{14}+1)} - \\ \left. - \left[ \frac{(m_{03} - m_{04})(m_{03} + m_{04} + 1)(\mu_1 - m_{04})(\mu_1 + m_{04} + 1)}{(m_{04} + m_{14})(m_{04} + m_{14} + 1)(m_{14} - m_{04} - 1)} \times \right. \right. \\ \times \left. \frac{(\mu_0 - m_{04} + 1)(\mu_0 + m_{04} + 2)}{(m_{14} - m_{04})} \right]^{1/2} \Psi_{\alpha(m_{04} \rightarrow m_{04}-1)} - \\ \left. - \left[ \frac{(m_{03} - m_{14} + 1)(m_{14} + m_{03})(\mu_1 - m_{14} + 1)(\mu_1 + m_{14})}{(m_{04} + m_{14})(m_{04} + m_{14} + 1)(m_{04} - m_{14} + 1)} \times \right. \right. \\ \left. \times \frac{(\mu_0 - m_{14} + 2)(\mu_0 + m_{14} + 1)}{(m_{04} - m_{14} + 2)} \right]^{1/2} \Psi_{\alpha(m_{14} \rightarrow m_{14}-1)} \right\}, \quad (3.9) \end{aligned}$$

где стрелки  $\rightarrow$  обозначают соответствующую замену в схемах  $\alpha$  (3.4).

Остальные генераторы  $\Sigma_{ij}$  могут быть получены из коммутационных соотношений алгебры  $SO(5)$ .

Перейдем теперь к доказательству утверждения 1.

**Доказательство.** Сначала докажем, что в “системе покоя” ( $p_0 \neq 0$ ,  $p_k = 0$ ) на множестве решений  $\mathcal{L}\{\Psi_\beta^0\}$  уравнений (3.1) (с  $d = \mu_0$ ) реализуется прямая сумма

$$D(\mu_1) \oplus D(\mu_1) \quad (3.10)$$

двух неприводимых представлений группы  $SO(3)$ .

В этой системе при  $d = \mu_0$  уравнения (3.1) сводятся к двум независимым уравнениям<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} p_0 \Psi^0 &= \frac{\varkappa}{\mu_0} S_{04} \Psi^0, \\ \varkappa \Psi^0 &= \frac{1}{\mu_0} S_{04} p^0 \Psi^0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $\Psi^0$  — волновая функция частицы в системе покоя.

Уравнения (3.11) эквивалентны двум матричным условиям

$$S_{04} \Psi^0 = \mu_0 \Psi^0, \quad (3.12a)$$

$$S_{04} \Psi^0 = -\mu_0 \Psi^0, \quad (3.12b)$$

Условия (3.12a) и (3.12b) сужают множество  $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha^0\}$ , на котором реализуется неприводимое представление группы  $SO(2, 3)$ , к двум непересекающимся подмножествам, которые мы обозначим как  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta+}^0\}$  и  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta-}^0\}$ , соответственно, где  $\Psi_{\beta+}^0$  и  $\Psi_{\beta-}^0$  — базисные элементы этих подмножеств.

Чтобы описать эти подмножества, воспользуемся соответствием (3.3) и перепишем (3.12) так:

$$\Sigma_{12} \Psi_{\beta+}^0 = \mu_0 \Psi_{\beta+}^0, \quad (3.13a)$$

$$\Sigma_{12} \Psi_{\beta-}^0 = -\mu_0 \Psi_{\beta-}^0 \quad (3.13b)$$

(условия (3.13) для удобства записаны как условия для базисных элементов).

Используя явный вид (3.6) генератора  $\Sigma_{12}$  и неравенства (3.5), приходим к заключению, что базисные элементы  $\Psi_{\beta+}^0 \in \{\Psi_\alpha^0\}$  и  $\Psi_{\beta-}^0 \in \{\Psi_\alpha^0\}$  удовлетворяют условиям (3.13a) и (3.13b) лишь в том случае, если их индексы имеют вид

$$\beta^+ = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_0 & m_{14} \\ \mu_0 & \\ \mu_0 & \end{vmatrix}, \quad \mu_1 \geq |m_{14}|; \quad (3.14a)$$

$$\beta^- = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 \\ \mu_0 & m_{14} \\ \mu_0 & \\ -\mu_0 & \end{vmatrix}, \quad \mu_1 \geq |m_{14}|. \quad (3.14b)$$

<sup>3</sup>Зависимость волновой функции  $\Psi$  от переменных  $t, \mathbf{x}$  не будем далее указывать, поскольку в этом разделе нас интересует только матричная структура уравнений (2.10).

Другими словами, условия сужения (3.13) эквивалентны условиям

$$m_{02} = m_{03} = m_{04} = \mu_0 \quad (3.15a)$$

и

$$-m_{02} = m_{03} = m_{04} = \mu_0, \quad (3.15б)$$

которые сужают множество индексов  $\{\alpha\}$  к двум подмножествам

$$\{\beta^+\} \subset \{\alpha\} \quad \text{и} \quad \{\beta^-\} \subset \{\alpha\}; \quad \{\beta^+\} \cap \{\beta^-\} = \{0\}.$$

Из неравенств (3.14a) и (3.14б) следует, что размерности пространств  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^+}^0\}$  и  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}^0\}$  совпадают с размерностью неприводимых представлений группы  $SO(3)$ . Тот факт, что на этих множествах реализуются неприводимые представления группы  $SO(3)$ , следует из явных выражений для операторов  $\Sigma'_{ij}$  и  $\Sigma''_{ij}$ , которые действуют в пространствах  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^+}^0\}$  и  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}^0\}$ , соответственно, и которые получаются из выражений (3.8) и (3.9) с учетом условий (3.15a) и (3.15б) (операторы  $\Sigma_{23}$  и  $\Sigma_{12}$  исключаем из рассмотрения, поскольку область значений оператора  $\Sigma_{23}$  не принадлежит пространствам  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^+}^0\}$  и  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}^0\}$ , а оператор  $\Sigma_{12}$  является константой в этих пространствах). Операторы  $\Sigma'_{ij}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \Sigma'_{34} \Psi_{\beta^+}^0 &= m_{14} \Psi_{\beta^+}^0, \\ \Sigma'_{45} \Psi_{\beta^+}^0 &= \pm \frac{1}{2i} \left\{ [(\mu_1 - m_{14})(\mu_1 + m_{14} + 1)]^{1/2} \Psi_{\beta^+(m_{14} \rightarrow m_{14}+1)}^0 - \right. \\ &\quad \left. - [(\mu_1 - m_{14} + 1)(\mu_1 + m_{14})]^{1/2} \Psi_{\beta^+(m_{14} \rightarrow m_{14}-1)}^0 \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отсюда мы видим, что в  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^+}^0\}$  реализуется неприводимое представление  $D(\mu_1)$  алгебры  $SO(3)$ .

Аналогично показывается, что то же самое представление алгебры  $SO(3)$  реализуется и в  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}^0\}$ . Для этого нужно заметить лишь, что отображение  $\Psi_{\beta^-}^0 \rightarrow \Psi_{\beta^-}^{0'} = \Psi_{\beta^-(m_{14} \rightarrow -m_{14})}^0$  является внутренним для пространства  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}^0\}$ . При таком отображении операторы  $\Sigma''_{ij}$  представляются в виде (3.16).

Итак, мы показали, что на множестве решений уравнений (3.11) действительно реализуется прямая сумма (3.10).

Для завершения доказательства осталось показать, что на  $\Psi_+^0 \in \mathcal{L}\{\Psi_{\beta^+}^0\}$  и  $\Psi_-^0 \in \mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}^0\}$  оператор знака энергии  $\hat{\varepsilon} = \mathcal{P}_0/|\mathcal{P}_0|$  имеет собственные значения  $(+1)$  и  $(-1)$ . В силу (3.11) имеем

$$p_0 \Psi_+^0 = \varkappa \Psi_+^0, \quad p_0 \Psi_-^0 = -\varkappa \Psi_-^0, \quad (3.17)$$

откуда и следует, что

$$\hat{\varepsilon} \Psi_{\pm}^0 = \pm \Psi_{\pm}^0.$$

При переходе от системы покоя к произвольной системе отсчета множества  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^+}^0\}$  и  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}^0\}$  перейдут в некоторые другие множества  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^+}\}$  и  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}\}$ , на которых также реализуется прямая сумма (3.10). Кроме того, поскольку  $\hat{\varepsilon}$  является инвариантом группы  $P(1, 3)$ , то собственные значения этого инварианта не изменяются. Таким образом, мы доказали утверждение 1.

2. Уравнения (2.10), инвариантные относительно группы  $P(1, 4)$ , имеют вид

$$p_\mu \Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{id} (S_{\mu\nu} p^\nu + i\kappa S_{\mu 5}) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_4),$$

$$\kappa \Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{d} S_{\mu 5} p^\mu \Psi(t, \mathbf{x}), \quad (\mu = 0, 1, \dots, 4). \quad (3.18)$$

Для уравнений (3.18) справедливо следующее

**Утверждение 2.** Если матрицы  $S_{AB}$  ( $A, B = 0, 1, \dots, 4$ ) в уравнениях (3.18) реализуют неприводимое конечномерное представление алгебры  $SO(2, 4)$ , задаваемое числами  $(\mu_0, \mu_1, \mu_2)$ , и  $d = \mu_0$ , то на его решениях реализуется прямая сумма

$$D^+(\kappa; s, \tau) \oplus D^-(\kappa; \tau, s), \quad s \equiv \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2), \quad \tau \equiv \frac{1}{2}(\mu_1 - \mu_2), \quad (3.19)$$

неприводимых представлений группы  $P(1, 4)$ .

**Доказательство.** Способ доказательства утверждения 2 тот же самый, что и утверждения 1, поэтому мы здесь отметим лишь те новые элементы, которые возникают в этом случае.

Соответствие между базисными элементами  $\Sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) алгебры  $SO(6)$  и базисными элементами  $S_{AB}$  алгебры  $SO(2, 4)$  задается соотношениями

$$\Sigma_{12} = S_{05}, \quad \Sigma_{1k+2} = \frac{1}{i} S_{0k}, \quad \Sigma_{2k+2} = \frac{1}{i} S_{5k}, \quad \Sigma_{k+2l+2} = S_{kl},$$

$$(k, l = 1, 2, 3, 4). \quad (3.20)$$

Схемы Г–Ц в этом случае имеют вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ m_{05} & m_{15} \\ m_{04} & m_{14} \\ m_{03} \\ m_{02} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_0 &\geq m_{05} \geq \mu_1 \geq m_{15} \geq |\mu_2| \geq 0, \\ m_{05} &\geq m_{04} \geq m_{15} \geq |m_{14}|, \\ m_{04} &\geq m_{03} \geq |m_{14}|, \\ m_{03} &\geq |m_{02}|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Операторы  $\Sigma_{12}$ ,  $\Sigma_{23}$ ,  $\Sigma_{34}$ ,  $\Sigma_{45}$  задаются формулами (3.6)–(3.9), где числа  $\mu_0$  и  $\mu_1$  заменены числами  $m_{05}$  и  $m_{15}$ . Явный вид формулы  $\Sigma_{56}$  мы не будем выписывать из-за ее громоздкости (она может быть получена по общей формуле [5]).

Повторяя рассуждения п. 1, приходим к следующим условиям сужения:

$$\Sigma_{12} \Psi_{\beta^+}^0 = \mu_0 \Psi_{\beta^+}^0, \quad (3.22a)$$

$$\Sigma_{12} \Psi_{\beta^-}^0 = -\mu_0 \Psi_{\beta^-}^0. \quad (3.22б)$$

Из (3.22a) и (3.22б) с учетом неравенств (3.21) и явного вида оператора  $\Sigma_{12}$  получаем, что индексы  $\beta^+$  и  $\beta^-$  представляются схемами

$$\beta^+ = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_0 & m_{15} \\ \mu_0 & m_{14} \\ \mu_0 \\ \mu_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &\geq m_{15} \geq |\mu_2|, \\ m_{15} &\geq |m_{14}| \end{aligned} \quad (3.23a)$$

и

$$\beta^- = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_0 & m_{15} \\ \mu_0 & m_{14} \\ \mu_0 \\ -\mu_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \mu_1 &\geq m_{15} \geq |\mu_2|, \\ m_{15} &\geq |m_{14}|. \end{aligned} \quad (3.236)$$

Неравенства (3.23а) и (3.23б) показывают, что размерности множеств  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^+}^0\}$  и  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}^0\}$  совпадают с размерностями неприводимых представлений группы  $SO(4)$ .

Путем несложных вычислений (точно так же, как и в случае группы  $P(1, 3)$ ) убеждаемся, что

- на множествах  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^+}^0\}$  и  $\mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}^0\}$  реализуются представления  $D(\mu_1, \mu_2)$  и  $D(\mu_1, -\mu_2)$  группы  $SO(4)$ ;
- если  $\Psi_+^0 \in \mathcal{L}\{\Psi_{\beta^+}^0\}$ , а  $\Psi_-^0 \in \mathcal{L}\{\Psi_{\beta^-}^0\}$ , то

$$\varepsilon\Psi_{\pm}^0 = \pm\Psi_{\pm}^0. \quad (3.24)$$

В силу  $P(1, 4)$ -инвариантности уравнений (3.18) получаем окончательно, что на множестве решений этих уравнений реализуется прямая сумма

$$D^+(\varkappa; \mu_1, \mu_2) \oplus D^-(\varkappa; \mu_1, -\mu_2) \quad (3.25)$$

неприводимых представлений группы  $P(1, 4)$ .

Для завершения доказательства утверждения 2 достаточно лишь указать (см., например, [1]), что числа  $(\mu_1, \mu_2)$  и числа  $(s, \tau)$ , характеризующие неприводимое представление группы  $SO(4)$ , связаны между собой соотношениями (3.19).

**Замечание 1.** Если в уравнениях (3.18) выбрать  $d = -\mu_0$ , то на множестве решений таких уравнений реализуется следующая прямая сумма неприводимых представлений группы  $P(1, 4)$ :

$$D^-(\varkappa; s, \tau) \oplus D^-(\varkappa; \tau, s).$$

**Замечание 2.** Уравнения (3.18) будут  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -инвариантными, как это будет показано в разделе 4, если матрицы  $S_{AB}$  имеют вид

$$S_{AB} = \begin{pmatrix} S_{AB}^{(1)} & 0 \\ 0 & S_{AB}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

где матрицы  $S_{AB}^{(1)}$  и  $S_{AB}^{(2)}$  реализуют неприводимые представления  $D(\mu_0, \mu_1, \mu_2)$  и  $D(\mu_0, \mu_1, -\mu_2)$  алгебры  $SO(2, 4)$ . В этом случае на решениях уравнения (3.18) реализуется представление

$$D^+(\varkappa; s, \tau) \oplus D^-(\varkappa; \tau, s) \oplus D^+(\varkappa; \tau, s) \oplus D^+(\varkappa; s, \tau). \quad (3.27)$$

Анализ уравнений (2.10) для произвольной группы  $P(1, n)$  может быть проведен точно так же, как и для групп  $P(1, 3)$  и  $P(1, 4)$ , т.е. можно показать, что *если*

матрицы  $S_{AB}$  реализуют неприводимое представление алгебры  $SO(2, n)$ , задаваемое числами  $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_l)$ , и  $d = \mu_0$ , то на множестве решений уравнений (2.10) реализуется представление

$$D^+(\varkappa; \mu_1, \dots, \mu_{l-1}, \mu_l) \oplus D^-(\varkappa; \mu_1, \dots, \mu_{l-1}, \mu_l) \quad \text{при } n = 2l + 1; \quad (3.28)$$

или

$$D^+(\varkappa; \mu_1, \dots, \mu_{l-1}, \mu_l) \oplus D^-(\varkappa; \mu_1, \dots, \mu_{l-1}, -\mu_l) \quad \text{при } n = 2l. \quad (3.29)$$

Мы не приводим здесь доказательства этого утверждения лишь потому, что формулы для операторов  $S_{AB}$  слишком громоздки.

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний об уравнениях, на решениях которых реализуется представление класса III группы  $P(1, n)$ . Если в уравнениях (2.10) провести замену  $\varkappa \rightarrow i\varkappa$ , то такие уравнения остаются инвариантными относительно группы  $P(1, n)$ , причем

$$P_\mu P^\mu \Psi(t, \mathbf{x}) = -\varkappa^2 \Psi(t, \mathbf{x}). \quad (3.30)$$

Операторы  $S_{AB}$ , как и раньше, реализуют некоторое конечномерное или бесконечномерное представление алгебры  $SO(2, n)$  (в зависимости от выбора параметра  $d$ ). Вводя в  $M$  базис  $\Gamma$ -Ц, мы можем снова определить операторы  $S_{AB}$  формулами  $\Gamma$ -Ц, как и в случае класса I (соответствие между операторами  $\Sigma_{ij}$  и  $S_{AB}$  удобно выбрать несколько иным). Однако теперь в зависимости от выбора параметра  $d$  операторы  $S_{AB}$  будут определены в той или иной области Граева. Можно так выбрать параметр  $d$  и представление для матриц  $S_{AB}$ , что уравнения (2.10) ( $c\varkappa \rightarrow i\varkappa$ ) сужают пространство  $\mathcal{L}\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\}$  к двум подпространствам, в которых реализуются неприводимые унитарные представления класса III группы  $P(1, n)$ . Детальный анализ уравнений (2.10) для этого класса будет проведен в другой работе.

#### 4. P-, T-, C-свойства уравнения (2.10)

В этом разделе изучим свойства уравнений (2.10) относительно пространственно-временных отражений. Через  $P_k^{(1)}$  обозначим оператор пространственной инверсии  $x_k$ -й компоненты вектора  $\mathbf{x}$ , определяемый соотношениями

$$P_k^{(1)} \Psi(t, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = r_k^{(1)} \Psi(t, x_1, \dots, -x_k, \dots, x_n), \quad (4.1)$$

$$\left[ P_k^{(1)}, p_\mu \right]_- = \left[ P_k^{(1)}, J_{\mu\nu} \right]_- = 0, \quad (\mu, \nu \neq k), \quad (4.2)$$

$$\left[ P_k^{(1)}, p_k \right]_+ = \left[ P_k^{(1)}, J_{k\mu} \right]_+ = 0, \quad \left( P_k^{(1)} \right)^2 \sim 1.$$

Кроме оператора  $P_k^{(1)}$ , можно ввести другой оператор пространственной инверсии  $P_k^{(2)}$ , определяемый соотношениями

$$P_k^{(2)} \Psi(t, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = r_k^{(2)} \Psi^*(t, x_1, \dots, -x_k, \dots, x_n), \quad (4.3)$$

$$\left[ P_k^{(2)}, p_\mu \right]_+ = \left[ P_k^{(2)}, J_{\mu\nu} \right]_+ = 0, \quad (\mu, \nu \neq k), \quad (4.4)$$

$$\left[ P_k^{(2)}, p_k \right]_- = \left[ P_k^{(2)}, J_{k\mu} \right]_- = 0, \quad \left( P_k^{(2)} \right)^2 \sim 1.$$

При инверсии времени ( $t \rightarrow -t$ ) волновая функция  $\Psi(t, \mathbf{x})$  также может преобразовываться двумя неэквивалентными способами:

$$T^{(1)}\Psi(t, \mathbf{x}) = r_0^{(1)}\Psi(-t, \mathbf{x}), \quad (4.5)$$

$$[T^{(1)}, p_0]_+ = [T^{(1)}, J_{0k}]_+ = 0, \quad (4.6)$$

$$[T^{(1)}, p_k]_- = [T^{(1)}, J_{kl}]_- = 0, \quad (T^{(1)})^2 \sim 1;$$

и

$$T^{(2)}\Psi(t, \mathbf{x}) = r_0^{(2)}\Psi^*(-t, \mathbf{x}), \quad (4.7)$$

$$[T^{(2)}, p_0]_- = [T^{(2)}, J_{0k}]_- = 0, \quad (4.8)$$

$$[T^{(2)}, p_k]_+ = [T^{(2)}, J_{kl}]_+ = 0, \quad (T^{(2)})^2 \sim 1.$$

Оператор зарядового сопряжения  $C$  эквивалентен произведению операторов  $P_k^{(1)}P_k^{(2)}$  или  $T^{(1)}T^{(2)}$ . Через  $R$  будем обозначать любой из операторов  $P_k^{(1)}$ ,  $P_k^{(2)}$ ,  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$ .

Уравнения (2.10) будут  $R$ -инвариантны, если существуют такие матрицы  $r_k^{(1)}$ ,  $r_k^{(2)}$ ,  $r_0^{(1)}$ ,  $r_0^{(2)}$ , что соотношения (4.2), (4.4), (4.6) и (4.8) удовлетворяются, если в них сделать замену

$$p_\mu \rightarrow \mathcal{P}_\mu = \frac{1}{id}(S_{\mu\nu}p^\nu + i\kappa S_{\mu n+1}). \quad (4.9)$$

**1.** Рассмотрим свойства уравнений (2.10) относительно  $P_k^{(1)}$ -преобразования. Соотношения (4.2) при замене (4.9) будут удовлетворяться, если существует такая матрица  $r_k^{(1)}$ , что

$$[r_k^{(1)}, S_{\mu n+1}]_- = 0 \quad (\mu \neq k), \quad [r_k^{(1)}, S_{k n+1}]_+ = 0. \quad (4.10)$$

Ввиду того, что  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -свойства уравнений (2.10) зависят от того, четное или нечетное число  $n$ , то мы далее отдельно рассматриваем случаи групп  $P(1, n = 2l + 1)$  и  $P(1, n = 2l)$ .

Для того чтобы найти матрицу  $r_k^{(1)}$ , удовлетворяющую соотношениям (4.10), введем следующую систему матриц  $\rho_\mu = (\rho_0, \rho_k)$ :

$$\rho_0 = Ae^{i\pi S_{0 n+1}}, \quad A = e^{-i\pi\mu_0}, \quad \rho_k = Ae^{\pi S_{k n+1}} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (4.11)$$

где матрицы  $S_{AB}$ , как и раньше, генераторы неприводимого представления группы  $SO(2, n)$ .

Используя известную формулу

$$e^{-b}Ke^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[B, K]_n, \quad (4.12)$$

где  $[B, K]_n = [B, [B, K]_{n-1}]_-$ ,  $[B, K]_0 = K$ , можно доказать следующие свойства матриц  $\rho_\mu$ :

$$[\rho_\mu, S_{\mu n+1}]_- = [\rho_\mu, S_{\sigma\rho}]_- = 0 \quad (\sigma, \rho \neq \mu), \quad (4.13)$$

$$[\rho_\mu, S_{\sigma\rho}]_+ = 0 \quad (\sigma = \mu \text{ или } \rho = \mu), \quad (4.14)$$

$$[\rho_\mu, S_{\sigma n+1}]_+ = 0 \quad (\sigma \neq \mu), \quad (4.15)$$

$$[\rho_\mu, \rho_\nu]_+ = 0 \quad (\text{для попуцелых } \mu_0), \quad (4.16)$$

$$[\rho_\mu, \rho_\nu]_- = 0 \quad (\text{для целых } \mu_0), \quad (4.17)$$

$$\rho_\mu^2 = 1, \quad \rho_\mu^{-1} = \rho_\mu. \quad (4.18)$$

Матрица  $r_k^{(1)}$  со свойствами (4.10) может быть построена из матриц  $\rho_\mu$  таким способом:

$$r_k^{(1)} = \rho_0 \rho_1 \dots \rho_{k-1} \rho_{k+1} \dots \rho_n. \quad (4.19)$$

Квадрат этой матрицы  $(r_k^{(1)})^2 = 1$  (или  $-1$ ). Это означает, что оператор  $(P_k^{(1)})^2$  эквивалентен (с точностью до знака) единичному оператору.

Итак, мы пришли к заключению, что уравнение (2.10), инвариантное относительно группы  $P(1, n = 2l + 1)$ ,  $P_k^{(1)}$ -инвариантно. Очевидно, что (2.10) будет также инвариантно относительно преобразования  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ . Оператор инверсии для такого преобразования имеет вид

$$P^{(1)} = \prod_{k=1}^n P_k^{(1)}.$$

В дальнейшем мы будем изучать свойства инвариантности уравнений (2.10) относительно оператора  $P_n^{(1)}$ , поскольку оператор  $P_k^{(1)}$ , ( $k \neq n$ ) может быть представлен как произведение операторов  $P_n^{(1)}$  и  $e^{i\pi J_{kn}}$ . Относительно последнего оператора уравнения (2.10), очевидно, инвариантны.

Рассмотрим теперь случай группы  $P(1, n = 2l)$ . Для этого случая справедливо следующее

**Утверждение 3.** Уравнения (2.10), инвариантные относительно  $P(1, n = 2l)$ , не инвариантны относительно оператора  $P_n^{(1)}$ .

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что матрицы

$$S'_{AB} = P_n^{(1)} S_{AB} (P_n^{(1)})^{-1} = r_n^{(1)} S_{AB} (r_n^{(1)})^{-1} \quad (4.20)$$

реализуют представление алгебры  $SO(2, n)$ , которое неэквивалентно представлению  $SO(2, n)$ , задаваемое матрицами  $S_{AB}$ . Матрицы  $S'_{AB}$  с учетом соотношения (4.20) могут быть выражены через матрицы  $S_{AB}$  так:

$$S'_{An} = S_{An}, \quad S'_{AB} = S_{AB} \quad (A, B, \neq n). \quad (4.21)$$

Если представление  $SO(2, n = 2l)$ , порождаемое матрицами  $S_{AB}$ , задается числами  $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{l-1}, \mu_l)$ , то представление  $SO(2, n = 2l)$ , порождаемое матрицами  $S'_{AB}$ , задается числами  $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{l-1}, -\mu_l)$ . Это факт следует из структуры матрицы  $S_{n n+1}$ . Действительно, в базисе  $\Gamma$ -Ц ее можно представить в виде (см. [5])

$$S_{n n+1} = \pm(B - B') + D, \quad (4.22)$$

где  $B, B'$  — треугольные матрицы с нулями по главной диагонали,  $D$  — диагональная матрица. Замена  $D \rightarrow -D$  в (4.22) влечет за собой замену  $\mu_l \rightarrow -\mu_l$  (справедливо и обратное утверждение). Поскольку представления  $SO(2, n)$ , задаваемые числами  $(\mu_0, \dots, \mu_l)$  и  $(\mu_0, \dots, \mu_{l-1}, -\mu_l)$ , не эквивалентны, то этим самым и доказано утверждение 3.

Таким образом, уравнения (2.10) в случае группы  $P(1, n = 2l)$   $P_n^{(1)}$ -неинвариантны. Очевидно, что уравнения (2.10) будут инвариантны относительно оператора  $P_n^{(1)}$ , если матрицы  $S_{AB}$  являются генераторами приводимого представления группы  $SO(2, n)$  вида

$$D(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{l-1}, \mu_l) \oplus D(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{l-1}, -\mu_l). \quad (4.23)$$

В этом случае на решениях уравнений (2.10) реализуется следующая прямая сумма

$$D^+(\mathcal{X}; \mu_1, \dots, \mu_l) \oplus D^-(\mathcal{X}; \mu_1, \dots, -\mu_l) \oplus D^-(\mathcal{X}; \mu_1, \dots, \mu_l) \oplus D^-(\mathcal{X}; \mu_1, \dots, -\mu_l) \quad (4.24)$$

неприводимых представлений группы  $P(1, n = 2l)$ .

Матричная часть оператора  $P_n^{(1)}$  (матрица  $r_n^{(1)}$ ) в случае  $n = 2l$  не может быть выражена через матрицы  $S_{AB}$ , поскольку такая матрица должна перевести вектор из пространства, где задано представление  $D(\mu_0, \dots, \mu_l)$  в вектор, принадлежащий пространству, где реализуется представление  $D(\mu_0, \dots, -\mu_l)$ . Такую матрицу можно найти среди матриц, порождающих представление группы  $SO(2, n+1) \supset SO(2, n)$ . Это утверждение очевидно, поскольку всегда найдется такое представление группы  $SO(2, n+1)$ , которое раскладывается в прямую сумму, содержащую представление (4.23) группы  $SO(2, n)$ .

**2.** Перейдем теперь к изучению свойств уравнений (2.10) относительно операций  $T^{(1)}, P_k^{(2)}, T^{(2)}$ . Свойства этих уравнений относительно оператора  $T^{(1)}$  легко устанавливаются, если заметить, что уравнения (2.10) инвариантны относительно  $T^{(1)}P_k^{(1)}$ -операции. Из этого замечания следует, что

а) в случае  $n = 2l + 1$  уравнения (2.10)  $T^{(1)}$ -инвариантны, если  $S_{AB}$  — генераторы неприводимого представления группы  $SO(2, n)$ . Матрица  $r_0^{(1)}$  имеет вид

$$r_0^{(1)} = \prod_{k=1}^n \rho_k; \quad (4.25)$$

б) в случае  $n = 2l$  уравнения (2.10)  $T^{(1)}$ -инвариантны, если  $S_{AB}$  — генераторы прямой суммы (4.23) представлений группы  $SO(2, n)$ .

**3.** Свойства уравнений (2.10) относительно оператора  $T^{(2)}$  могут быть изучены точно так же, как и свойства их относительно операторов  $P_k^{(1)}$  и  $T^{(1)}$ . При этом следует только учесть, что всегда можно выбрать матрицы

$$S_{0n+1}, \quad S_{1n+1}, \quad S_{3n+1}, \quad \dots \quad (4.26)$$

действительными, а матрицы

$$S_{2n+1}, \quad S_{4n+1}, \quad S_{6n+1}, \quad \dots \quad (4.27)$$

чисто мнимыми.

Чтобы уравнения (2.10) были  $T^{(2)}$ -инвариантны, матрица  $r_0^{(2)}$  должна удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} \left[ r_0^{(2)}, S_{0n+1} \right]_- &= 0, \\ \left[ r_0^{(2)}, S_{\beta n+1} \right]_- &= 0 \quad (\beta = 2, 4, 6, \dots), \\ \left[ r_0^{(2)}, S_{\alpha n+1} \right]_+ &= 0 \quad (\alpha = 1, 3, 5, \dots). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Проведя анализ соотношений (4.28), приходим к следующему результату: *если матрицы  $S_{AB}$  реализуют неприводимое представление алгебры  $SO(2, n)$ , то уравнения (2.10)  $T^{(2)}$ -инвариантны за исключением случая группы  $P(1, n = 4l + 2)$ ; матрица  $r_0^{(2)}$  имеет вид*

$$\begin{aligned} r_0^{(2)} &= \prod_{\alpha} \rho_{\alpha} && \text{для группы } P(1, n = 4l + 3); \\ r_0^{(2)} &= \rho_0 \prod_{\beta} \rho_{\beta} && \text{для группы } P(1, n = 4l + 1); \\ r_0^{(2)} &= \prod_{\alpha} \rho_{\alpha} && \text{для группы } P(1, n = 4l). \end{aligned} \tag{4.29}$$

В случае группы  $P(1, n = 4l + 2)$  уравнения (2.10) инвариантны относительно оператора  $P_k^{(1)}T^{(2)}$ . Это означает, что свойства этих уравнений относительно операторов  $P_k^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  совпадают, т.е. уравнения (2.10) инвариантны относительно  $T^{(2)}$ , если матрицы  $S_{AB}$  – генераторы представления (4.23).

Свойства уравнений (2.10) относительно операторов  $P_k^{(2)}$  и  $C$  легко устанавливаются, поскольку

$$P_k^{(2)} \sim P_k^{(1)}T^{(1)}T^{(2)}, \tag{4.30}$$

$$C \sim T^{(1)}T^{(2)}. \tag{4.31}$$

В таблице (где “нет” означает отсутствие  $R$ -инвариантности уравнений (2.10), “да” означает, что уравнения (2.10)  $R$ -инвариантны) сведены все свойства уравнений (2.10) относительно операторов  $P, T, C$ .

В том частном случае, когда уравнения (2.10) сводятся к уравнению Дирака, приведенные в таблице результаты совпадают с результатами, установленными одним из авторов [6] для уравнения Дирака, инвариантного относительно группы  $P(1, n)$ . Следует отметить, что  $R$ -свойства уравнений (2.10), когда  $\varkappa = 0$ , могут быть изучены так же, как и в случае  $\varkappa \neq 0$ . Мы здесь не приводим анализ этого случая, скажем только, что  $R$ -свойства такого уравнения совпадают со свойствами уравнений Дирака для  $\varkappa = 0$  [6].

Операции	Эквивалентные операции	$n = 2l$		$n = 2l + 1$	
		$l = 2r$	$l = 2r + 1$	$l = 2r$	$l = 2r + 1$
$P_k^{(1)}$	$CP_k^{(2)}$	нет	нет	да	да
$P_k^{(2)}$	$P_k^{(1)}C$	да	нет	да	да
$T^{(1)}$		нет	нет	да	да
$T^{(2)}$	$T^{(1)}C$	да	нет	да	да
$C$	$T^{(1)}T^{(2)} \sim P_k^{(1)}P_k^{(2)}$	нет	да	да	да
$T^{(1)}P_k^{(1)}$	$T^{(2)}P_k^{(2)}$	да	да	да	да
$T^{(2)}P_k^{(1)}$	$T^{(1)}P_k^{(1)}C$	нет	да	да	да
$CP_k^{(1)}$	$P_k^{(2)}$	да	нет	да	да
$CT^{(1)}$	$T^{(2)}$	да	нет	да	да
$CT^{(2)}$	$T^{(1)}$	нет	нет	да	да
$CT^{(1)}P_k^{(1)}$	$T^{(1)}P_k^{(2)} \sim T^{(2)}P_k^{(1)}$	нет	да	да	да
$CT^{(2)}P_k^{(1)}$	$T^{(1)}P_k^{(1)} \sim T^{(2)}P_k^{(2)}$	да	да	да	да

1. Фушич В.И., *ТМФ*, 1970, **4**, 360; Preprint ITF-70-4, Kiev, 1970.
2. Novozhilov Yu.M., Terentjev I.A., *J. Math. Phys.*, 1968, **9**, 1517.
3. Степановский Ю.П., *Укр. физ. ж.*, 1964, **9**, 1165.
4. Vakri M.M., *J. Math. Phys.*, 1969, **10**, 289.
5. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л., *ДАН СССР*, 1960, **71**, 1017.
6. Fushchych W.I., Preprint ITF-69-17, Kiev, 1969.

# On the three types of relativistic equations for particles with nonzero mass

W.I. FUSHCHYCH

In previous papers [1, 2] we have shown that there exist three types of the relativistic equations for the massless particles. Here we show that for the free particles and antiparticles with the mass  $m > 0$  and the arbitrary spin  $s \geq \frac{1}{2}$  there also exist three types of nonequivalent equations.

For the sake of brevity we shall only dwell upon the equations of motion for the particles with spin  $s = \frac{1}{2}$ . From the text it would be clear that all results of the paper can be formulated for arbitrary spin. Let us consider the eight-component equation of the Dirac type [3]

$$\begin{aligned} (\Gamma_\mu p^\mu - \Gamma_4 m)\Psi(t, \mathbf{x}) &= 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \\ p_0 &= i\frac{\partial}{\partial t}, \quad p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

where the  $8 \times 8$  matrices  $\Gamma_\mu$ ,  $\Gamma_4$ ,  $\Gamma_5$ ,  $\Gamma_6$  obey the Clifford algebra;  $\Psi$  is a eight-component wave function.

On the solutions of eq. (1) the generators of the Poincaré group  $P_{1,3}$  have the form

$$\begin{aligned} P_0 &\equiv \mathcal{H} = \Gamma_0 \Gamma_a p_a + \Gamma_0 \Gamma_4 m \equiv -2i S_{0k} p_k, \quad p_4 \equiv m, \quad k = 1, 2, 3, 4, \\ P_a &= p_a, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ J_{0a} &= x_0 p_a - \frac{1}{2}(x_0 \mathcal{H} + \mathcal{H} x_a), \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\Gamma_\mu \Gamma_\nu - \Gamma_\nu \Gamma_\mu). \end{aligned} \quad (2)$$

Using the generators (2) it can be shown that on the set of solutions eq. (1) a direct sum of four irreducible representations of the group  $P_{1,3}$ :

$$D_{s,0}^+ \oplus D_{0,s}^- \oplus D_{0,s}^+ \oplus D_{s,0}^-, \quad s = \frac{1}{2}, \quad (3)$$

is realized. Here  $D_{s,0}^\pm$  and  $D_{0,s}^\pm$  denote the irreducible representations of the group  $P_{1,3}$ . The symbols  $D_{s,0}$  and  $D_{0,s}$  denote the irreducible representations of the group  $O_4$ . Elsewhere [3] we have shown that eq. (1) was invariant under the group  $O_6$ , and a usual Dirac equation was invariant under the group  $O_4$ .

From (3) it follows that we can obtain three types of nonequivalent four-component equations from eq. (1). It is evident that these three types of equations are equivalent to one eq. (1) with three subsidiary conditions. These relativistic invariant subsidiary condition have the form

$$P_1^- \Psi = 0 \quad \text{or} \quad P_1^+ \Psi = 0, \quad P_1^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm 2S_{56}), \quad S_{56} = \frac{i}{2}\Gamma_5 \Gamma_6, \quad (4)$$

$$P_2^- \Psi = 0 \quad \text{or} \quad P_2^+ \Psi = 0, \quad P_2^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm 2\hat{\varepsilon} S_{56}), \quad \hat{\varepsilon} = \frac{\mathcal{H}}{E}, \quad (5)$$

$$P_3^- \Psi = 0 \quad \text{or} \quad P_3^+ \Psi = 0, \quad P_3^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\varepsilon}), \quad E = \sqrt{p_a^2 + m^2}. \quad (6)$$

As the projective operators  $P_a^\pm$  commute with the generators (2), it means that subsidiary conditions (4), (6) are invariant under the Poincaré group. The conditions (5), (6) are nonlocal in configuration space since  $\hat{\varepsilon}$  is the integrodifferential operator.

The eq. (1) together with the subsidiary condition (4) is equivalent to the usual Dirac equation. In this case the wave function is transformed under the representation

$$D_{s,0}^+ \oplus D_{0,s}^- \quad \text{if} \quad P_1^- \Psi = 0 \quad \text{or} \quad D_{s,0}^- \oplus D_{0,s}^+ \quad \text{if} \quad P_1^+ \Psi = 0. \quad (7)$$

Equation (1) together with (4) is equivalent to the four-component equation which coincide on the form with the Dirac equation, however, the wave function in this equation is transformed under the representation

$$D_{s,0}^+ \oplus D_{s,0}^- \quad \text{if} \quad P_2^- \Psi = 0 \quad \text{or} \quad D_{0,s}^- \oplus D_{0,s}^+ \quad \text{if} \quad P_2^+ \Psi = 0. \quad (8)$$

It is clear that the representations (8) are not equivalent to (7).

Equation (1) with subsidiary condition (6) is equivalent to the four-component equation of the form

$$i \frac{\partial \Psi^{(4)}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = E \Psi^{(4)}(t, \mathbf{x}), \quad (9)$$

where the wave function  $\Psi^{(4)}$  is transformed under the representation

$$D_{s,0}^+ \oplus D_{0,s}^+ \quad \text{if} \quad P_3^- \Psi = 0 \quad \text{or} \quad D_{s,0}^- \oplus D_{0,s}^- \quad \text{if} \quad P_3^+ \Psi = 0. \quad (10)$$

It should be emphasized that only in the last equation of motion the Hamiltonian is the positive operator. If we compare the particle with the representation  $D_{s,0}^+$  and the antiparticle with the representation  $D_{0,s}^+$ , then the eq. (9) describes free motion of a particle and antiparticle with positive energy. In this case the operator of a charge has the form  $Q = \hat{\varepsilon}$ . Equation (1) with subsidiary conditions (4)–(6) can be written in the form

$$(\Gamma_\mu p^\mu - \Gamma_4 m + \varkappa_a P_a^+) P_a^- \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (11)$$

where  $\varkappa_a$  are the arbitrary constant numbers. For eq. (11) the conditions (4)–(6) are automatically satisfied.

Equation (1) with the subsidiary conditions (4), (5), (6) (or three eqs. (11)) has different  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -properties. These properties can be read easily from the following coupling scheme or irreducible representations of the Poincaré group

$$\begin{array}{ccc} D^+(s, 0) & \xleftarrow{P} & D^+(0, s) \\ T^P \downarrow C & & C \downarrow T^P \\ D^-(s, 0) & \xleftarrow{P} & D^-(0, s) \end{array}$$

$T^P$  is the Pauli  $\leftrightarrow$  time-reversal operator. These questions will be considered in more detail in another paper.

1. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321; *Theor. Math. Phys.*, 1971, **9**, 91 (in Russian).
2. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., *Lett. Nuovo Cimento*, 1970, **4**, 927; Preprint ITF-70-88E, Kiev, 1970.
3. Fushchych W.I., *Theor. Math. Phys.*, 1971, **7**, 3; Preprint ITF-70-32, Kiev, 1970.

# $P, T, C$ properties of the Poincaré invariant equations for massive particles

W.I. FUSHCHYCH

Recently [1] we have shown that for free particles and antiparticles with mass  $m > 0$  and arbitrary spin  $s > 0$ , in the framework of the Poincaré group  $P(1, 3)$ , there exist three types of nonequivalent equations. In the present paper we study the  $P, T, C$  properties of these equations.

It will be convenient to investigate these properties in the canonical representation where the Hamiltonian is diagonal (as matrix) and other operators (position operator and spin operator) have adequate physical interpretation. For the transformation to this representation let us make unitary transformation [2]

$$\mathcal{U}\left(p, s = \frac{1}{2}\right) = \exp\left[\frac{\pi}{4} \frac{\Gamma_0 \mathcal{H}^{(8)}}{E}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\Gamma_0 \mathcal{H}^{(8)}}{E}\right), \quad (1)$$

$$\mathcal{H}^{(8)} \equiv \Gamma_0 \Gamma_k p_k, \quad p_4 \equiv m, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

over the eight-component equation of the Dirac type

$$i \frac{\partial \Psi^{(8)}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}^{(8)} \Psi^{(8)}(t, \mathbf{x}). \quad (2)$$

Equation (2) after the transformation (1) transfers into

$$i \frac{\partial \Phi^{(8)}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}^c \Phi^{(8)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{H}^c = \Gamma_0 E, \quad \Phi^{(8)} = U \Psi^{(8)}. \quad (3)$$

In the canonical representation the generators of the  $P(1, 3)$  group have the form [2]

$$P_0 = \mathcal{H}^c = \Gamma_0 E, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3,$$

$$J_{ab} = M_{ab} + S_{ab}, \quad M_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad (4)$$

$$J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, \mathcal{H}^c]_+ - \Gamma_0 \frac{S_{ab} p_b + S_{04} m}{E}, \quad x_0 \equiv t,$$

where  $S_{ab}, S_{04}$  matrices are generators of the  $SO_4 \sim SU_2 \otimes SU_2$  group. On the solutions  $\{\Phi^{(8)}\}$  of eq.(2) these matrices have form

$$S_{kl} = S_{kl}^{(8)} = \frac{i}{4} (\Gamma_k \Gamma_l - \Gamma_l \Gamma_k), \quad k, l = 1, 2, 3, 4.$$

The representation for the generators  $P(1, 3)$  in the form (4) differs from the Foldy–Shirokov [3, 4] representation. In the form (4) it is explicitly distinguished the fact that in the space where a representation of the  $P(1, 3)$  group is given, also a representation

of  $SO_4 \sim SU_2 \otimes SU_2$  is realized. This follows, in particular, from the fact  $[\mathcal{H}^c, S_{kl}]_- = 0$ , i.e. it means that the matrices

$$S_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} + S_{4a} \right), \quad T_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} - S_{4a} \right),$$

commute with the Hamiltonian\*. In other words this means that the space, where the representation of  $P(1,3)$  group is realized, must be characterized (besides the mass  $m$  and the sign of the energy) by pair of indices  $s$  and  $\tau$

$$S_a^2 \Phi = s(s+1)\Phi, \quad T_a^2 \Phi = \tau(\tau+1)\Phi, \quad s, \tau = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

we shall denote by  $D^\pm(s, 0)$  and  $D^\pm(0, \tau)$  the irreducible representation of  $P(1,3)$  group. For further understanding it should be noted that the irreducible representations  $D(s, 0)$  and  $D(0, \tau)$  of  $SO_4$  group are indistinguishable with respect to the matrices  $S_{ab}$  from the  $SO_3$  algebra.

From the canonical eight-component equation (3) we can obtain the following three types of nonequivalent four-component equations

$$i \frac{\partial \Phi_a(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}_a \Phi_a(t, \mathbf{x}), \quad a = 1, 2, 3, \quad (5)$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \varepsilon \gamma_0 E, \quad \mathcal{H}_3 = \varepsilon E, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (6)$$

where  $\gamma_0$  is the hermitian and diagonal  $4 \times 4$  matrix\*\*. Under a transformation of the  $P(1,3)$  group the four-component wave functions  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  transform on the representations (for the sake of brevity we consider only case  $\varepsilon = +1$ )

$$D^+(s, 0) \oplus D^-(0, \tau), \quad s = \tau = \frac{1}{2}, \quad (7)$$

$$D^+(s, 0) \oplus D^-(s, 0), \quad s = \frac{1}{2}, \tau = 0, \quad (8)$$

$$D^+(s, 0) \oplus D^+(0, \tau), \quad s = \tau = \frac{1}{2}. \quad (9)$$

On the manifolds  $\{\Phi_1\}, \{\Phi_2\}, \{\Phi_3\}$  the generators  $P_\mu, J_{\alpha\beta}$  have the forms

$$\begin{aligned} P_0^{(1)} &= \mathcal{H}_1, & P_a^{(1)} &= p_a, & J_{ab}^{(1)} &= M_{ab} + S_{ab}, \\ J_{0a}^{(1)} &= x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, \mathcal{H}_1]_+ - \gamma_0 \frac{S_{ab} p_b + S_{a4} m}{E}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} P_0^{(2)} &= \mathcal{H}_2, & P_a^{(2)} &= p_a, & J_{ab}^{(2)} &= M_{ab} + S_{ab}, \\ J_{0a}^{(2)} &= x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, \mathcal{H}_2]_+ - \gamma_0 \frac{S_{ab} p_b + \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} m}{E}; \end{aligned} \quad (11)$$

\*In fact, eq.(2) or (3) is invariant with respect to  $SO_6 \supset SO_4$  group [2]. A relativistic equation of motion for particle with spin  $\frac{3}{2}$  is invariant also with respect to the  $SO_6$  group.

\*\*The fact that the  $\mathcal{H}_1$  and  $\mathcal{H}_2$  have identical forms in two eqs.(5) must not lead into confusion since the equation of motion is defined completely if only we determine both the Hamiltonian and the representation of  $P(1,3)$  group.

$$\begin{aligned}
 P_0^{(3)} &= \mathcal{H}_3 = E, & P_a^{(3)} &= p_a, & J_{ab}^{(3)} &= M_{ab} + S_{ab}, \\
 J_{0a}^{(3)} &= x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, E]_+ - \frac{S_{ab} p_b + S_{a4} m}{E} \equiv x_0 p_a - x_a E + S_{0a} \frac{\mathcal{H}}{E},
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

where

$$\mathcal{H} = \gamma_0 \gamma_k p_k, \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4.$$

It should be noted that only in the last representation (12) the Hamiltonian  $\mathcal{H}_3 = E$  is the positive-definite operator. If we add to the algebra (12) an operator of the change  $Q = \gamma_0$ , then such algebra (in the quantum mechanics framework) has the same properties as the corresponding Poincaré algebra, obtained by the procedure of the Dirac equation quantization.

It is well known [3] that there exist two nonequivalent definitions of the space-reflection operator  $P$ :

$$P^{(1)}\Phi(t, \mathbf{x}, m) = r_1\Phi(t, -\mathbf{x}, m), \quad \left(P^{(1)}\right)^2 \sim 1,
 \tag{13}$$

$$P^{(2)}\Phi(t, \mathbf{x}, m) = r_2\Phi^*(t, -\mathbf{x}, m), \quad \left(P^{(2)}\right)^2 \sim 1,
 \tag{14}$$

$$[P^{(1)}, P_0]_- = 0 = [P^{(1)}, J_{ab}]_-, \quad [P^{(1)}, P_a]_+ = 0 = [P^{(1)}, J_{0a}]_+,
 \tag{15}$$

$$[P^{(2)}, P_0]_+ = 0 = [P^{(2)}, J_{ab}]_+, \quad [P^{(2)}, P_a]_- = 0 = [P^{(2)}, J_{0a}]_-.
 \tag{16}$$

Also there exist two nonequivalent definitions of the time-reflection  $T$ :

$$T^{(1)}\Phi(t, \mathbf{x}, m) = t_1\Phi(-t, \mathbf{x}, m), \quad \left(T^{(1)}\right)^2 \sim 1,
 \tag{17}$$

$$T^{(2)}\Phi(t, \mathbf{x}, m) = t_2\Phi^*(-t, \mathbf{x}, m), \quad \left(T^{(2)}\right)^2 \sim 1,
 \tag{18}$$

$$[T^{(1)}, P_0]_+ = 0 = [T^{(1)}, J_{0a}]_+, \quad [T^{(1)}, P_a]_- = 0 = [T^{(1)}, J_{ab}]_-,
 \tag{19}$$

$$[T^{(2)}, P_0]_- = 0 = [T^{(2)}, J_{0a}]_-, \quad [T^{(2)}, P_a]_+ = 0 = [T^{(2)}, J_{ab}]_+.
 \tag{20}$$

Besides these conditions usually imposed on the discrete operators  $P$  and  $T$  we shall require also the subsidiary conditions

$$[\hat{X}_a, P^{(1)}]_+ = 0 = [P^{(2)}, \hat{X}_a]_+,
 \tag{21}$$

$$[T^{(1)}, \hat{X}_a]_- = 0 = [T^{(2)}, \hat{X}_a]_-
 \tag{22}$$

to be satisfied where  $\hat{X}_a$  is a position operator. The conditions (21) and (22) guarantee that quantities  $r_1, r_2, t_1, t_2$  are the matrices which do not depend on the momentum. If the conditions (21), (22) are not imposed, then the operators  $P$  and  $T$  may be nonlocal (in this case the quantities depend on the momentum).

In addition to the discrete operators  $P$  and  $T$  we shall introduce some more discrete operators:

$$M\Phi(t, \mathbf{x}, m) = r_m\Phi(t, \mathbf{x}, -m), \quad M^2 \sim 1,
 \tag{23}$$

$$M_t \Phi(t, \mathbf{x}, m) = m_t \Phi(-t, \mathbf{x}, -m), \quad M_t^2 \sim 1, \quad (24)$$

$$M_x \Phi(t, \mathbf{x}, m) = m_x \Phi(t, -\mathbf{x}, -m), \quad M_x^2 \sim 1, \quad (25)$$

$$[M, P_\mu]_- = 0 = [M, J_{\mu\nu}]_-, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (26)$$

$$[M_t, P_0]_+ = 0 = [M_t, J_{0a}]_+, \quad [M_t, P_a]_- = 0 = [M_t, J_{ab}]_-, \quad (27)$$

$$[M_x, P_0]_- = 0 = [M_x, J_{ab}]_-, \quad [M_x, P_a]_+ = 0 = [M_x, J_{0a}]_+, \quad (28)$$

where  $r_m, m_t, m_x$  are the  $4 \times 4$  matrices.

There is no need to define specially the operator of the charge conjugation  $C$  since it is equal to the operator  $T^{(1)} \cdot T^{(2)}$  (or  $P^{(1)} \cdot P^{(2)}$ ).

If we use the explicit forms (10)–(28) for the generators  $P_\mu$  and  $J_{\alpha\beta}$  and carrying out the analysis of the conditions (13)–(28) we come to the following results:

- 1) Equation (5) for the function  $\Phi_1$  (taking into consideration the representation (10)) is  $C, M_x, M_t, P^{(1)}T^{(2)}$  invariant, but  $P^{(1)}, P^{(2)}, T^{(2)}, M$  noninvariant;
- 2) Equation (5) for the function  $\Phi_2$  (taking into consideration the representation (11)) is  $P^{(2)}, T^{(1)}, M_x, P^{(1)}T^{(2)}$  invariant, but  $P^{(1)}, T^{(2)}, C, M, M_t$  noninvariant\*;
- 3) Equation (5) for the function  $\Phi_3$  (taking into consideration the representation (12)) is  $P^{(1)}, T^{(2)}, M, M_x, P^{(1)}T^{(2)}$  invariant, but  $T^{(1)}, C, P^{(2)}, M_t$  noninvariant.

These assertions may be proved also starting from eight-component equation (2) (or (3)) in which constraints have been imposed on the wave function [1]. To establish this it is necessary to analyse the commutation relations between the discrete operators and the projections  $P_1^\pm, P_2^\pm, P_3^\pm$ .

**Note 1.** It can be easily checked that

$$P^{(1)}S_a = T_a P^{(1)}, \quad MS_a = T_a M, \quad T^{(1)}S_a = S_a T^{(1)}. \quad (29)$$

The transformation connecting the canonical representations (10)–(12) and the Foldy–Shirokov representation has the form

$$U_1 = \frac{m + E + \gamma_4 \gamma_a p_a}{\{2E(E + m)\}^{1/2}}. \quad (30)$$

**Note 2.** If we put  $m = 0$  in the reducible representation (4), then it reduces into the following direct sum of the irreducible representation of the  $P(1, 3)$  algebra

$$\begin{aligned} D^+ \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \oplus D^- \left( 0, \frac{1}{2} \right) \oplus D^- \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \oplus D^+ \left( 0, \frac{1}{2} \right) \rightarrow \\ \rightarrow D^+ \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \oplus D^+ \left( -\frac{1}{2}, 0 \right) \oplus D^- \left( 0, \frac{1}{2} \right) \oplus D^- \left( 0, -\frac{1}{2} \right) \oplus \\ \oplus D^- \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \oplus D^- \left( -\frac{1}{2}, 0 \right) \oplus D^+ \left( 0, \frac{1}{2} \right) \oplus D^+ \left( 0, -\frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (31)$$

\*In the coupling scheme, brought in ref. [1], the correction  $D^+(s, 0) \xleftrightarrow{C} D^-(0, s)$  should be done.

where members  $\frac{1}{2}$  and  $-\frac{1}{2}$  are the eigenvalues of the operators  $S_a p_a / E$  and  $T_a p_a / E$ . These operators commute with the generators  $P_\mu, J_{\alpha\beta}$  when  $m = 0$ . From (31) follows that there exist 28 types of mathematical nonequivalent two-component equations for massless particles.

**Note 3.** In order that Poincaré-invariant equation  $m \neq 0$  was totally  $P, T, C$  invariant it is necessary and sufficient that the wave function was transformed on the following direct sum of representation of  $P(1, 3)$

$$D^+(s, \tau) \oplus D^-(s, \tau) \oplus D^+(\tau, s) \oplus D^-(\tau, s), \quad \text{if } \tau \neq s, \quad (32)$$

$$D^+(s, \tau) \oplus D^-(s, \tau), \quad \text{if } \tau = s. \quad (33)$$

The representation  $D^+(s, \tau)$  is in general reducible with respect to the  $P(1, 3)$  algebra, therefore the wave function describes a multiplet of particles with variable-spin, but fixed mass. The spin of the multiplet can take the values from  $(s - \tau)$  to  $(s + \tau)$ . The equations of motion describing a physical system with variable-mass and variable-spin were considered in ref. [5].

1. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1972, **4**, 344.
2. Fushchych W.I., *Theor. Math. Phys.*, 1971, **7**, 3; Preprint ITF-70-32, Kyiv, 1970.
3. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
4. Shirokov Yu.M., *Zurn. Eksp. Teor. Fiz.*, 1957, **33**, 1196.
5. Fushchych W.I., *Theor. Math. Phys.*, 1970, **4**, 360; Preprint ITF-70-4, Kyiv, 1970; Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1969, **14**, 573.

# On the possible types of equations for zero-mass particles

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

A number of papers dedicated to the description of free particles and antiparticles with zero mass and spin  $\frac{1}{2}$  has recently appeared [1–6].

A great many equations with different  $C$ ,  $P$ ,  $T$  properties have been proposed and the impression could be formed that there are many nonequivalent theories for zero-mass particles. The purpose of this paper is to show that it is not the case and to describe all nonequivalent equations.

1. First we shall formulate the result [1] obtained for a particle of spin  $\frac{1}{2}$  in such a form that all principal assertions will be valid for massless particles of arbitrary spin. It has been shown [1] that for a particle of spin  $\frac{1}{2}$  three types of nonequivalent two-component Poincaré-invariant equations exist. These three of equations are equivalent to the Dirac equation

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi(t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{H} = \gamma_0 \gamma_a p_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (1)$$

with one out of three (actually, one out of six) subsidiary conditions imposed on a wave function

$$P_1^+ \Psi = 0 \quad \text{or} \quad P_1^- \Psi = 0, \quad P_1^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_4), \quad \gamma_4 = -\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (2)$$

$$P_2^+ \Psi = 0 \quad \text{or} \quad P_2^- \Psi = 0, \quad P_2^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_4 \hat{\varepsilon}), \quad \hat{\varepsilon} = \frac{\mathcal{H}}{E}, \quad (3)$$

$$P_3^+ \Psi = 0 \quad \text{or} \quad P_3^- \Psi = 0, \quad P_3^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\varepsilon}), \quad E = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}. \quad (4)$$

Conditions (2)–(4) are Poincaré invariant since the projection operators  $P_a^\pm$  commute with the generators of the Poincaré group  $P(1, 3)$

$$P_0 = \mathcal{H} = \gamma_0 \gamma_a p_a, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{0a} = t p_a - \frac{1}{2}(x_a P_0 + P_0 x_a), \quad (5)$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad S_{ab} = \frac{i}{4}(\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a).$$

It should be emphasized that only the operator  $P_1^\pm$  is local in co-ordinate space. If we introduce the four-component (as a matter of fact, two-component) modes

$$\chi_a^\pm = P_a^\pm \Psi, \quad (6)$$

equations (1) with subsidiary conditions (2)–(4) can be written in the form

$$i \frac{\partial \chi_a^\pm}{\partial t} = (\gamma_0 \gamma_b p_b \pm \varkappa_a \gamma_0 P_a^\mp) \chi_a^\pm, \quad (7)$$

where  $\varkappa_a$  are arbitrary constants. The wave functions  $\chi_a^\pm$  satisfy conditions (2)–(4) automatically. One of the equations (7), namely the equation for  $\chi_1^+$  (or  $\chi_1^-$ ), is equivalent, as is well known, to the two-component Weyl equation. Subsidiary conditions (2)–(4) have been generalized in [7] to massless particles of arbitrary spin starting from the  $2(2s + 1)$ -component equation.

These results are almost evident from the group-theoretical point of view. Indeed, on the set  $\{\Psi\}$  of solutions of the equation (1) the following direct sum of irreducible representations of the group  $P(1, 3)$  is realized:

$$D^+(\lambda = 1) \oplus D^-(\lambda = -1) \oplus D^+(\lambda = -1) \oplus D^-(\lambda = 1), \quad (8)$$

where  $D^\varepsilon(\lambda)$  is the one-dimensional irreducible representation of the  $P(1, 3)$  group characterized by the eigenvalue  $\varepsilon = \pm 1$  of the sign energy operator  $\hat{\varepsilon}$  and by the eigenvalue  $\lambda = \pm 1$  of the helicity operator

$$\hat{\Lambda} = 2 \frac{J_{12}P_3 + J_{23}P_1 + J_{01}P_2}{E} = i\gamma_4\hat{\varepsilon}. \quad (9)$$

Two-dimensional subspaces of representations

$$D^+(\lambda = 1) \oplus D^-(\lambda = -1) \quad \text{or} \quad D^+(\lambda = -1) \oplus D^-(\lambda = 1), \quad (10)$$

$$D^+(\lambda = 1) \oplus D^-(\lambda = 1) \quad \text{or} \quad D^+(\lambda = -1) \oplus D^-(\lambda = -1), \quad (11)$$

$$D^+(\lambda = 1) \oplus D^+(\lambda = -1) \quad \text{or} \quad D^-(\lambda = 1) \oplus D^-(\lambda = -1), \quad (12)$$

are selected by subsidiary conditions (2)–(4) from  $\{\Psi\}$  in a Poincaré-invariant manner.

The operators  $P$ ,  $T$ ,  $C$  (their definitions see e.g. in [8]) and  $\hat{\Lambda}$ ,  $\hat{\varepsilon}$  satisfy the relations

$$[P^{(1)}, \hat{\Lambda}]_+ = [P^{(1)}, \hat{\varepsilon}]_- = [T^{(2)}, \hat{\Lambda}]_- = [T^{(2)}, \hat{\varepsilon}]_- = [C, \hat{\Lambda}]_- = [C, \hat{\varepsilon}]_+ = 0. \quad (13)$$

Taking into account (13) one obtains the relations

$$P^{(1)}P_j^\pm = P_j^\mp P^{(1)}, \quad P^{(1)}P_3^\pm = P_3^\pm P^{(1)}, \quad T^{(2)}P_a^\pm = P_a^\pm T^{(2)}, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

$$CP_1^\pm = P_1^\mp C, \quad CP_2^\pm = P_2^\pm C, \quad CP_3^\pm = P_3^\pm C. \quad (15)$$

From (14), (16) it follows that

- 1) the system of equations (1), (2) is  $T^{(2)}$ ,  $P^{(1)}$ ,  $C$ -invariant but  $P^{(1)}$ ,  $C$ -noninvariant,
- 2) the system of equations (1), (3) is  $T^{(2)}$ ,  $C$ -invariant but  $P^{(1)}$ -noninvariant,
- 3) the system of equations (1), (4) is  $T^{(2)}$ ,  $P^{(1)}$ -invariant but  $C$ -noninvariant.

To obtain these result we have used only the relations (13) which are valid for massless particles of arbitrary spin. The above discussion is followed by tins conclusion: *if the particle (and antiparticle) of zero mass is characterized by helicity and by the sign of energy only (without additional quantum numbers) three and only three types of two-component Poincaré-invariant essentially different (in respect to  $C$ ,  $P$ ,  $T$  properties) equations exist.* It is interesting to note that the hypothesis of

Lee and Yang and Landau on  $CP$ -parity conservation is not valid for the equations (1), (3); (1), (4). Moreover the system of equations (1), (3) is  $CP^{(1)}T^{(2)}$ - and  $CP^{(1)}T^{(1)}$ -noninvariant.

**Note 1.** Equation (1) with subsidiary conditions

$$P_2^\varepsilon P_3^{\varepsilon'} \Psi = 0, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1, \quad (16)$$

$$P_2^\varepsilon P_3^{\varepsilon'} \Psi = \Psi, \quad (17)$$

is equivalent to three- and one-component equations

$$(\gamma_\mu p_\mu + \bar{\varkappa}_0 P_2^\varepsilon P_3^{\varepsilon'}) \varphi^{\varepsilon\varepsilon'} = 0, \quad \varphi^{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{1}{2}(1 - P_2^\varepsilon P_3^{\varepsilon'}) \Psi, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (18)$$

$$(\gamma_\mu P_\mu + \bar{\varkappa}_1 P_2^\varepsilon P_3^{-\varepsilon'} + \bar{\varkappa}_2 P_2^{-\varepsilon} P_3^{\varepsilon'} + \varkappa_3 P_2^{-\varepsilon} P_3^{-\varepsilon'}) \bar{\varphi}^{\varepsilon\varepsilon'} = 0, \quad \bar{\varphi}^{\varepsilon\varepsilon'} = P_2^\varepsilon P_3^{\varepsilon'} \Psi, \quad (19)$$

respectively, where  $\bar{\varkappa}_\mu$  are arbitrary constants. It is not difficult to calculate that there are fifteen equations (2)–(4), (16), (17) exhausting all possible nonequivalent Poincaré-invariant subsidiary conditions which can be imposed on  $\{\Psi\}$ .

**Note 2.** If a zero-mass particle is characterized by two (but not by one) quantum numbers, there exist more than three types of nonequivalent two-component equations. Theoretically such a possibility exists due to commutativity of Dirac's Hamiltonian for a particle of spin  $\frac{1}{2}$  with  $SO_4 \sim SU_2 \otimes SU_2$  algebra. It means that besides the mass two conserved quantum numbers  $s$  and  $\tau$  exist. For the zero-mass case the eigenvalues of helicity-type operators

$$\hat{\Lambda}_1 = \frac{S_a p_a}{p}, \quad \hat{\Lambda}_2 = \frac{\tau_a p_a}{p}, \quad (20)$$

$$S_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} + S_{4a} \right), \quad \tau_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} - S_{4a} \right)$$

are conserved. If the massless particle is characterized by eigenvalues of operators (20), the number of theoretically possible equations increases. This follows from the fact that the two-dimensional irreducible representation of the group  $P(1, 3)$  for  $m \neq 0$  is reduced in the case  $m = 0$  to the following direct sum of one-dimensional irreducible representations:

$$D^\pm \left( 0, \frac{1}{2} \right) \rightarrow D^\pm \left( 0, +\frac{1}{2} \right) \oplus D^\pm \left( 0, -\frac{1}{2} \right), \quad (21)$$

$$D^\pm \left( \frac{1}{2}, 0 \right) \rightarrow D^\pm \left( +\frac{1}{2}, 0 \right) \oplus D^\pm \left( -\frac{1}{2}, 0 \right).$$

We shall not analyze all possible equations in this case (it is difficult to do this using the results of paper [8]) because it is not clear from the physical point of view how one can distinguish, say, the representations  $D^\pm \left( 0, -\frac{1}{2} \right)$  and  $D^\pm \left( -\frac{1}{2}, 0 \right)$ .

**2.** Let us now show that four- and two-component equations obtained in [4, 5] are isometrically equivalent to the Dirac equation (1) and to the Weyl equation.

Consider the four-component equation of the type [4]

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}_\Phi \Phi(t, \mathbf{x}) = (\alpha_a p_a + \Lambda) \Phi(t, \mathbf{x}), \quad \alpha_a = \gamma_a \gamma_a, \quad (22)$$

where  $\Lambda$  is an operator satisfying the condition

$$\alpha_a p_a \Lambda = -\Lambda \alpha_a p_a, \quad \Lambda^2 = 0. \quad (23)$$

Equation (22) can be obtained from (1) with the help of the isometric transformation

$$\Psi \rightarrow \Phi = V_1 \Psi, \quad \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\Phi = V_1 \mathcal{H} V_1^{-1}, \quad (24)$$

where

$$V_1 = 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha_a p_a}{E^2} \Lambda, \quad V_1^{-1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha_a p_a}{E^2} \Lambda. \quad (25)$$

The Hamiltonian  $\mathcal{H}_\Phi$  is Hermitian in respect of the following scalar product:

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int d^3 \mathbf{x} \Phi_1^\dagger(t, \mathbf{x}) (V_1^{-1})^\dagger V_1^{-1} \Phi_2(t, \mathbf{x}). \quad (26)$$

To draw the correct conclusion about the  $C$ ,  $P$ ,  $T$  properties equation (22) it is necessary to write the algebra (5) in the  $\Phi$ -representation. We shall not do this here. We shall remark only that due to the invariance of equation (1) under  $P^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$ ,  $C$  transformations equation (22) is invariant with respect to the transformations

$$P_\Phi^{(1)} = V_1 P^{(1)} V_1^{-1}, \quad C_\Phi = V_1 C V_1^{-1}, \quad T_\Phi^{(2)} = V_1 T^{(2)} V_1^{-1}. \quad (27)$$

One can show in an analogous manner that the two-component equation of the type [5]

$$i \frac{\partial \chi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = (\sigma_a p_a + B) \chi(t, \mathbf{x}), \quad (28)$$

$$B \sigma_a p_a = -\sigma_a p_a B, \quad B^2 = 0,$$

can be obtained from the Weyl equation with the help of the operator

$$V_2 = 1 - \frac{1}{2} \frac{\sigma_a p_a}{E^2} B, \quad V_2^{-1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_a p_a}{E^2} B. \quad (29)$$

1. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321; *Theor. Math. Phys.*, 1971, **9**, 91 (in Russian).
2. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., *Lett. Nuovo Cimento*, 1970, **4**, 927.
3. Simon M.T., *Lett. Nuovo Cimento*, 1971, **2**, 616.
4. Santhanam T.S., Tekumalla A.R., *Lett. Nuovo Cimento*, 1972, **3**, 190.
5. Tekumalla A.R., Santhanam T.S., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **6**, 99.
6. Seetharaman T.S., Simon M.T., Mathews P.M., *Nuovo Cimento A*, 1972, **12**, 788.
7. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., Nikitin A.G., *Theor. Math. Phys.*, 1971, **8**, 192 (in Russian).
8. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **6**, 133.

# On the additional invariance of the Dirac and Maxwell equations

W.I. FUSHCHYCH

In this note we show that there exists a new set of operators  $\{Q\}$  (this set is different from the operators which satisfy the Lie algebra of the Poincare group  $P_{1,3}$ ) with respect to which the Dirac and Maxwell equations are invariant. We shall give the detailed proof of our assertions only for the Dirac equation, since for the Maxwell equations all the assertions are proved analogously.

The Dirac equations [1]

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi(t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{H} = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 \gamma_4 m \quad (1)$$

is invariant with respect to such a set of operators  $\{Q\}$  which obey the condition

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}, Q \right] \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \forall Q \in \{Q\}. \quad (2)$$

It is well known that there are two sets of operators which satisfy the condition (2). The first set has the form [2]

$$\{\tilde{Q}_1\} = \begin{cases} \tilde{P}_0^{(1)} = p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, & \tilde{P}_a^{(1)} = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, & a = 1, 2, 3, \\ \tilde{J}_{\mu\nu}^{(1)} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, & \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \end{cases} \quad (3)$$

where

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad [x_\mu, p_\nu] = -i g_{\mu\nu}.$$

The second set has the form [3]

$$\{\tilde{Q}_2\} = \begin{cases} \tilde{P}_0^{(2)} = \mathcal{H} = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 \gamma_4 m, & \tilde{P}_a^{(2)} = p_a, \\ \tilde{J}_{ab}^{(2)} \equiv J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & a, b = 1, 2, 3, \\ \tilde{J}_{0a}^{(2)} = x_0 p_a - \frac{1}{2} (x_a \mathcal{H} + \mathcal{H} x_a), \end{cases} \quad (4)$$

We shall prove the following assertion.

**Theorem 1.** *The eq. (1) is invariant with respect to such two sets of operators*

$$\{\tilde{Q}_3\} = \begin{cases} \tilde{P}_0^{(3)} = p_0, & \tilde{P}_a^{(3)} = p_a, & \tilde{J}_{ab}^{(3)} \equiv \tilde{J}_{ab}^{(2)} \equiv J_{ab}, \\ \tilde{J}_{0a}^{(3)} = x_0 p_a - x_a p_0 - \frac{i}{2} \left( 1 - \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right) \left( \frac{\gamma_a}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} - \frac{\gamma_0 \mathcal{H} p_a}{\mathcal{H}^2 \sqrt{\mathcal{H}^2}} \right) p_0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\{\tilde{Q}_4\} = \begin{cases} \tilde{P}_0^{(4)} = \mathcal{H}, & \tilde{P}_a^{(4)} = p_a, & \tilde{J}_{ab}^{(4)} = J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ \tilde{J}_{0a}^{(4)} = x_0 p_a - \frac{1}{2}(\tilde{x}_a \mathcal{H} + \mathcal{H} \tilde{x}_a), \end{cases} \quad (6)$$

where

$$\tilde{x}_a = x_a + \frac{i}{2} \left( 1 - \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right) \left( \frac{\gamma_a}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} - \frac{\gamma_0 \mathcal{H} p_a}{\mathcal{H}^2 \sqrt{\mathcal{H}^2}} \right). \quad (7)$$

**Proof.** It may be shown by an immediate verification that the invariant condition (2) is satisfied for the operators (5) and (6). However, a more easy and elegant way is the following. Let us perform a unitary transformation [1] over eq. (1) and the operators (5) and (6)

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right). \quad (8)$$

Under the transformation eq. (1) and the operators (5), (6) will have the form

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}^c \Phi(t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{H}^c = \gamma_0 E, \quad \Phi = U \Psi, \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (9)$$

$$\{Q_3\} = \begin{cases} P_0^{(3)} = U \tilde{P}_0^{(3)} U^{-1} = p_0, & P_a^{(3)} = U \tilde{P}_a^{(3)} U^{-1} = p_a, \\ J_{ab}^{(3)} = U \tilde{J}_{ab}^{(3)} U^{-1} = J_{ab}, & J_{0a}^{(3)} = x_0 p_a - x_a p_0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\{Q_4\} = \begin{cases} P_0^{(4)} = U \mathcal{H} U^{-1} = \mathcal{H}^c = \gamma_0 E, & P_a^{(4)} = p_a, \\ J_{ab}^{(4)} = U \tilde{J}_{ab}^{(4)} U^{-1} = J_{ab}, & J_{0a}^{(4)} = x_0 p_a - \frac{\gamma_0}{2} (x_a E + E x_a). \end{cases} \quad (11)$$

Now it may be readily verified that the invariant condition (2) in the new representation

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}^c, Q \right] \Phi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (12)$$

is satisfied if the operators  $\{Q\}$  have the form (10) and (11). This proves the theorem.

**Remark 1.** The operators (10), (11) (this means that also the operating (5), (6)) satisfy the relations

$$\left[ P_\mu^{(j)}, P_\nu^{(j)} \right] = 0, \quad \left[ P_\mu^{(j)}, J_{\alpha\beta}^{(j)} \right] = i \left( g_{\mu\alpha} P_\beta^{(j)} - g_{\mu\beta} P_\alpha^{(j)} \right), \quad j = 3, 4. \quad (13)$$

$$\left[ J_{ab}^{(j)}, J_{cd}^{(j)} \right]_- = i \left( g_{cd} J_{bc}^{(j)} - g_{ac} J_{bd}^{(j)} + g_{bc} J_{ad}^{(j)} - g_{bd} J_{ac}^{(j)} \right), \quad (14)$$

$$\left[ J_{0a}^{(j)}, J_{0b}^{(j)} \right]_- = -i \left( J_{ab}^{(j)} - S_{ab} \right), \quad a, b, c, d = 1, 2, 3; \quad j = 3, 4.$$

From (14) it follows that if the matrices  $S_{ab}$  are added to the operators (10), (11), then the set of operators  $\{P_\mu^{(j)}, S_{\mu\nu}^{(j)}, S_{ab}\}$  form the Lie algebra.

**Remark 2.** From the above considerations it follows that the wave function  $\Phi$  in passing from one inertial frame of reference to another which is moving with velocity  $-V$  may be transformed by four nonequivalent ways

$$\begin{aligned}\Phi^{(j)}(t, \mathbf{x}) &= \exp \left[ iJ_{0c}^{(j)} \theta_c \right] \Phi^{(j)}(t, \mathbf{x}), \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ J_{0c}^{(j)} &= U \tilde{J}_{0c}^{(j)} U^{-1}, \quad \operatorname{tgh} \theta = |V|.\end{aligned}\tag{15}$$

It is to be emphasized that by the transformation (15) the time does not change if  $J_{0c}^{(j)} \in \{Q_2\}$  or  $\{Q_4\}$ :

$$\begin{aligned}x_0 &= \exp \left[ iJ_{0c}^{(4)} \theta_c \right] x_0 \exp \left[ -iJ_{0b}^{(4)} \theta_b \right] = \exp \left[ iJ_{0c}^{(2)} \theta_c \right] x_0 \exp_n \left[ -iJ_{0b}^{(2)} \theta_b \right] = x_0, \\ x_a &= \exp \left[ iJ_{0c}^{(4)} \theta_c \right] x_a \exp \left[ -iJ_{0b}^{(4)} \theta_b \right].\end{aligned}$$

Such transformations  $x_a$ , are not equivalent to the conventional Lorentz transformations. If in these formulae  $J_{0a}^{(j)} \in \{Q_3\}$ , the  $x_a$  and  $x_0$  transform in the conventional Lorentz way. We thus find that, if the energy of a free particle is defined as usually  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ , then this does not mean in general that the theory must be invariant with respect to the Lorentz transformations.

**Theorem 2.** *The Hamiltonian  $\mathcal{H}$  in eq. (1) commutes with the operators*

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{ab} &= \frac{i}{4}(\tilde{\gamma}_a \tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_b \tilde{\gamma}_a), \quad a, b = 1, 2, 3, \\ \tilde{S}_{4a} &= \frac{i}{4}(\tilde{\gamma}_4 \tilde{\gamma}_a - \tilde{\gamma}_a \tilde{\gamma}_4),\end{aligned}\tag{16}$$

where

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_a &= \gamma_a + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right) \frac{(\gamma_a \gamma_c - \gamma_c \gamma_a) p_c + 2\gamma_a \gamma_4 m}{\sqrt{\mathcal{H}^2}}, \\ \tilde{\gamma}_4 &= \gamma_4 + \left( 1 - \frac{\gamma_b p_b + \gamma_4 m}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right) \frac{\gamma_4 \gamma_c p_c}{\sqrt{\mathcal{H}^2}}.\end{aligned}$$

**Proof.** If we perform the transformation (8) over the operators (16), we obtain

$$S_{kl} = U \tilde{S}_{kl} U^{-1} = S_{kl} = \frac{i}{4}(\gamma_k \gamma_l - \gamma_l \gamma_k), \quad k, l = 1, 2, 3, 4.\tag{17}$$

From (17) it follows  $[\mathcal{H}^c, S_{kl}] = 0$  and

$$[S_{kl}, S_{nr}]_- = i(g_{kr} S_{ln} - g_{kn} S_{lr} + g_{ln} S_{kr} - g_{lr} S_{kn}), \quad k, l, n, r = 1, 2, 3, 4.\tag{18}$$

The analogous theorem is valid for any arbitrary relativistic equation in the canonical form describing free particle motion with spin  $s$  [1].

**Remark 3.** The operators (16) serve as an example of the nonlocal generators (in configuration space) which satisfy the Lie algebra of the group  $O_4$ . Previously it was known that the Hamiltonian had only the group  $O_3$  symmetry since the spin of a particle was the integral of the motion.

Following Good [4, 5], the Maxwell equations may be written in the Hamiltonian form

$$i \frac{\partial \varphi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}_1 \varphi(t, \mathbf{x}), \quad \mathcal{H}_1 = \mathbf{B} \mathbf{p},$$

$$\mathcal{H}^2 \varphi \neq 0, \quad \mathbf{B} = \sigma_2 \otimes \mathbf{S}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} -\mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Equations (19) by Erikson–Beckers transformation [5]

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + (\sigma_3 \otimes 1^3) \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right\}, \quad 1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

transfer into

$$i \frac{\partial \Phi_1(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}_1^c \Phi_1(t, \mathbf{x}), \quad \Phi_1 = U_1 \varphi,$$

$$\mathcal{H}_1^c = (\sigma_3 \otimes 1^3) E, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

From (21) it is clear that the condition (12) (with the Hamiltonian  $\mathcal{H}_1^c$ ) is satisfied for  $Q \in \{Q_1, Q_2\}$ . Of course in (11) the  $4 \times 4$  matrix  $\gamma_0$  must be substituted by the matrix  $\sigma_3 \otimes 1^3$ , and the  $4 \times 4$  spin matrices by  $\mathbf{B}$ .

1. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **6**, 133; *Theor. Math. Phys.*, 1971, **7**, 3 (in Russian).
2. Dirac P.A.M., *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th ed., Oxford, 1958.
3. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
4. Good R.H., *Phys. Rev.*, 1957, **105**, 1914.
5. Beckers J., *Nuovo Cimento*, 1965, **38**, 1362.

# On a motion equation for two particles in relativistic quantum mechanics

W.I. FUSHCHYCH

Breit [1] was the first who proposed to describe the motion for two relativistic particles by means of a semi-relativistic Dirac-type equation. The wave function of this equation has sixteen components. The possibility of covariant description of a system of particles interacting in quantum mechanics was proved by Thomas and Bakamjian [2] and Foldy [3]. In quantum field theory the two-body problem is described by means of the Bethe–Salpeter equation or the Logunov–Tavkhelidze–Kadyshevsky equations [4].

The purpose of the present note is to propose, in the framework of relativistic quantum mechanics, a new Poincaré-invariant equation for two particles with masses  $m_1, m_2$  and spin  $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ . It is a first-order linear differential equation for the eight-component wave function. With the help of this equation the description of the motion of two-particle systems is reduced to the description of one-particle systems in the  $(1 + 6)$ -dimensional Minkowski space which can be in two spin states ( $s = 0$  or  $s = 1$ ).

At first we derive the equation for two noninteracting particles. To this end we shall pass from the momenta of two particles  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  to the new canonical variables

$$\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3) = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3).$$

The connection between the variables  $\mathbf{K}$  and  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  is rather complicated (see, e.g., [5, 6]) and we do not equate it here. The total energy of the two-particle system in the variables  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{K}$  has for our discussion a very convenient structure [5, 6]

$$E = (\mathbf{P}^2 + M^2)^{1/2}, \quad M = (m_1^2 + \mathbf{K}^2)^{1/2} + (m_2^2 + \mathbf{K}^2)^{1/2}. \quad (1)$$

The square energy for the case when  $m_1 = m_2 \equiv \frac{1}{2}m$  takes the very simple form

$$E^2 = p_a^2 + p_{a+3}^2 + m^2, \quad p_a \equiv P_a, \quad p_{a+3} \equiv 2K_a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (2)$$

The square root from this expression is the equation for two particles

$$i \frac{\partial \Psi(t, x_1, x_2, \dots, x_6)}{\partial t} = \mathcal{H}(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_6) \Psi(t, x_1, x_2, \dots, x_6), \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_6) &= \Gamma_0 \Gamma_a \hat{p}_a + \Gamma_0 \Gamma_{a+3} \hat{p}_{a+3} + \Gamma_0 m, \\ \hat{p}_a &= -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad \hat{p}_{a+3} = -i \frac{\partial}{\partial x_{a+3}}, \end{aligned} \quad (4)$$

the  $8 \times 8$  matrices  $\Gamma_0, \Gamma_a, \Gamma_{a+3}$  obey a Clifford algebra, and has such a representation:

$$\Gamma_0 = \sigma_3 \otimes 1, \quad \Gamma_a = 2i\sigma_2 \otimes s_a, \quad \Gamma_{a+3} = 2i\sigma_1 \otimes \tau_a, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & s_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
s_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\
\tau_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

The  $\sigma_a$  are the Pauli matrices.

The two-particle equation (3) will be defined completely in that case if we determine both the Hamiltonian and the Poincaré generators [7]. The generators of the  $P_{1,3}$  group on  $\{\Psi\}$  have such a form:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \mathcal{H}(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_6) = \Gamma_0 \Gamma_A \hat{p}_A + \Gamma_0 m, & P_a &= p_a, & A &= 1, 2, \dots, 6, \\
J_{ab} &= M_{ab} + m_{ab} + S_{ab}, & a, b &= 1, 2, 3, \\
J_{0a} &= tp_a - \frac{1}{2}(x_a \mathcal{H} + \mathcal{H} x_a) - \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \frac{(S_{ab}^{(2)} + m_{ab}) p_b}{\sqrt{\mathcal{H}^2 + M}},
\end{aligned} \tag{6}$$

where

$$\begin{aligned}
M_{ab} &\equiv \hat{x}_a \hat{p}_b - \hat{x}_b \hat{p}_a, & m_{ab} &\equiv \hat{x}_{a+3} \hat{p}_{b+3} - \hat{x}_{b+3} \hat{p}_{a+3}, & S_{ab} &= S_{ab}^{(1)} + S_{ab}^{(2)}, \\
S_{ab}^{(1)} &= \frac{i}{4} (\Gamma_a \Gamma_b - \Gamma_b \Gamma_a), & S_{ab}^{(2)} &= \frac{i}{4} (\Gamma_{a+3} \Gamma_{b+3} - \Gamma_{b+3} \Gamma_{a+3}), \\
[\hat{x}_a, \hat{p}_b]_- &= i \delta_{ab}, & [\hat{x}_{a+3}, \hat{p}_{b+3}]_- &= i \delta_{ab}, \\
[\hat{x}_a, \hat{x}_b]_- &= [\hat{x}_a, \hat{x}_{a+3}]_- = [\hat{x}_{a+3}, \hat{x}_{b+3}]_- = 0, & [\hat{x}_a, \hat{p}_{b+3}]_- &= [\hat{x}_{a+3}, \hat{p}_b]_- = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

It can be immediately verified that the operators (6) satisfy the Poincaré algebra. It follows that eq. (3) is Poincaré invariant. If we perform the unitary transformation

$$U = \frac{(E + M + \Gamma_c p_c)(M + m + \Gamma_{c+3} p_{c+3})}{2\{ME(E + m)(M + m)\}^{1/2}} \tag{8}$$

on the operators (6), then we obtain

$$\begin{aligned}
P_0^c &= UP_0U^\dagger = \Gamma_0 E, & P_a^c &= p_a, & J_{ab}^c &= UJ_{ab}U^\dagger = J_{ab}, \\
J_{0a}^c &= tp_a - \frac{1}{2}(x_a P_0^c + P_0^c x_a) - \Gamma_0 \frac{m_{ab} p_b + S_{ab} p_b}{E + M}.
\end{aligned} \tag{9}$$

The transformed generators (9) have canonical form [2, 3]. The position operators  $X_a$  and  $X_{a+3}$  on a set  $\{\Psi\}$  look like

$$X_a = U^\dagger x_a U = x_a + \frac{S_{ab}^{(1)} p_b}{E(E + M)} + i \left( \frac{\Gamma_a}{2E} - \frac{p_a \Gamma_c p_c}{2E^2(E + M)} \right) \frac{m + \Gamma_{c+3} p_{c+3}}{M}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
X_{a+3} = U^\dagger x_{a+3} U = x_{a+3} + \frac{S_{a+3}^{(2)}}{M(M+m)} + \frac{i\Gamma_{a+3}}{2M} - \\
- i \frac{p_{a+3} \Gamma_{c+3} p_{c+3}}{2M^2(M+m)} - i \frac{p_{a+3}}{2E^2 M^2} \Gamma_c p_c (m + \Gamma_{c+3} p_{c+3}).
\end{aligned} \tag{11}$$

An interaction Hamiltonian for two particles, in the absence of external fields, can have the form

$$\mathcal{H} = \Gamma_0 \Gamma_A p_A + \Gamma_0 \{m^2 + V(r)\}^{1/2}, \tag{12}$$

where  $V(r)$  is an arbitrary function depending on  $r \equiv \sqrt{x_{c+3}^2}$ . In the special case when  $V(r) = e^4/r^2$  the interaction Hamiltonian can be written as

$$\mathcal{H} = \Gamma_0^{(16)} \Gamma_A^{(16)} p_A + \frac{e^2}{r} \Gamma_0^{(16)} \Gamma_7^{(16)} + \Gamma_0 m, \tag{13}$$

where the  $16 \times 16$  matrices  $\Gamma_0^{(16)}$ ,  $\Gamma_A^{(16)}$ ,  $\Gamma_7^{(16)}$  satisfy a Clifford algebra. An external electromagnetic field is introduced in eq. (3) in the following way:

$$p_a \rightarrow \pi_a = p_a - e\mathcal{A}_a(t, x_1, x_2, x_3), \quad p_{a+3} \rightarrow \pi_{a+3} = p_{a+3} - e\mathcal{A}_{a+3}(t, x_4, x_5, x_6).$$

An extraction of the positive solutions from eq. (3) is realized by means of the subsidiary condition

$$\left(1 - \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}}\right) \Psi = 0 \quad \text{or} \quad \left(1 - \frac{\Gamma_\mu p^\mu}{\sqrt{p_\mu^2}}\right) \Psi = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, 6.$$

It is evident that these conditions are invariant under the Poincaré group.

It should be noted that the function  $V(r)$  may be of arbitrary form, therefore the relative velocity  $\mathcal{V}_{a+3}$ ,

$$\hat{\mathcal{V}}_{a+3} \Psi \equiv -i[X_{a+3}, \mathcal{H}] \Psi = \mathcal{V}_{a+3} \Psi, \tag{14}$$

with respect to the centre-of-mass may be arbitrary. To do  $\mathcal{V}_{a+3}$  smaller than the photon velocity it is necessary to impose the condition

$$\mathcal{V}_{a+3}^2 = \mathcal{V}_4^2 + \mathcal{V}_5^2 + \mathcal{V}_6^2 < 1.$$

These questions will be considered in more detail in another paper.

Finally we shall find the equation for two particles with mass  $m_1 \neq m_2$ . Let us, with Kadyshevsky et al. [8], represent  $M$  in such a form

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1 m_2}} (m_1 m_2 + \mathbf{K}'^2)^{1/2}, \tag{15}$$

where

$$\mathbf{K}'^2 = -m_1 m_2 + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \left( \sqrt{m_1^2 + \mathbf{K}^2} + \sqrt{m_2^2 + \mathbf{K}^2} \right)^2. \tag{16}$$

In the variables  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{K}'$  formula (2) can be rewritten as

$$E^2 = \mathbf{P}^2 + \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_1 m_2} \mathbf{K}'^2 + (m_1 + m_2)^2. \quad (17)$$

It follows that the equation of motion for the two particles is

$$i \frac{\partial \Psi(t, x_1, \dots, x_6)}{\partial t} = \left\{ \Gamma_0 \Gamma_a \hat{p}_a + \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{m_1 m_2}} \Gamma_0 \Gamma_{a+3} \hat{p}_{a+3} + (m_1 + m_2) \Gamma_0 \right\} \Psi(t, x_1, \dots, x_6), \quad (18)$$

$$\hat{p}_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad \hat{p}_{a+3} \equiv \hat{\mathbf{K}}'_a = -i \frac{\partial}{\partial x_{a+3}}.$$

In this equation  $\Psi$  is also an eight-component function.

I wish to thank A.G. Nikitin, A.L. Grishchenko for useful comments and N.V. Hnatjuk for helpful reading the manuscript.

1. Breit G., *Phys. Rev.*, 1929, **34**, 553.
2. Bakamjian B., Thomas L.H., *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 1300.
3. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1961, **122**, 289.
4. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N., *Nuovo Cimento*, 1963, **29**, 380;  
Kadyshevsky V.G., *Nucl. Phys.*, 1968, **36**, 125.
5. Fong R., Sucher J., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 456.
6. Osborn H., *Phys. Rev.*, 1968, 176, 1514.
7. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **6**, 133.
8. Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M., *J. Nucl. Phys.*, 1970, **11**, 692 (in Russian).

# Poincaré-invariant equations with a rising mass spectrum

W.I. FUSHCHYCH

In recent years many papers have been devoted to the construction of infinite-component wave equations to describe properly the spectrum of strongly interacting particles [1, 2]. As a rule, the derived equations have a number of pathological properties: the unrealistic mass spectra, the appearance of spacelike solutions ( $p_\mu^2 < 0$ ), the breakdown of causality etc. [2].

In this note we shall construct, in the framework of relativistic quantum mechanics, the Poincaré-invariant motion equations with realistic mass spectra. These equations describe a system with mass spectra of the form  $m^2 = a^2 + b^2 s(s+1)$ , where  $a$  and  $b$  are arbitrary parameters. Such equations are obtained by a reduction of the motion equation for two particles to a one-particle equation which describes the particle in various mass and spin states. If we impose a certain condition on the wave function of the derived equation, such an equation describes the free motion of a fixed-mass particle with arbitrary (but fixed) spin  $s$ .

Let us consider the motion equation for two free particles with masses  $m_1 = m_2 = m$  and spins  $s_1$  and  $s_2$  in the Thomas–Bakamjian–Foldy form [3]

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial t} = (P_a^2 + M^2)^{1/2} \Phi(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad (1)$$

where

$$P_a = p_a^{(1)} + p_a^{(2)}, \quad M = 2(m^2 + \mathbf{k}^2)^{1/2},$$

$p_a^{(1)}$ ,  $p_a^{(2)}$  are components of the momenta of the two particles,  $\mathbf{k}$  the relative momentum,  $\mathbf{x}$  the co-ordinate of the centre of mass,  $\boldsymbol{\xi}$  is the relative co-ordinate.

On the manifold of solutions  $\{\Phi\}$  of eq. (1) the generators of the Poincaré group  $P_{1,3}$  have the form

$$\begin{aligned} P_0 &= (P_a^2 + M^2)^{1/2}, & P_a &= p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, & a &= 1, 2, 3, \\ J_{ab} &= M_{ab} + L_{ab}, & M_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a, & L_{ab} &= m_{ab} + S_{ab}, \\ m_{ab} &= \xi_a k_b - \xi_b k_a, & S_{ab} &= s_{ab}^{(1)} + s_{ab}^{(2)}, & [x_a, p_b]_- &= i \delta_{ab}, \\ [\xi_a, k_b]_- &= i \delta_{ab}, & [\xi_a, p_b]_- &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

where  $s_{ab}^{(1)}$  and  $s_{ab}^{(2)}$  are the spin matrices satisfying the Lie algebra of the rotation group  $O_3$ .

Equation (1) is invariant with respect to algebra (2) since the condition

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - (P_a^2 + M^2)^{1/2}, J_{\mu\nu} \right] \Phi = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (3)$$

is satisfied. In spherical co-ordinates the operator  $\mathbf{k}^2$  is

$$\mathbf{k}^2 = \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} m_{ab}^2, \quad \xi \equiv \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad (4)$$

where  $m_{ab}$  is the square of the angular momentum with respect to the centre of mass.

Let us impose on the function  $\Phi(t, \mathbf{x}, \xi, \theta, \varphi)$  the condition

$$\frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi)}{\partial \xi} = 0. \quad (5)$$

This condition means that the wave function  $\Phi$  constant on the sphere of radius  $r_0 = \xi \equiv \sqrt{\xi^2}$  with respect to internal variables  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . If we take into account the condition (5), eq. (1) now becomes

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi)}{\partial t} = \left( p_a^2 + 4m^2 + \frac{4}{r_0^2} m_{ab}^2 \right)^{1/2} \Phi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi). \quad (6)$$

Equation (6) may yield the mass spectrum only for the bosons so that  $m_{ab}$  should be replaced by  $L_{ab}$ . Having done this, we obtain the equation

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi)}{\partial t} = \left( p_a^2 + 4m^2 + \frac{4}{r_0^2} L_{ab}^2 \right)^{1/2} \Phi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi). \quad (7)$$

Equation (7) shows that the mass operator  $M^2 = P_0^2 - P_a^2$  has on the set  $\{\Phi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi)\}$  the discrete mass spectrum of the form

$$M^2 \Phi = \left( 4m^2 + \frac{4}{r_0^2} L_{ab}^2 \right) \Phi = \left\{ 4m^2 + \frac{4}{r_0^2} s(s+1) \right\} \Phi, \quad (8)$$

where

$$s = 0, 1, 2, \dots \quad \text{if} \quad L_{ab} = m_{ab} = \xi_a k_b - \xi_b k_a, \quad (9)$$

$$s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \quad \text{if} \quad L_{ab} = \xi_a k_b - \xi_b k_a + S_{ab}, \quad (10)$$

$S_{ab} = \sigma_c/2$ ,  $\sigma_c$  are the  $2 \times 2$  Pauli matrices.

In the case (9) the operator  $M^2$  has a simple spectrum. In the case (10) the spectrum of  $M^2$  is twofold degenerated. In the general case the measure of the degeneracy depends on the dimension of the matrices  $S_{ab}$  realizing representations of the group  $O_3$ .

If we suppose that the energy operator  $P_0$  can have both the positive and negative spectrum, then for fermions (the spectrum (10)) we find the equation

$$p_0 \Phi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi) = \gamma_0 \left( p_a^2 + 4m^2 + \frac{4}{r_0^2} L_{ab}^2 \right)^{1/2} \Phi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi), \quad (11)$$

$$p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

where  $\Phi$  is the four-component wave function. The integro-differential equation (11) may be written in the symmetrical form with respect to the operators  $p_0, p_a$  if the transformation [4] is carried out on it

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right), \quad \mathcal{H} = \gamma_0 \gamma_c p_c + \gamma_0 \gamma_4 (a^2 + b^2 L_{cd}^2)^{1/2}, \quad c, d = 1, 2, 3, \quad (12)$$

where  $\gamma_0, \gamma_c, \gamma_4$  are the  $4 \times 4$  Dirac matrices,  $a^2 = 4m^2, b^2 = 4/r_0^2$ . After the transformation (12), eq. (11) takes the form

$$p_0 \Psi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi) = \left\{ \gamma_0 \gamma_c p_c + \gamma_0 \gamma_4 (a^2 + b^2 L_{cd}^2)^{1/2} \right\} \Psi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi), \quad (13)$$

$$\Psi = \mathcal{U} \Phi.$$

We now summarize that eq. (7) describes a boson system with increasing mass spectrum if the operator  $L_{ab}$  has the form (9). Equation (13) (or eq. (7)) describes a fermion system with increasing mass spectrum if the operator  $L_{ab}$  has the form (10).

The four-component eq. (13) (or (7)) may be used for describing the free motion of a particle of nonzero mass with arbitrary half-integer spin  $s$ . Indeed, to do this it is sufficient to impose the Poincaré-invariant condition on the wave function  $\Psi$ , picking up a fixed spin from the whole discrete spectrum (10).

This condition has the form

$$\frac{1}{M^2} W_\mu W^\mu \Psi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi) = L_{ab}^2 \Psi(t, \mathbf{x}, \theta, \varphi) = s(s+1) \Psi, \quad (14)$$

where

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\nu J^{\alpha\beta}, \quad (15)$$

$s$  is an arbitrary but fixed number from the set (10).

Equations (7), (13) may be obtained in another way. Let us consider the equation

$$i \frac{\partial \Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_6)}{\partial t} = (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_6^2 + \varkappa^2)^{1/2} \Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_6), \quad (16)$$

where  $p_k = -i(\partial/\partial x_k), k = 1, 2, \dots, 6, \varkappa$  is a constant. The equation is invariant under the generalized Poincaré group  $P_{1,6}$  [5].

$P_{1,6}$  is the group of rotations and translations in  $(1+6)$ -dimensional Minkowski space. Equation (16) is invariant with respect to the algebra [5]

$$P_0 = p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_k = p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (17)$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, 6.$$

Equation (16), together with the supplementary condition of the type (5), is equivalent to eq. (7). This may be shown by passing from the variables  $x_4, x_5, x_6$  to the new variables  $\xi, \theta, \varphi$ . It is to be emphasized, however, that the supplementary condition of the type (5) breaks down the invariance with respect to the whole group  $P_{1,6}$  but conserves the invariance relative to its subgroup  $P_{1,3} \subset P_{1,6}$ .

**Note 1.** On the set  $\{\Phi\}$  besides the representations of the Poincaré algebra  $P_{1,3}$  (the external algebra), we may construct one more algebra of Poincaré  $K_{1,3}$  (the internal algebra). The representation of the algebra  $K_{1,3}$  has the following form:

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{2}M, & K_a &= k_a = -i\frac{\partial}{\partial\xi_a}, & L_{ab} &= m_{ab} + S_{ab}, \\ m_{ab} &= \xi_a k_b - \xi_b k_a, & L_{0a} &= -\frac{1}{2}(\xi_a K_0 + K_0 \xi_a) - \frac{S_{ab}k_b}{K_0 + m}. \end{aligned} \quad (18)$$

This algebra describes an intrinsic relative motion of the two-particle system with respect to the centre of mass. The algebra  $P_{1,3}$  describes a motion of the centre of mass. Equations (7), (13) are not invariant in respect to the whole algebra  $K_{1,3}$ .

**Note 2.** We note that the results obtained do not contradict the O’Raifeartaigh’s theorem [6] since the operators (2) of the algebra  $P_{1,3}$  together with the operators (18) of the algebra  $K_{1,3}$  form the infinite-dimensional Lie algebra.

**Note 3.** Equation (13) jointly with tin condition (14) for the case  $s = \frac{1}{2}$  is equivalent to the ordinary four-component Dirac equation for the particle with the spin  $s = \frac{1}{2}$ .

1. Majorana E., *Nuovo Cimento*, 1932, **9**, 355;  
Nambu Y., *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 1966, **37-38**, 368;  
Fronsdal C., *Phys. Rev.*, 1967, **156**, 1665;  
Barut A.O., Corrigan D., Kleinert H., *Phys. Rev.*, 1968, **167**, 1527.
2. Chodos A., *Phys. Rev. D.*, 1970, **1**, 2973 (The reader will find an extensive list of further references in it).
3. Bakamjian B., Thomas L.H., *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 1300;  
Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1961, **122**, 289.
4. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, 508.
5. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79; 1969, **14**, 573;  
Fushchych W.I., *Theor. Math. Phys.*, 1970, **4**, 360 (in Russian).
6. O’Raifeartaigh L., *Phys. Rev.*, 1965, **14**, 575.

# On the Poincaré-invariant equations for particles with variable spin and mass

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

The Poincaré-invariant equations without redundant components, describing the motion of a particle which can be in different spin and mass states are obtained. The quasi-relativistic equation for a particle with arbitrary spin in external electromagnetic field is found. The group-theoretical analysis of these equations is carried out.

## 1. Introduction

Many papers are devoted to the problem of construction of relativistic equations for a particle which can be in different spin and mass states. There are various approaches to this problem. The fundamentals of the equation theory describing a particle with an infinite number of spin states have been developed by Majorana [12], and later by Gelfand and Yaglom [8] who used infinite-dimensional unitary representations of the homogeneous Lorentz group  $O(1, 3)$ . (For the actual situation of this theory see e.g. [10].) In other works [1, 9, 17] the wave function of such a particle is supposed to possess some additional variables (inner degrees of freedom) besides three space variables. On the basis of this assumption some relativistic equations for particles with variable spin and mass (for instance, for particles of rotator type) are constructed. By extending the four-dimensional Minkowsky space to the five-dimensional one and by using the representations of the inhomogeneous de Sitter group  $P(1, 4)$  which includes the Poincaré group  $P(1, 3)$  as a sub-group, equations were derived [4, 6, 7] which can be interpreted as the motion equations for a particle (or for a system of two particles) with variable discrete spin and variable continuous mass. In contrast to the above-mentioned papers [1, 8, 17], where a particle has always an infinite number of spin states, in the framework of the group  $P(1, 4)$  the particle has only a finite number of spin states. This is connected with the fact that any irreducible representation of the group  $O(4)$  which is a small group of the group  $P(1, 4)$  is decomposed into a finite direct sum of irreducible representations of the rotation group  $O(3)$ .

In the present paper, without going beyond the scope of the Poincaré group and using the irreducible representations of the group  $O(4)$ , we find the relativistic equations of motion in the Schrödinger form, describing a particle which can be in finite spin states. The spin  $s$  of such a particle can take the values

$$|j - \tau| \leq s \leq j + \tau, \quad (1.1)$$

where  $j$  and  $\tau$  are the integers or half-integers labelling the irreducible representations of the group  $O(4)$ . The particle mass  $m$  can be either fixed or given by the formulas

$$m = a_1 + b_1 \cdot s(s + 1) \quad \text{or} \quad m^2 = a_2^2 + b_2^2 \cdot s(s + 1), \quad (1.2)$$

where  $a_1, a_2, b_1, b_2$  are constants. The wave functions in the motion equation obtained have  $2(2j + 1)(2\tau + 1)$  components which corresponds to the number of the degrees

of freedom of the system described. This means that the equations proposed do not contain redundant components and hence do not lead to the well-known difficulties [15, 18, 19].

For the construction of the equations the algebraic (nonspinor) approach developed in [5, 11, 13, 16, 20] is used. The group-theoretical analysis of the equations is performed not in terms of the Lorentz group  $O(1, 3)$  representations used traditionally but in terms of the Poincaré group  $P(1, 3) \supset O(1, 3)$  representations. This is stipulated by the fact that only the invariants of the group  $P(1, 3)$  have distinct physical meaning.

## 2. Statement of the problem

We shall investigate the equations for a particle with variable spin and mass in the form

$$i \frac{\partial \Psi(t, \vec{x})}{\partial t} = H_{j\tau} \Psi(t, \vec{x}), \quad (2.1)$$

where  $H_{j\tau}$  is the unknown operator function (the Hamiltonian of a particle) which depends on the momenta and spin matrices,  $\Psi$  is the wave function which transforms under the four-dimensional rotations and translations according to the reducible representation of the group  $P(1, 3)$  and contains  $2(2j+1)(2\tau+1)$  components. In the previous paper [5] describing (up to unitary equivalence) all the Poincaré-invariant equations of the form (2.1) for a particle with fixed mass  $m$  and fixed spin  $s$  we imposed the conditions

$$P_\mu P^\mu \Psi(t, \vec{x}) = m^2 \Psi(t, \vec{x}); \quad (2.2)$$

$$W_\mu W^\mu \Psi(t, \vec{x}) = m^2 s(s+1) \Psi(t, \vec{x}) \quad (2.3)$$

on the solutions of equation (2.2), where  $P_\mu$  is the energy-momentum operator on the mass shell and  $W_\mu$  is the Pauli-Lubansky vector. If the spin and mass of a particle are not fixed, conditions (2.2), (2.3) should be omitted.

We resolve the problem of finding the Poincaré-invariant equations of the form (2.1) using two different approaches. This is connected with the fact that the equations obtained using the first approach may prove to be convenient in terms of quantum mechanics and the equations derived in the second approach are useful in terms of field theory.

In the first approach (I) the problem is reduced to the following: one has to find all Hamiltonians  $H_{j\tau}^I$  such that the operators

$$P_0^I = H_{j\tau}^I, \quad P_a^I = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}; \quad (2.4)$$

$$J_{ab}^I = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad J_{0a}^I = t p_a - \frac{1}{2} [x_a, P_0^I]_+$$

should satisfy the Poincaré algebra. The matrices  $S_{ab}$ , have the following structure

$$S_{ab} = j_c + \tau_c, \quad j_c = \begin{pmatrix} \hat{j}_c & 0 \\ 0 & \hat{j}_c \end{pmatrix}, \quad \tau_c = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_c & 0 \\ 0 & \hat{\tau}_c \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

where  $\hat{j}_c$  and  $\hat{\tau}_c$  are the  $(2j+1)(2\tau+1)$ -dimensional matrices satisfying the commutation relations of the algebra  $O(4)$

$$[\hat{j}_a, \hat{j}_b]_- = i\hat{j}_c, \quad [\hat{\tau}_a, \hat{\tau}_b]_- = i\hat{\tau}_c, \quad [\hat{j}_a, \hat{\tau}_b]_- = 0;$$

$(a, b, c)$  is the cycle  $(1, 2, 3)$ ,

$$\hat{j}_a^2 = j(j+1), \quad \hat{\tau}_a^2 = \tau(\tau+1). \quad (2.6)$$

In the second approach (II) the problem<sup>1</sup> is formulated as follows: one has to find all the Hamiltonians  $H_{j\tau}^{\text{II}}$  such that the operators

$$\begin{aligned} P_0^{\text{II}} &= H_{j\tau}^{\text{II}}, & P_a^{\text{II}} &= p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}; \\ J_{ab}^{\text{II}} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{0a}^{\text{II}} &= t p_a - x_a P_0^{\text{II}} + i \sigma_3 S_{4a} \end{aligned} \quad (2.7)$$

should satisfy the Poincaré algebra.

Here

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad S_{4a} = j_a + \lambda_a, \quad \lambda_a = \pm \tau_a, \quad (2.8)$$

$I$  is the  $(2j+1)(2\tau+1)$ -dimensional unit matrix. In particular, when  $j=0$ ,  $\tau = \frac{1}{2}$ , the operators (2.4) and (2.7) coincide, since

$$H_{0\frac{1}{2}}^{\text{I}} = H_{0\frac{1}{2}}^{\text{II}} = \sigma_1 m + 2\sigma_3 \vec{\tau} \cdot \vec{p}. \quad (2.9)$$

The operator (2.9) is the Dirac Hamiltonian. For other numbers  $j$  and  $\tau$ , as will be shown later, the representations (2.4) and (2.7) do not coincide. The choice of the representation structures for the algebra  $P(1,3)$  in the form (2.4) and (2.7) is stipulated by the fact that on the set of solutions of the Dirac equation the Poincaré algebra may be represented either in the form (2.4) or (2.7). One of the principal differences between the operators (2.4) and (2.7) consists in the fact that all the operators (2.4) are Hermitian with respect to the usual scalar product

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger(t, \vec{x}) \Psi_2(t, \vec{x}), \quad (2.10)$$

while the operators (2.7) are non-Hermitian with respect to (2.10). But the operators (2.7) are Hermitian with respect to the scalar product

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger(t, \vec{x}) \hat{M} \Psi_2(t, \vec{x}), \quad (2.11)$$

where  $\hat{M}(j, \tau, p)$  is some metric operator whose form will be found later.

Equation (2.1) will obviously be Poincaré-invariant if the operators (2.4) or (2.7) satisfy the Poincaré algebra, as in this case the condition

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - H_{j\tau}, \exp(i\omega Q) \right]_- \Psi(t, \vec{x}) = 0 \quad (2.12)$$

is satisfied, where  $Q$  is an arbitrary generator and  $\omega$  is the parameter of the group  $P(1,3)$ . For the infinitesimal transformations this condition takes the form

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - H_{j\tau}, Q \right]_- \Psi(t, \vec{x}) = 0. \quad (2.13)$$

<sup>1</sup>The operators with indices I and II refer to the approaches I and II, respectively. When these indices are omitted, the corresponding relations are true both for the approach I and the approach II.

On the set  $\{\Psi\}$  of the solutions of (2.1) we define the operators of discrete transformations

$$\begin{aligned} P\Psi(t, \vec{x}) &= r_1\Psi(t, -\vec{x}); \\ T\Psi(t, \vec{x}) &= r_2\Psi^*(-t, \vec{x}); \\ C\Psi(t, \vec{x}) &= r_3\Psi^*(t, \vec{x}), \end{aligned} \tag{2.14}$$

where  $r_1, r_2, r_3$  are the matrices which can be chosen (without loss of generality) in the form

$$\begin{aligned} r_1^I &= \sigma_1 \quad \text{or} \quad r_1^I = \hat{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad r_1^{II} = \sigma_1; \\ r_2^I &= r_2^{II} = \Delta, \quad r_3^I = r_3^{II} = \sigma_2\Delta, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta' & 0 \\ 0 & \Delta' \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

where  $\Delta'$  is the matrix satisfying the relations

$$\Delta' \hat{j}_a = -\hat{j}_a \Delta', \quad \Delta' \hat{\tau}_a = -\hat{\tau}_a^* \Delta'. \tag{2.16}$$

The proof of existence of such a matrix is not given here.

The operators  $P, T, C$  and the generators  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  must satisfy the relations

$$\begin{aligned} [P, P_0]_- &= [P, P_a]_+ = [P, J_{ab}]_- = [P, J_{0a}]_+ = [C, P_a]_+ = [C, P_0]_+ = 0; \\ [C, J_{ab}]_+ &= [C, J_{0a}]_+ = [T, P_0]_- = [T, P_a]_+ = [T, J_{ab}]_+ = [T, J_{0a}]_- = 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Let equation (2.1) be invariant under  $P, T, C$ -transformations. In this case the relations (2.17) must be added to the Poincaré algebra.

Thus *the problem of finding all the Poincaré-invariant equations for a particle with variable spin and mass is reduced to that of finding the operators  $H_{j\tau}$  which satisfy the relations*

$$[H_{j\tau}, P_a]_- = [H_{j\tau}, J_{0a}]_- = 0, \quad [P_a, J_{0b}]_- = i\delta_{ab}H_{j\tau}; \tag{2.18}$$

$$[J_{ab}, J_{0c}]_- = i(\delta_{ac}J_{0b} - \delta_{bc}J_{0a});$$

$$[H_{j\tau}, J_{0a}]_- = ip_a; \tag{2.19}$$

$$[J_{0a}, J_{0b}]_- = -iJ_{ab}; \tag{2.20}$$

$$[P, H_{j\tau}]_- = [C, H_{j\tau}]_+ = [T, H_{j\tau}]_- = 0. \tag{2.21}$$

### 3. Explicit form of the operators $H_{j\tau}^I$

In this section we solve problem I, i.e. we find those operators  $H_{j\tau}^I$  which satisfy the set of relations (2.18)–(2.21) in the case where the representation of the Poincaré algebra has the structure (2.4).

The squared-mass operator for the representation (2.4) (which, generally speaking, is not a multiple of the unit one) is of the form

$$M^2 = P_\mu P^\mu = (H_{j\tau}^I)^2 - p^2. \tag{3.1}$$

The commutativity of  $M^2$  with the operators (2.4) and (2.14) yields the following relations

$$[P_a, M^2]_- = [x_a, M^2]_- = [(j_a + \tau_a), M^2]_- = 0; \quad (3.2)$$

$$[P, M^2]_- = [C, M^2]_- = [T, M^2]_- = 0; \quad (3.3)$$

$$[H_{j\tau}^1, M^2]_- = 0. \quad (3.4)$$

From (2.14), (2.15), (2.16) it follows that the general form of the operator  $M^2$  satisfying the conditions (3.2), (3.3) is given by the formula

$$M^2 = a_0 + a_1(\vec{j} \cdot \vec{\tau}) + a_2(\vec{j} \cdot \vec{\tau})^2 + \dots, \quad (3.5)$$

where  $a_0, a_1, \dots$  are real numbers. The series (3.5) contains only a finite number of terms, as follows from the relation

$$\prod_{|j-\tau| \leq s \leq j+\tau} [\vec{j} \cdot \vec{\tau} - \varkappa_s] = 0, \quad (3.6)$$

where  $\varkappa_s$  is the eigenvalue of the operator  $\vec{j} \cdot \vec{\tau}$ . Between the numbers  $\varkappa_s$  and  $j, \tau, s$  there is the relation

$$2\varkappa_s = -j(j+1) - \tau(\tau+1) + s(s+1). \quad (3.7)$$

From (3.6) it is seen that the particle system capable of being in different mass states may be compared with the representation (2.4) and hence with the equation (2.1). As will be shown later, with a proper choice of the coefficients  $a_n$  in (3.5) we can obtain the mass formula (1.2).

In order to find the explicit structure of the operator  $H_{j\tau}^1$  satisfying relations (2.18)–(2.21) and condition (3.1) we expand it in a complete system of ortoprojectors

$$H_{j\tau}^1 = \sum_{j_3 \tau_3} (d_{j_3 \tau_3}^1(p) + \sigma_1 g_{j_3 \tau_3}^1(p) + \sigma_2 h_{j_3 \tau_3}^1(p) + \sigma_3 f_{j_3 \tau_3}^1(p)) \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, \quad (3.8)$$

where

$$\Lambda_{j_3} = \prod_{j_3 \neq j'_3} \frac{j_p - j'_3}{j_3 - j'_3}, \quad \Lambda_{\tau_3} = \prod_{\tau_3 \neq \tau'_3} \frac{\tau_p - \tau'_3}{\tau_3 - \tau'_3}, \quad (3.9)$$

$$j_p = \frac{\vec{j} \cdot \vec{p}}{p}, \quad \tau_p = \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{p}}{p}, \quad j_3 = -j, -j+1, \dots, j, \quad \tau_3 = -\tau, -\tau+1, \dots, \tau,$$

$d_{j_3 \tau_3}^1, h_{j_3 \tau_3}^1, f_{j_3 \tau_3}^1, g_{j_3 \tau_3}^1$  are the unknown functions which depend on  $p$  and  $M$ .

It is easy to see that the operators (3.9) are the orthoprojectors on the proper subspaces of the operators  $j_p$  and  $\tau_p$ , i.e. they satisfy the relations

$$\begin{aligned} \Lambda_{j_3} \Lambda_{j'_3} &= \delta_{j_3 j'_3} \Lambda_{j'_3}; & \sum_{j_3=-j}^j \Lambda_{j_3} &= 1; & j_p &= \sum_{j_3=-j}^j j_3 \Lambda_{j_3}; \\ \Lambda_{\tau_3} \Lambda_{\tau'_3} &= \delta_{\tau_3 \tau'_3} \Lambda_{\tau'_3}; & \sum_{\tau_3=-\tau}^{\tau} \Lambda_{\tau_3} &= 1; & \tau_p &= \sum_{\tau_3=-\tau}^{\tau} \tau_3 \Lambda_{\tau_3}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

The condition (2.21) is satisfied if

$$\begin{aligned} d_{j_3\tau_3}^I &= h_{j_3\tau_3}^I = 0; & f_{j_3\tau_3}^I &= f_{-j_3-\tau_3}^I; & g_{j_3\tau_3}^I &= g_{-j_3-\tau_3}^I & \text{for } r_1^I &= \hat{I}, \\ d_{j_3\tau_3}^I &= h_{j_3\tau_3}^I = 0; & f_{j_3\tau_3}^I &= -f_{-j_3-\tau_3}^I; & g_{j_3\tau_3}^I &= g_{-j_3-\tau_3}^I & \text{for } r_1^I &= \sigma_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

In order that (3.4) be fulfilled with an arbitrary choice of the coefficients  $a_n$  in (3.6), it is necessary to set

$$f_{j_3\tau_3}^I = \varphi_1(j_3 + \tau_3), \quad g_{j_3\tau_3}^I = \varphi_2(j_3 + \tau_3), \quad (3.12)$$

i.e.  $f_{j_3\tau_3}^I, g_{j_3\tau_3}^I$  may depend only on the sum of the indices. If (3.12) is not fulfilled, then the operator  $M^2$  commutes with the Hamiltonian (the condition (3.4)) only in the case where  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$ .

The condition (3.1) imposes the additional restriction

$$(f_{j_3\tau_3}^I)^2 + (g_{j_3\tau_3}^I)^2 = p^2 + M^2 \quad (3.13)$$

on the functions  $f_{j_3\tau_3}^I$  and  $g_{j_3\tau_3}^I$ . Direct verification shows that if the conditions (3.4), (3.13) are fulfilled, the relations (2.18), (2.19), (2.21) are satisfied. Thus, it remains to satisfy the relation (2.18) which together with (3.11)–(3.13) will determine the ultimate structure of the operator  $H_{j\tau}^I$ , i.e. the explicit form of the functions  $f_{j_3\tau_3}^I$  and  $g_{j_3\tau_3}^I$ .

The relations (2.20) for the operator (2.4) may be reduced to the form [5]

$$[[H_{j\tau}^I, x_a]_-, [H_{j\tau}^I, x_b]_-]_- = -4iS_{ab}. \quad (3.14)$$

Substituting (3.8) into (3.14), using the commutation relations (A.1) and taking into account the linear independence of the vectors (A.2), we obtain the following equations for  $f_{j_3\tau_3}^I, g_{j_3\tau_3}^I$

$$g_{j_3\tau_3}^I g_{j_3+1\tau_3}^I + f_{j_3\tau_3}^I f_{j_3+1\tau_3}^I = g_{j_3\tau_3}^I g_{j_3\tau_3+1}^I + f_{j_3\tau_3}^I f_{j_3\tau_3+1}^I = M^2 - p^2. \quad (3.15)$$

From (3.13) it is seen that the functions  $g_{j_3\tau_3}^I, f_{j_3\tau_3}^I$  can be represented in the form

$$f_{j_3\tau_3}^I = E \sin \varphi_{j_3\tau_3}, \quad g_{j_3\tau_3}^I = E \cos \varphi_{j_3\tau_3}, \quad E = \sqrt{p^2 + M^2}. \quad (3.16)$$

Inserting (3.16) into (3.15), we obtain for  $\varphi_{j_3\tau_3}$  the following recurrence formulas

$$\varphi_{j_3+1\tau_3} = \varphi_{j_3\tau_3} \pm 2\theta^I, \quad \varphi_{j_3\tau_3+1} = \varphi_{j_3\tau_3} \pm 2\theta^I, \quad \theta^I = \arctg \frac{P}{M}. \quad (3.17)$$

By means of (3.16), (3.17) we can define all the coefficients  $g_{j_3\tau_3}^I, f_{j_3\tau_3}^I$  of the operator (3.8) if at least one of the functions of the set  $f_{j_3\tau_3}^I$  (or  $g_{j_3\tau_3}^I$ ) is known. This initial function can be found from the relations (3.17), (3.11) which, taking into account (3.16), can be written in the form:

$$\varphi_{j_3\tau_3} = \begin{cases} \varphi_{-j_3-\tau_3} & \text{for } r_1^I = I; \\ -\varphi_{-j_3-\tau_3} & \text{for } r_1^I = \sigma_1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Finally, we are led to the following result: the operator (3.8) with coefficient functions (3.16), (3.17) satisfies the relations (2.18)–(2.21) and this means that the problem I is

completely solved. The equation (2.1) with such  $H_{j\tau}^1$  will be invariant with respect to the full Poincaré group  $\tilde{P}(1,3)$ .

Let us present the simplest solutions for the system of the recurrence relations (3.17), (3.18) (for the details of the solutions for equations such as (3.15) see [5])

$$\varphi_{j_3\tau_3} = \begin{cases} (-1)^{j_3+\tau_3+\frac{1}{2}}\theta^l, & j + \tau - \text{half-integers,} \\ (-1)^{j_3+\tau_3}\theta^l, & j + \tau - \text{integers,} \\ 2(j_3 + \lambda_3)\theta^l, \lambda_3 = \pm\tau_3, & j + \tau - \text{arbitrary numbers.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Substituting (3.19), (3.11), (3.16) into (3.8), we obtain

$$H_{j\tau}^1 = \begin{cases} \sigma_1 M + \sigma_3 \sum_{j_3\tau_3} p(-1)^{j_3+\tau_3+\frac{1}{2}} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, & j + \tau - \text{half-integers,} \\ \sigma_1 M + \sigma_3 \sum_{j_3\tau_3} p(-1)^{j_3+\tau_3} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, & j + \tau - \text{integers,} \\ E \sum_{j_3\tau_3} \{ \sigma_1 \cos [2(j_3 + \lambda_3)\theta^l] + \\ + \sigma_3 \sin [2(j_3 + \lambda_3)\theta^l] \} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, & j + \tau - \text{arbitrary numbers.} \end{cases} \quad (3.20a)$$

$$H_{j\tau}^1 = \begin{cases} \sigma_1 M + \sigma_3 \sum_{j_3\tau_3} p(-1)^{j_3+\tau_3+\frac{1}{2}} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, & j + \tau - \text{half-integers,} \\ \sigma_1 M + \sigma_3 \sum_{j_3\tau_3} p(-1)^{j_3+\tau_3} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, & j + \tau - \text{integers,} \\ E \sum_{j_3\tau_3} \{ \sigma_1 \cos [2(j_3 + \lambda_3)\theta^l] + \\ + \sigma_3 \sin [2(j_3 + \lambda_3)\theta^l] \} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, & j + \tau - \text{arbitrary numbers.} \end{cases} \quad (3.20b)$$

Choosing other solutions of the system (3.17), (3.18) we arrive at Hamiltonians which are unitarily equivalent to (3.20) but differ from them in form.

Let us write the explicit expressions for the operators (3.20) in terms of  $\vec{j} \cdot \vec{p}$ ,  $\vec{\tau} \cdot \vec{p}$  for  $j, \tau \leq 1$ . Using (3.9), (3.20a), we find

$$\begin{aligned} H_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^1 &= \sigma_1 M + 2\sigma_3 (\vec{\tau} \cdot \vec{p}) (\vec{j} \cdot \vec{p}) p^{-1}; \\ H_{\frac{1}{2}1}^1 &= H_{\frac{1}{2}0}^1 - 4\sigma_3 (\vec{j} \cdot \vec{p}) (\vec{\tau} \cdot \vec{p})^2 p^{-2}; \\ H_{11}^1 &= -H_{00}^1 + H_{10}^1 + H_{01}^1 + 2\sigma_3 (\vec{j} \cdot \vec{p})^2 (\vec{\tau} \cdot \vec{p})^2 p^{-3}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

where

$$\begin{aligned} H_{00}^1 &= \sigma_1 M + \sigma_3 p; & H_{\frac{1}{2}0}^1 &= \sigma_1 M + 2\sigma_3 (\vec{j} \cdot \vec{p}); \\ H_{01}^1 &= H_{00}^1 - 2\sigma_3 (\vec{\tau} \cdot \vec{p})^2 p^{-1}; & H_{10}^1 &= H_{00}^1 - 2\sigma_3 (\vec{j} \cdot \vec{p})^2 p^{-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

are the Hamiltonians of particles with the fixed spin found earlier in [5].

Substituting (3.10) into (3.20b), we obtain

$$\begin{aligned} H_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^1 &= H_{\frac{1}{2}0}^1 \sigma_3 H_{0\frac{1}{2}}^1 E^{-1}; \\ H_{\frac{1}{2}1}^1 &= H_{\frac{1}{2}0}^1 \sigma_3 H_{0\frac{1}{2}}^1 E^{-1}; \\ H_{11}^1 &= H_{10}^1 \sigma_3 H_{01}^1 E^{-1}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

where

$$\begin{aligned} H_{0\frac{1}{2}}^1 &= \sigma_1 M + 2\sigma_3 (\vec{\lambda} \cdot \vec{p}); & H_{\frac{1}{2}0}^1 &= \sigma_1 M + 2\sigma_3 (\vec{j} \cdot \vec{p}); \\ H_{01}^1 &= \sigma_1 E + 2(\vec{\lambda} \cdot \vec{p}) [\sigma_3 M - \sigma_1 (\vec{\lambda} \cdot \vec{p})] E^{-1}; \\ H_{10}^1 &= \sigma_1 E + 2(\vec{j} \cdot \vec{p}) [\sigma_3 M - \sigma_1 (\vec{j} \cdot \vec{p})] E^{-1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

also coincide with the Hamiltonians obtained in [5]. The operator  $H_{\frac{1}{2}0}^I$  is the Dirac Hamiltonian.

The equation (2.1) together with the Hamiltonians  $H_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^I, H_{\frac{1}{2}1}^I, H_{11}^I$  describes the particles with spins 0 and 1,  $\frac{1}{2}$  and  $\frac{3}{2}$ , 0, 1 and 2, respectively. As it is seen from (3.21)–(3.24), the operators  $H_{j\tau}^I$  can be expressed by  $H_{j-1\tau}^I, H_{j\tau-1}^I$ . Thus, the form of the Hamiltonian for arbitrary  $j$  and  $\tau$  is completely defined by the Hamiltonians for  $j, \tau = 0, \frac{1}{2}$ .

#### 4. Explicit form of the operators $H_{j\tau}^{II}$

In this section we solve the problem II, i.e. find all the operators  $H_{j\tau}^{II}$  satisfying the system (2.18)–(2.21), when the representation of the algebra  $P(1,3)$  has the structure (2.7).

Using the representation (2.7) for the special case when  $j = 0, \tau$  is an arbitrary number, Weaver, Hammer, and Good, and then, for a more general statement of the problem, Mathews [13, 16], found equations of the type (2.1) for a particle with fixed spin and mass. The results given below are a generalization of [13, 16, 20] to the case of particles with variable spin and mass.

By analogy with the previous section, we seek  $H_{j\tau}^{II}$  in the form

$$H_{j\tau}^{II} = \sum_{j_3\tau_3} (\sigma_1 g_{j_3\tau_3}^{II} + \sigma_3 f_{j_3\tau_3}^{II}) \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}, \tag{4.1}$$

where the unknown functions  $g_{j_3\tau_3}^{II}, f_{j_3\tau_3}^{II}$  depending only on  $p, M$  have the following properties

$$f_{j_3\tau_3}^{II} = -f_{-j_3-\tau_3}^{II}; \quad g_{j_3\tau_3}^{II} = g_{-j_3-\tau_3}^{II}; \tag{4.2}$$

$$(f_{j_3\tau_3}^{II})^2 + (g_{j_3\tau_3}^{II})^2 = p^2 + M^2. \tag{4.3}$$

We can verify directly that the relations (2.18), (2.20), (2.21) are fulfilled, provided (4.1), (4.3), (2.19) are satisfied. Using (2.7), we reduce (2.19) to the form

$$-[H_{j\tau}^{II}, x_a]_ - - H_{j\tau}^{II} + i(j_a + \lambda_a)[H_{j\tau}^{II}, \sigma_3]_ - + i[H_{j\tau}^{II}, (j_a + \lambda_a)]_ - \sigma_3 = ip_a. \tag{4.4}$$

Substituting (4.1) into (4.4), using the values of the commutators  $\Lambda_{j_3}, \Lambda_{\tau_3}$  with  $x_a, j_a, \tau_a$ , (A.1) and equating linearly independent terms, we obtain the following set of equations

$$\begin{aligned} g_{j_3\tau_3}^{II} g_{j_3+1\tau_3}^{II} + f_{j_3\tau_3}^{II} f_{j_3+1\tau_3}^{II} &= E^2 + p (f_{j_3+1\tau_3}^{II} - f_{j_3\tau_3}^{II}); \\ g_{j_3\tau_3}^{II} g_{j_3\tau_3+1}^{II} + f_{j_3\tau_3}^{II} f_{j_3\tau_3+1}^{II} &= E^2 + \varepsilon p (f_{j_3\tau_3+1}^{II} - f_{j_3\tau_3}^{II}); \\ g_{j_3\tau_3}^{II} (f_{j_3+1\tau_3}^{II} + p) &= g_{j_3+1\tau_3}^{II} (f_{j_3\tau_3}^{II} - p); \\ g_{j_3\tau_3}^{II} (f_{j_3\tau_3+1}^{II} + \varepsilon p) &= g_{j_3\tau_3+1}^{II} (f_{j_3\tau_3}^{II} - \varepsilon p); \\ g_{j_3\tau_3}^{II} \frac{\partial g_{j_3\tau_3}^{II}}{\partial p} - f_{j_3\tau_3}^{II} \frac{\partial f_{j_3\tau_3}^{II}}{\partial p} &= 2p(j_3 + \lambda_3), \quad \varepsilon = \frac{\lambda_3}{\tau_3} = \pm 1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

In the case  $j = 0$ , the set (4.5) coincides with the set of equations for the coefficient functions obtained in [13, 16].

Omitting rather cumbersome calculations, we give the solution of this system

$$\begin{aligned} f_{j_3\tau_3}^{\text{II}} &= E \operatorname{th} [2(j_3 + \lambda_3)\theta^{\text{II}}], & \theta^{\text{II}} &= \operatorname{arcth} \frac{p}{E}, \\ g_{j_3\tau_3}^{\text{II}} &= E \operatorname{sech} [2(j_3 + \lambda_3)\theta^{\text{II}}]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

By means of (4.6) and (4.1) we obtain the following explicit form of the Hamiltonians  $H_{j\tau}^{\text{II}}$  for the representation (2.7)

$$H_{j\tau}^{\text{II}} = E \sum_{j_3\tau_3} \{ \sigma_1 \operatorname{sech} [2(j_3 + \lambda_3)\theta^{\text{II}}] + \sigma_3 \operatorname{th} [2(j_3 + \lambda_3)\theta^{\text{II}}] \} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}. \quad (4.7)$$

Formula (4.7) gives the solution to the problem II. Let us write out the Hamiltonians  $H_{j\tau}^{\text{II}}$  for  $j, \tau \leq 1$ . According to (4.7), (3.12), we have

$$\begin{aligned} H_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\text{II}} &= H_{\frac{1}{2}0}^{\text{II}} \sigma_1 H_{0\frac{1}{2}}^{\text{II}} E^{-1}; \\ H_{\frac{1}{2}1}^{\text{II}} &= H_{\frac{1}{2}0}^{\text{II}} \sigma_1 H_{01}^{\text{II}} E^{-1}; \\ H_{11}^{\text{II}} &= H_{10}^{\text{II}} \sigma_1 H_{01}^{\text{II}} E^{-1}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

where

$$\begin{aligned} H_{\frac{1}{2}0}^{\text{II}} &= \sigma_1 M + 2\sigma_3(\vec{j} \cdot \vec{p}); & H_{0\frac{1}{2}}^{\text{II}} &= \sigma_1 M + 2\sigma_3(\vec{\lambda} \cdot \vec{p}); \\ H_{01}^{\text{II}} &= H_{00}^{\text{II}} - 2E(\vec{\lambda} \cdot \vec{p})[\sigma_1(\vec{\lambda} \cdot \vec{p}) - \sigma_3 E](E^2 + p^2)^{-1}; & H_{00}^{\text{II}} &= \sigma_1 E; \\ H_{10}^{\text{II}} &= H_{00}^{\text{II}} - 2E(\vec{j} \cdot \vec{p})[\sigma_1(\vec{j} \cdot \vec{p}) - \sigma_3 E](E^2 + p^2)^{-1} \end{aligned} \quad (4.9)$$

are the Hamiltonians of the particles with fixed spin and mass obtained in [13, 16, 20].

### 5. Transition to the canonical representation

To give an unambiguous answer to the question what particles are described by the equation (2.1) with the Hamiltonians obtained in Sections 3, 4 it is necessary to find the explicit form of the Cazimir operators  $W_\mu W^\mu$  and  $P_\mu P^\mu$  of the group  $P(1,3)$ . These operators prove to be of the simplest form in the canonical representation of the Foldy–Shirokov type. Let us pass from the representations (2.4) and (2.7) to the canonical one. Such a transition for the representation (2.4) is performed by means of the operator

$$U_{j\tau}^{\text{I}} = \exp \left( i\sigma_2 \sum_{j_3\tau_3} \frac{1}{2} \varphi_{j_3\tau_3} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} \right). \quad (5.1)$$

For the Hamiltonian (3.20a) the operator (5.1) has the simple form

$$U_{j\tau}^{\text{I}} = \frac{E + \sigma_1 H_{j\tau}^{\text{I}}}{\sqrt{2E(E + M)}}, \quad (5.2)$$

for the Hamiltonians (3.20b) the operator (5.1) is of the form

$$U_{j\tau}^{\text{I}} = \exp \left[ i\sigma_2 \frac{(\vec{j} + \vec{\lambda})}{p} \vec{p} \theta^{\text{I}} \right]. \quad (5.3)$$

The transition from the representation (2.7) to the canonical one is performed by the isometric operator

$$U_{j\tau}^{\text{II}} = \sqrt{\frac{E}{M}} \sum_{j_3\tau_3} \{ \text{ch} [(j_3 + \lambda_3)\theta^{\text{II}}] - i\sigma_2 \text{sh} [(j_3 + \lambda_3)\theta^{\text{II}}] \} \times \\ \times \text{sech} [2(j_3 + \lambda_3)\theta^{\text{II}}] \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}; \quad (5.4)$$

$$(U_{j\tau}^{\text{II}})^{-1} = \sqrt{\frac{E}{M}} \sum_{j_3\tau_3} \{ \text{ch} [(j_3 + \lambda_3)\theta^{\text{II}}] + i\sigma_2 \text{sh} [(j_3 + \lambda_3)\theta^{\text{II}}] \} \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}.$$

The operators (2.4) and (2.7) under the transformations (5.1) and (5.4) take the form

$$P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}; \quad (5.5) \\ P_0 = \sigma_1 E, \quad J_{0a} = t p_a - \frac{1}{2} \sigma_1 [x_a, E]_+ - \sigma_1 \frac{S_{ab} P_b}{E + M}.$$

The operators (5.5) are Hermitian operators with respect to the usual scalar product

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int d^3x \Phi_1^\dagger(t, \vec{x}) \Phi_2(t, \vec{x}), \quad (5.6)$$

where the functions  $\Phi$  are related to the solutions of the equation (2.1) by

$$\Phi(t, \vec{x}) = U_{j\tau}^{\text{I}} \Psi^{\text{I}}(t, \vec{x}) = U_{j\tau}^{\text{II}} \Psi^{\text{II}}(t, \vec{x}). \quad (5.7)$$

In the representation (5.5) the Casimir operators are expressed by the matrices of spin (2.5)

$$W_\mu W^\mu = M^2 (\vec{j} + \vec{\tau})^2 = M^2 [j(j+1) + \tau(\tau+1) + 2(\vec{j}, \vec{\tau})], \quad (5.8)$$

$$P_\mu P^\mu = M^2, \quad (5.9)$$

where the squared-mass operator in the general case is given by formula (3.6). It follows from (5.8) that equation (2.1) in the case of arbitrary  $j$  and  $\tau$  describes a particle whose spin can have the values  $|j - \tau| \leq s \leq j + \tau$ . Equation (2.1) describes a particle with the fixed spin  $S_0$ , if one imposes additional relativistically-invariant conditions on the solutions  $\Psi(t, \vec{x})$ . These conditions have the form

$$(U_{j\tau}^{\text{I}})^\dagger (\vec{j} \cdot \vec{\tau}) U_{j\tau}^{\text{I}} \Psi^{\text{I}}(t, \vec{x}) = \varkappa_s \Psi^{\text{I}}(t, \vec{x}); \quad (5.10)$$

$$(U_{j\tau}^{\text{II}})^{-1} (\vec{j} \cdot \vec{\tau}) U_{j\tau}^{\text{II}} \Psi^{\text{II}}(t, \vec{x}) = \varkappa_s \Psi^{\text{II}}(t, \vec{x}). \quad (5.11)$$

The solutions of equations (2.1) and (5.10), (2.1) and (5.11) are eigenfunctions of the operators  $W_\mu W^\mu$  and  $P_\mu P^\mu$

$$W_\mu W^\mu \Psi(t, \vec{x}) = m_s^2 s(s+1) \Psi(t, \vec{x}), \quad P_\mu P^\mu \Psi(t, \vec{x}) = m_s^2 \Psi(t, \vec{x}), \quad (5.12)$$

where

$$m_s = a + bs(s+1), \quad (5.13)$$

if we set in (3.6)

$$\begin{aligned} a_0 &= (a + b\eta)^2, & a_1 &= 4b(a + b\eta), & a_2 &= 4b^2, \\ a_3 &= a_4 = \dots = 0, & \eta &= j(j + 1) + \tau(\tau + 1), \end{aligned} \quad (5.14)$$

or

$$m_s^2 = a^2 + b^2 s(s + 1) \quad (5.15)$$

if in (3.6)

$$a_0 = a + b\eta, \quad a_1 = 2b, \quad a_2 = a_3 = \dots = 0. \quad (5.16)$$

Choosing the other values for the coefficients  $a_n$  in (3.6), one obtains another dependence of the mass on spin.

At the conclusion of this section we present the explicit form of the metric operator for the representation (2.7)

$$\hat{M}_{j\tau} = (U_{j\tau}^{\text{II}})^\dagger U_{j\tau}^{\text{II}} = \frac{E}{M} \sum_{j_3\tau_3} \text{sech} [2(j_2 + \lambda_3)\theta^{\text{II}}] \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3}. \quad (5.17)$$

For the problem of external motion of a charged particle in an external electromagnetic field to be solved, it is more convenient to use the equation (2.1) with the Hamiltonian  $H_{j\tau}^{\text{I}}$ , and for the second quantization the equation (2.1) with the Hamiltonian  $H_{j\tau}^{\text{II}}$  is more preferable. The first problem is considered in the next section, the second one is solved in [14] for the case  $j = 0$ .

**Notation.** When formulating the problems I and II, we restricted ourselves to the case where the matrices  $S_{kl}$  in (2.4), (2.7) form the irreducible representation  $D(j, \tau)$  or the direct sum  $\sum_{s=|j-\tau|}^{j+\tau} \oplus D(s, 0)$  of group  $O(4)$ . Using the reducible representations with more complex structure, we obtain qualitatively new equations of the type (1).

Let, for instance, the matrices  $S_{kl}$  in (2.7) realize the representation  $D(0, s - \frac{1}{2}) \otimes [D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2})]$  of the group  $O(4)$ . This means that these matrices have been represented in the form

$$S_{kl} = \hat{S}_{kl} + \frac{i}{2} \gamma_k \gamma_l, \quad [S_{kl}, \gamma_\lambda]_- = 0, \quad \gamma_k \gamma_l + \gamma_l \gamma_k = -2\delta_{kl}, \quad (5.18)$$

where  $\hat{S}_{kl}$  are the generators of the representation  $D(0, s - \frac{1}{2})$ . In this case the Hamiltonian  $H$ , which satisfies the conditions (2.17)–(2.21), has the form

$$H = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 m, \quad \gamma_0 = \sigma_3 \gamma_4, \quad (5.19)$$

and the Poincaré-invariant supplementary condition (5.11), which selects the spin  $S$ , may be written down as

$$[(m + \gamma_\mu p^\mu) [S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 2s^2] (1 - i\gamma_4) - 4ms] \psi = 0. \quad (5.20)$$

The system of equations (1) with the Hamiltonian (5.19) and (5.20) describes the free motion of a particle with the fixed spin  $s$ . When the interaction is included into these equations by the standard substitution  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ , no difficulties typical

for the equations of Bargman–Wigner, Rarita–Schwinger and other equations [18, 19] arise. This question will be discussed in the next paper.

**6. The equation for a charged particle in an external electromagnetic field**

The generalization of equation (2.1) to the case of a charged particle in an external electromagnetic field proves to be a difficult problem owing to the complicated dependence of the Hamiltonians  $H_{j\tau}$  on momenta. In this section the problem is solved, the assumption being that the particle momenta are small compared with the particles masses which are considered to be fixed. With the help of successive unitary transformations we found the equation for the positive energy states of the particle with arbitrary spin and fixed mass just as it had been done by Foldy and Wouthuysen [3] for  $s = \frac{1}{2}$ .

For  $p \ll m$  the Hamiltonians  $H_{j\tau}$  have been represented as series in powers of  $1/m$  (Compton wavelength). Restricting ourselves to the constituents of power  $1/m^2$  and using the relation

$$\sum_{j_3\tau_3} (j_2 - \tau_3)^l \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} = \sum_a \left( \frac{S_{4a} p_a}{p} \right)^l, \quad S_{4a} = j_a - \tau_a, \quad l = 0, 1, \dots, \quad (6.1)$$

we write the operators (3.20b), (4.7) in the form

$$H_{j\tau}^\alpha = \sigma_1 \left[ m + \frac{1}{m} \sum_{a,b} d_{ab} (p_a p_b - p_b p_a) \right] + \sigma_3 \left[ \sum_a b_a p_a + \frac{1}{m^2} h^\alpha(\vec{p}) \right] + o\left(\frac{1}{m^3}\right), \quad (6.2)$$

where

$$\alpha = \text{I, II}; \quad d_{ab} = \frac{1}{4} \delta_{ab} - S_{4a} S_{4b}, \quad b_a = 2S_{4a},$$

$$h^{\text{I}}(\vec{p}) = -2h^{\text{II}}(\vec{p}) = \frac{2}{3} S_{4a} d_{bc} p_a p_b p_c; \quad a, b, c = 1, 2, 3.$$

It is seen from (6.2) that the Hamiltonians (3.20b), (4.7) coincide in the approximation to terms of power  $1/m$  and are polynomials in  $p_a$ . Equation (2.1) with the Hamiltonian (6.2) describes the free motion of a particle without any spin. In order to describe the motion of a charged particle in an external electromagnetic field we make in (2.1), (6.2) the usual replacement  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - cA_\mu$ . The result is

$$H_{j\tau}^\alpha(\vec{\pi})\Psi(t, \vec{x}) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{x}); \quad (6.3)$$

$$H_{j\tau}^\alpha(\vec{\pi}) = \sigma_1 \left[ m + \frac{\pi^2}{2m} - 2 \sum_a \frac{(S_{4a} \pi_a)^2}{m} - e \frac{\vec{S} \cdot \vec{H}}{m} \right] + eA_0 + \sigma_3 \left[ 2 \sum_a S_{4a} \pi_a + \frac{1}{m^2} h^\alpha(\vec{\pi}) \right] + o\left(\frac{1}{m^3}\right); \quad (6.4)$$

$$\vec{H} = \text{curl } \vec{A}, \quad \vec{S} = \vec{j} + \vec{\tau}.$$

One can verify directly that the Hamiltonian (6.4) has positive energy eigenvalues as well as negative ones. We obtain from (6.3) the equation for the positive energy states. It is achieved by the unitary transformation

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi, \quad H_{j\tau}(\vec{\pi}) \rightarrow H_{j\tau}^I(\vec{\pi}) = UH_{j\tau}^\alpha(\vec{\pi})U^\dagger - i\frac{\partial U}{\partial t}U^\dagger, \quad (6.5)$$

where

$$\begin{aligned} U^\alpha &= \exp(iS_3^\alpha) \exp(iS_2) \exp(iS_1); \\ S_1 &= -\sigma_2 \sum_a \frac{S_{4a}\pi_a}{m}, \quad S_2 = \sigma_3 e \sum_a \frac{S_{4a}E_a}{2m^2}; \\ S_3^\alpha &= -\frac{\sigma_2}{2m^3} \left\{ h^\alpha(\vec{\pi}) + \frac{4}{3} \sum_a (S_{4a}\pi_a)^3 - \sum_a [\pi^2, S_{4a}\pi_a]_+ + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_a S_{4a}E_a + e \sum_a [\vec{S} \cdot \vec{H}, S_{4a}\pi_a]_+ \right\}, \quad E_a = -\frac{\partial A_a}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x_a}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

From (6.5), (6.6) one obtains

$$H_{j\tau}^I(\vec{\pi}) = \sigma_1 \left( m + \frac{\pi^2}{2m} - e \frac{\vec{S} \cdot \vec{H}}{m} \right) + eA_0 + \frac{e}{2m^2} \sum_{a,b} [S_{4a}E_a, S_{4b}\pi_b]_-. \quad (6.7)$$

The operator (6.7) commutes with  $\sigma_1$ . On the set of functions  $\Phi^+$  which satisfy to the condition

$$\sigma_1\Phi^+ = \Phi^+ \quad (6.8)$$

the Hamiltonian (6.7) is positive definite and equals

$$\begin{aligned} H_{j\tau}^I(\vec{\pi})\Phi^+ &= \left( m + \frac{\pi^2}{2m} - e \frac{\vec{S} \cdot \vec{H}}{m} \right) \Phi^+ + eA_0 + \\ &+ \frac{e}{2m^2} \sum_{a,b} [S_{4a}E_a, S_{4b}\pi_b]_- \Phi^+ = i\frac{\partial}{\partial t} \Phi^+. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Formula (6.9) should be considered as a generalization of the Pauli equation for a particle of spin  $\frac{1}{2}$  to the case of a particle with an arbitrary (in general, variable) spin.

To inquire into the physical sense of the constituents which are included in  $H_{j\tau}^I(\vec{\pi})$ , we consider in detail the special case of the equation (6.9) when  $j = 0$ ,  $S_{4a} = S_a = \tau_a$ . According to (1.1) it corresponds to the particle with a fixed spin. Using the identity

$$\begin{aligned} \frac{e}{2m^2} \sum_{a,b} [S_{4a}E_a, S_{4b}\pi_b]_- &\equiv -\frac{i}{12m^2} Q_{j\tau}^{ab} \frac{\partial E_a}{\partial x_b} - \frac{e \sum_a (S_{4a})^2 \operatorname{div} \vec{E}}{6m^2} - \\ &- \frac{e}{4m^2} \vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{E}); \quad Q_{j\tau}^{ab} = 3[S_{4a}, S_{4b}]_+ - 2 \sum_c \delta_{ab}(S_{4c})^2, \end{aligned} \quad (6.10)$$

we write the equation (6.9) for  $j = 0$  as

$$\begin{aligned}
 H'_{0\tau}(\vec{\pi})\Phi^+ &= \left\{ m + \frac{\pi^2}{2m} + eA_0 - e\frac{\vec{S} \cdot \vec{H}}{m} - e\frac{s(s+1)}{6m^2} \operatorname{div} \vec{E} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i}{12m^2} Q_{0\tau}^{ab} \frac{\partial E_a}{\partial x_b} + \frac{e}{4m^2} \vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{E}) \right\} \Phi^+ = i\frac{\partial}{\partial t} \Phi^+, \quad (6.11) \\
 Q_{0\tau}^{ab} &= 3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}S(S+1).
 \end{aligned}$$

Equation (6.11) describes in the quasi-relativistic approximation the movement of a charged particle with an arbitrary fixed spin in an external electromagnetic field. The Hamiltonian  $H'_{0\tau}(\vec{\pi})$  includes the constituents which corresponds to the dipole  $\left(-\frac{e}{m}\vec{S} \cdot \vec{H}\right)$ , quadrupole  $\left(-\frac{1}{12m^2} \sum_{a,b} Q_{0\tau}^{ab} \frac{\partial E_a}{\partial x_b}\right)$ , spin-orbital  $\left(-\frac{e}{4m^2} \vec{S} \cdot (\vec{p} \times \vec{E} - \vec{E} \times \vec{p})\right)$  and Darwin  $\left(-\frac{1}{6m^2} s(s+1) \operatorname{div} \vec{E}\right)$  interactions. By substituting (6.10) into (6.9) one verifies that similar constituents are included in the Hamiltonian  $H'_{j\tau}(\vec{\pi})$  of a particle with variable spin.

Thus using the equations for a free particle with an arbitrary spin obtained in Sections 1–4 we found the quasi-relativistic equations (6.9), (6.11) for a charged particle in an external electromagnetic field. We established that in the approximation of  $1/m^2$  both Hamiltonians (3.20b) and (4.7) are formally equivalent to (6.7). However, the operator  $H_{j\tau}^{\text{II}}$  is determined in the Hilbert space where the scalar product has the complicated structure (2.11), (5.17), and that's why the Hamiltonian  $H_{j\tau}^{\text{I}}$  is more convenient for the description of the motion of a charged particle in an external electromagnetic field.

In the case  $s = \tau = \frac{1}{2}$  (6.11) coincides with the equation obtained by Foldy and Wouthuysen [3]. For  $s = \tau = 1$  (6.11) has the structure analogous to the equation obtained in [2], but in addition it takes into account the quadrupole interaction of the particle with a field.

## Appendix

Here we present, without proof, some relations used in the paper. In [5] it is shown that for the projectors of the type (3.9) the following formulas hold:

$$\begin{aligned}
 [\vec{j}, \Lambda_{j_3}] &= \frac{i}{2p} \vec{p} \times \vec{j} (\Lambda_{j_3-1} - \Lambda_{j_3+1}) - \frac{1}{2} \left( \vec{j} - \frac{\vec{p}}{p} j_p \right) (\Lambda_{j_3-1} + \Lambda_{j_3+1} - 2\Lambda_{j_3}); \\
 [\vec{x}, \Lambda_{j_3}] &= \frac{1}{2p^2} \vec{p} \times \vec{j} (\Lambda_{j_3-1} + \Lambda_{j_3+1} - 2\Lambda_{j_3}) - \frac{i}{2p} \left( \vec{j} - \frac{\vec{p}}{p} j_p \right) (\Lambda_{j_3-1} - \Lambda_{j_3+1}).
 \end{aligned} \quad (A.1)$$

The corresponding relations for  $\Lambda_{\tau_3}$  can be obtained from (A.1) by making replacement  $\vec{j} \rightarrow \vec{\tau}$ ,  $j_3 \rightarrow \tau_3$ ,  $j_p \rightarrow \tau_p$ . These relations are used in solving equations (3.14) and (4.4). Besides, the following fact is taken into account: the linear combination

$$L = \left( b_1 \frac{\vec{p} \times \vec{j}}{p} + b_2 \frac{\vec{p} \times \vec{\tau}}{p} + b_3 \vec{j} + b_4 \vec{\tau} + b_5 \frac{\vec{p}}{p} \right) \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} \quad (A.2)$$

equals zero if and only if either  $j_3 = \pm j_3$ , or  $\tau_3 = \pm \tau$ , and then

$$\begin{aligned} \left( \mp i \frac{\vec{p} \times \vec{j}}{p} + \vec{j} - \frac{\vec{p}}{p} j_3 \right) \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} &= 0, & j_3 &= \pm j, \\ \left( \mp i \frac{\vec{p} \times \vec{\tau}}{p} + \vec{\tau} - \frac{\vec{p}}{p} \tau_3 \right) \Lambda_{j_3} \Lambda_{\tau_3} &= 0, & \tau_3 &= \pm \tau \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

is either fulfilled, or all numbers  $b_n$  equal zero.

1. Blokincev D.E., *Zh. Exp. Teor. Fiz.*, 1947, **17**, 273.
2. Carrido L.M., Oliver L., *Nuovo Cim. A*, 1967, **52**, 588.
3. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
4. Fushchych W.I., *Teor. Mat. Fiz.*, 1970, **4**, 360.
5. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., Nikitin A.G., *Teor. Mat. Fiz.*, 1971, **8**, 192.
6. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79.
7. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1969, **14**, 754.
8. Gelfand I.M., Yaglom A.M., *Zh. Exp. Teor. Fiz.*, 1948, **18**, 703.
9. Ginsburg V.L., Tamm I.E., *Zh. Exp. Teor. Fiz.*, 1947, **17**, 273.
10. Gyuk J., Uniezava H., *Phys. Rev. D*, 1971, **3**, 898.
11. Kolsrud M., *Physica Norvegica*, 1971, **5**, 169.
12. Majorana E., *Nuovo Cim.*, 1931, **9**, 335.
13. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1966, **143**, 987.
14. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1967, **155**, 1415.
15. Pereira J.V., *Intern. J. Teor. Phys.*, 1972, **5**, 447.
16. Seetharaman M., Mathews P.M., *J. Math. Phys.*, 1972, **13**, 938.
17. Shirokov Yu. M., *Zh. Exp. Teor. Fiz.*, 1951, **21**, 748.
18. Tsai W., *Phys. Rev. D*, 1973, **7**, 1945.
19. Velo G., Zwanzinger D., *Phys. Rev. D*, 1969, **186**, 2218.
20. Weaver D.L., Hammer C.L., Good R.H., *Phys. Rev. D*, 1964, **135**, 241.

# On the equations of motion for particles with arbitrary spin in nonrelativistic mechanics

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN, V.A. SALOGUB

It is well known that the electron motion in the external electromagnetic field is described by the relativistic Dirac equation. In this case, in the Foldy–Wouthuysen representation, the Hamiltonian includes the terms corresponding to the interaction of the particle magnetic moment with a magnetic field ( $\sim (1/m)(\sigma\mathcal{H})$ ) and the terms which are interpreted as a spin-orbit coupling ( $\sim (\sigma/m^2)\{(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \times \mathbf{E}\}$ ). Apart from these constituents the Hamiltonian includes the Darwin term ( $\sim (1/m^2)\text{div } \mathbf{E}$ ) [1].

Such a description is in good accordance with the experimental data.

It was shown by Bargman [2] that it is possible to introduce the particle spin in the nonrelativistic quantum mechanics by performing the central extension of the Galilei group. In connection with this Bargman result the problem of finding the motion equations, which are invariant with respect to the extended Galilei group  $G$ , arises naturally.

Such a problem has been considered in [3–5]. The equations obtained in [5] have redundant components and, besides, these equations do not describe the spin-orbit and the Darwin couplings if one makes the replacement  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$  in them.

The aim of this note is to find such motion equations for a particle with spin which are invariant relative to the group  $G$ , have no redundant components and describe the spin-orbit and the Darwin couplings of the particle with the field. It is reached by the supposition that the free nonrelativistic particle Hamiltonian has two energy signs just as the Dirac Hamiltonian. This is equivalent to the requirement that the theory (equations) be invariant under such a transformation:

$$t \rightarrow -t, \quad T\Psi(t, \mathbf{x}) = \tau T\Psi(-t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

where  $\tau$  is some unitary matrix. In terms of group-theoretical language this means some extension of the group  $G$  to the group  $\overline{G} \supset G$ , which includes the transformation (1).

In order to find the motion equations in the Schrödinger form

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \mathcal{H}_s \Psi(t, \mathbf{x}), \quad (2)$$

which are invariant under the group  $G$  and the transformation (1), we have used the method of the work [6], where the same problem has been solved for the full Poincaré group. Equations (2) with an unknown operator function  $\mathcal{H}_s$  will be invariant under the group  $G$  if the following relations are satisfied:

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_s, P_a] &= [\mathcal{H}_s, J_{ab}] = 0, & [\mathcal{H}_s, G_a] &= iP_a, & [G_a, G_b] &= 0, \\ [P_a, G_b] &= i\varepsilon\delta_{ab}m, & [J_{ab}, G_a] &= i\delta_{ac}G_b - i\delta_{bc}G_a, \\ [J_{ab}, J_{cd}] &= i(\delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ad}), \\ [\varepsilon, P_a] &= [\varepsilon, J_{ab}] = [\varepsilon, G_a] = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$[T, J_{ab}] = \{T, \varepsilon\} = \{T, G_a\} = [T, P_a] = 0, \quad \varepsilon = \frac{P_0}{|P_0|},$$

where  $P_a$ ,  $P_0 = \mathcal{H}_s$ ,  $J_{ab}$  and  $G_a$  are the generators of the Galilei group,  $T$  is the operator of time reflection.

To determine all possible (up to unitary transformations independent of the particle momentum) operators  $\mathcal{H}_s$ , which satisfy relations (3), we use the following realization of the generators  $P_a$  and  $J_{ab}$ :

$$P_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},$$

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} s_{ab} & 0 \\ 0 & s_{ab} \end{pmatrix}, \quad a, b = 1, 2, 3, \quad (4)$$

where  $s_{ab}$  are the generators of the irreducible representation  $D(s)$  of the  $O_3$  group.

We require the Hamiltonian  $\mathcal{H}_s$  to be the differential and Hermitian operator with respect to the usual scalar product

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger(t, \mathbf{x}) \Psi_2(t, \mathbf{x}), \quad (5)$$

where  $\Psi$  is the  $2(2s+1)$ -component function, which satisfies eq. (1).

Expanding the operator  $\mathcal{H}_s$  in a complete system of the ortoprojectors

$$\Lambda_r = \prod_{\substack{r' = -s \\ r' \neq r}}^s \frac{S_{p'} - r}{r' - r}, \quad S_p = \frac{S_{12}p_3 + S_{31}p_2 + S_{23}p_1}{|p|}, \quad (6)$$

and using the results of the work [6], we have obtained that the Hamiltonians  $\mathcal{H}_s$  which satisfy conditions (3) are represented by the formulae

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \rho_1 \left( m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{m} \sin^2 \theta_{\frac{1}{2}} \right) + \rho_2 \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \sin 2\theta_{\frac{1}{2}} + \rho_3 \sqrt{2} \frac{\mathbf{S}\mathbf{p}}{s} \sin \theta_{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

$$\mathcal{H}_1 = \rho_1 \left[ m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{(\mathbf{S}\mathbf{p})^2}{s^2 m} \sin^2 \theta_1 \right] + \rho_2 \frac{(\mathbf{S}\mathbf{p})^2}{2ms^2} \sin 2\theta_1 + \rho_3 \sqrt{2} \frac{\mathbf{S}\mathbf{p}}{s} \sin \theta_1, \quad (8)$$

$$\mathcal{H}_{\frac{3}{2}} = \rho_1 \left[ m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{(\mathbf{S}\mathbf{p})^2}{s^2 m} \sin^2 \theta_{\frac{3}{2}} \right] +$$

$$+ \rho_2 \left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \left[ -\frac{1}{8} \sin 2\theta_{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \sin \theta_{\frac{3}{2}} \sqrt{9 - \sin^2 \theta_{\frac{3}{2}}} \right] + \right. \quad (9)$$

$$\left. + \frac{(\mathbf{S}\mathbf{p})^2}{2ms^2} \left[ \frac{9}{8} \sin 2\theta_{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} \sin \theta_{\frac{3}{2}} \sqrt{9 - \sin^2 \theta_{\frac{3}{2}}} \right] \right\} + \rho_3 \sqrt{2} \frac{\mathbf{S}\mathbf{p}}{s} \sin \theta_{\frac{3}{2}},$$

$$\mathcal{H}_s = \rho_1 \left( m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right), \quad s > \frac{3}{2}, \quad (10)$$

where  $\theta_s$  are arbitrary parameters,  $\rho_a$  are the  $2(2s+1)$ -dimensional Pauli matrices. The Hamiltonians (7)–(10) are the square roots of the operators

$$\mathcal{H}^2 = m^2 + \mathbf{p}^2 + \frac{\mathbf{p}^4}{4m^2}. \quad (11)$$

The operator  $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}}$  is the nonrelativistic analogue of the Dirac Hamiltonian for an electron. As will be shown in what follows, the parameters  $\cos 2\theta_s$  must be interpreted as the anomalous magnetic moment of the particle.

If  $\theta = \pi/4$ , eq. (2) with the Hamiltonian (7) may be written in the compact form

$$[m + \gamma_\mu p^\mu] \Psi = i\gamma_4 \frac{\mathbf{p}^4}{2m} \Psi, \quad (12)$$

where  $\gamma_\mu$  are the  $4 \times 4$  dimensional Dirac matrices

$$\gamma_0 = \rho_1, \quad \gamma_a = i\rho_2 \frac{S_a}{s}, \quad \gamma_4 = \rho_3.$$

The operators  $\mathcal{H}_1$  and  $\mathcal{H}_{\frac{3}{2}}$  are the nonrelativistic Hamiltonians for the particles with spins  $s = 1$  and  $s = \frac{3}{2}$  respectively.

The Hamiltonians (7)–(9) are not diagonal. They may be diagonalized by the unitary transformation

$$\mathcal{H}_s \rightarrow \mathcal{H}'_s = \mathcal{U} \mathcal{H}_s \mathcal{U}^\dagger, \quad (13)$$

where

$$\mathcal{U} = \sum_r \frac{E + \rho_1 \mathcal{H}_s}{\sqrt{2E \left( E + m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \left( 1 - \frac{2r^2}{s^2} \sin^2 \theta_s \right) \right)}} \Lambda_r, \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2}}.$$

For the case  $s > \frac{3}{2}$  the only trivial Hamiltonians (10) which result in no spin effects are possible in our statement of the problem.

The description of the behaviour of the nonrelativistic particle with spin in the external electromagnetic field is made by the replacement  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu$  in eq. (1). In order to preserve the explicit Hermiticity of the Hamiltonians it is necessary to symmetrize previously the formulae (7)–(9) using the identity

$$p_a p_b = \frac{1}{2} (p_a p_b + p_b p_a). \quad (14)$$

After such a symmetrization and the replacement  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu$  in (7)–(9) we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s = & \rho_1 \left[ m + \frac{\pi^2}{2m} - \frac{(\mathbf{S}\boldsymbol{\pi})^2}{ms^2} \sin^2 \theta_s + \frac{e(\mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{H}})}{2ms^2} \sin^2 \theta_s \right] + e\varphi + \\ & + \rho_2 \left[ a_s \frac{\pi^2}{2m} + b_s \frac{(\mathbf{S}\boldsymbol{\pi})^2}{2ms^2} - \frac{e(\mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{H}})}{4ms^2} b_s \right] + \rho_3 \sqrt{2} \frac{\mathbf{S}\boldsymbol{\pi}}{s} \sin \theta_s, \end{aligned} \quad (15)$$

where  $\mathcal{H}_a = i\varepsilon_{abc}[\pi_a, \pi_c]$  is the magnitude of the magnetic field,

$$a_{\frac{1}{2}} = \sin 2\theta_{\frac{1}{2}}, \quad b_{\frac{1}{2}} = 0, \quad a_1 = 0, \quad b_a = \sin 2\theta_1,$$

$$a_{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{8} \sin 2\theta_{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} \sin \theta_{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{9} \sin^2 \theta_{\frac{3}{2}}},$$

$$b_{\frac{3}{2}} = \frac{9}{8} \sin 2\theta_{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4} \sin \theta_{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{9} \sin^2 \theta_{\frac{3}{2}}}.$$

For  $s \leq \frac{3}{2}$  it is impossible to diagonalize the Hamiltonians  $\mathcal{H}_s$  for the interacting particles exactly. The diagonalization of the Hamiltonians (15) to terms of the power  $1/m^2$  is made by the unitary operator

$$\mathcal{U} = \exp [i(B_3^s)] \exp [i(B_2^s)] \exp [i(B_1^s)],$$

where

$$\begin{aligned} B_1^s &= -\frac{\sqrt{2}}{2ms} \sin \theta_s \rho_2 (\mathbf{S}\boldsymbol{\pi}), \\ B_2^s &= \rho_3 \frac{1}{4m^2} \left[ a_s \boldsymbol{\pi}^2 + b_s \frac{(\mathbf{S}\boldsymbol{\pi})^2}{s^2} - \frac{eb_s(\mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{H}})}{2s^2} + \frac{e\sqrt{2} \sin \theta_s}{s} \mathbf{S}\mathbf{E} \right], \\ B_3^s &= \rho_2 \frac{1}{8m^3} \left[ \frac{\sqrt{2} \sin \theta_s}{s} \{\mathbf{S}\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2\} + \frac{\sqrt{2} \sin^3 \theta_s}{s^3} \{\mathbf{S}\boldsymbol{\pi}, \mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{H}}\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\sqrt{2} \sin^3 \theta_s}{s^3} (\mathbf{S}\boldsymbol{\pi})^3 - iea_s[\boldsymbol{\pi}^2, \varphi] - \frac{ieb_s}{s^2} [(\mathbf{S}\boldsymbol{\pi})^2, \varphi] \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

After the transformation (16) the Hamiltonian (15) takes the form

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s &= \rho_1 \left[ m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e(\mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{H}})}{2ms^2} \sin^2 \theta_s \right] + e\varphi + \frac{e\sqrt{2} \sin \theta_s}{4m^2 s} \left[ -a_s + \frac{b_s}{4s^2} \right] \times \\ &\times \mathbf{S}(\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\mathcal{H}} - \boldsymbol{\mathcal{H}} \times \boldsymbol{\pi}) + \frac{e\sqrt{2} b_s \sin \theta_s}{24s^3} Q_{ab} \nabla_a \mathcal{H}_b - \frac{\sqrt{2} eb_s \sin \theta_s}{24m^2 s^3} \mathbf{S}^2 \cdot \text{div } \boldsymbol{\mathcal{H}} + \\ &+ \frac{e \sin^2 \theta_s}{8m^2 s^2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \boldsymbol{\pi}) - \frac{e \sin^2 \theta_s}{12s^2} Q_{ab} \nabla_a E_b - \frac{e \sin^2 \theta_s}{12m^2 s^2} \mathbf{S}^2 \cdot \text{div } \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (17)$$

where  $Q_{ab}$  is the tensor of the quadrupole coupling [7]

$$Q_{ab} = \frac{e}{2m^2} [3\{S_a, S_b\} - \delta_{ab}s(s+1)].$$

To elucidate the physical meaning of the constituents which are included in (17) we consider in detail the case  $s = \frac{1}{2}$ . Substituting into (17) the spin matrices from the representation  $D(\frac{1}{2})$  and using (15), we obtain

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{H}^{\text{F-W}} - \mathcal{H}', \quad (18)$$

where

$$\mathcal{H}^{\text{F-W}} = \rho_1 \left( m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{e(\mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{H}})}{m} \right) + e\varphi + \frac{e\mathbf{S}(\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \boldsymbol{\pi})}{4m^2} - \frac{e}{8m^2} \text{div } \mathbf{E} \quad (19)$$

is the Hamiltonian which has been previously obtained by Foldy and Wouthuysen [1] by the diagonalization of the Dirac Hamiltonian, and

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \rho_1 \frac{e(\mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{H}})}{m} \cos 2\theta_s + \frac{e\mathbf{S}(\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \boldsymbol{\pi})}{4m^2} \cos 2\theta_s + \\ &+ \frac{e}{8m^2} \cos 2\theta_s \text{div } \mathbf{E} + \frac{e\sqrt{2} \sin \theta_s \sin 2\theta_s}{2m^2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\mathcal{H}} - \boldsymbol{\mathcal{H}} \times \boldsymbol{\pi}). \end{aligned} \quad (20)$$

It follows from (18), (20) that the parameter  $\cos 2\theta_s$  plays the role of the anomalous magnetic moment of a particle. Choosing in (18), (20)  $\cos 2\theta_s = 0$  one obtains the operator which differs from the Foldy–Wouthuysen Hamiltonian by the existence of the additional constituent  $e\mathbf{S}(\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\mathcal{H}} - \boldsymbol{\mathcal{H}} \times \boldsymbol{\pi})/2m^2$ , which describes the magnetic spin-orbit coupling of the particle with the external field. The analogous situation takes place for the spins.

The Hamiltonian (17) for  $s = 1, \frac{3}{2}$  includes the constituents which correspond to the electrical quadrupole  $(\sqrt{2}b_s \sin \theta_s/24s^3) \times Q_{ab}\nabla_a\mathcal{H}_b$  and the magnetic quadrupole  $-(1 - \cos^2 \theta_s)/24s^2) \times Q_{ab}\nabla_a E_b$  couplings.

Equation (1) with the Hamiltonians (15) can be solved exactly for many important classes of external fields. Thus the energy spectrum of the particle with spin  $s = \frac{1}{2}$  in the homogeneous external magnetic field, has the form

$$E = \pm \left[ m^2 + \xi^2 + p_3^2 + \left( \frac{\xi^2 + p_3^2}{2m} \right)^2 + \left( \frac{e\mathcal{H}}{2m} \right)^2 - \right. \\ \left. - \sigma_3 \frac{e\mathcal{H}}{m} \left[ m^2 \cos^2 2\theta - p_3^2 \cos 2\theta + \xi^2 + \left( \frac{\xi^2 + p_3^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (21)$$

$$\xi^2 = (2n + 1)e\mathcal{H}.$$

Thus, within the framework of the nonrelativistic quantum mechanics, when one uses the equation in the form (1), the successive description of the particle with the spin  $s \leq \frac{3}{2}$  movement in the external electromagnetic fields is obtained which includes the dipole, quadrupole and the spin-orbit couplings of the particle with the field.

1. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **68**, 29.
2. Bargman V., *Ann. Math.*, 1954, **59**, 1;  
Hammermesh M., *Ann. of Phys.*, 1960, **9**, 518.
3. Galindo A., Sancher del Rio C., *Amer. J. Phys.*, 1961, **29**, 582;  
Eberlein W., *Amer. Math. Monthly*, 1962, **69**, 587.
4. Levi-Leblong J.M., *Comm. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286.
5. Harley W.J., *Phys. Rev. D*, 1974, **7**, 1185.
6. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., Nikitin A.G., *Teor. Mat. Fiz.*, 1971, **8**, 192 (in Russian); *Theor. Math. Phys.*, 1971, **8**, 766.
7. James K.R., *Proc. Phys. Soc.*, 1968, **1**, 334.

# О дополнительной инвариантности уравнения Клейна–Гордона–Фока

В.И. ФУЩИЧ

Хорошо известно, что уравнение Клейна–Гордона–Фока (КГФ)

$$L\varphi(x_0, \mathbf{x}) = 0, \quad L = p_0^2 - p_a^2 - m^2, \quad (1)$$

$$x_0 \equiv t, \quad p_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3,$$

инвариантно относительно группы Пуанкаре. В терминах алгебры Ли это означает, что удовлетворяются следующие условия:

$$[L, Q_i]\varphi(t, \mathbf{x}) \equiv (LQ_i - Q_iL)\varphi = 0; \quad i = 1, 2, \dots, 10, \quad (2)$$

где  $Q_i$  — базисные элементы алгебры Пуанкаре  $P(1, 3)$  имеющие такую явную структуру:

$$P_\mu = p_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (3)$$

В данной работе дается положительный ответ на следующий вопрос: существует ли алгебра (группа) инвариантности уравнения КГФ, унитарно неэквивалентная алгебре (3)?

С помощью замены

$$p_0\varphi = \varkappa\Psi_1, \quad \varphi = \Psi_2, \quad p_0\varphi \neq 0, \quad (4)$$

где  $\varkappa$  — постоянная величина, уравнение (1) преобразуем к системе двух уравнений первого порядка относительно временной производной

$$p_0\Psi(t, \mathbf{x}) = \mathcal{H}\Psi(t, \mathbf{x}), \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\varkappa} \{ (E^2 + \varkappa^2)\sigma_1 - i\sigma_2(E^2 - \varkappa^2) \}, \quad E = (p_a^2 + m^2)^{1/2}, \quad (6)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — двумерные матрицы Паули. Операторы (3) после преобразования (4) принимают вид

$$\{Q^1\}: \quad P_\mu^1 = VP_\mu V^{-1} = p_\mu, \quad J_{ab}^1 = J_{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3; \quad (7)$$

$$J_{0a}^1 = VJ_{0a}V^{-1} = x_0p_a - x_ap_0 + \xi_a^1, \quad \xi_a^1 = \frac{ip_a}{2p_0}(\sigma_0 - \sigma_3);$$

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{p_0}{\varkappa} \right) \sigma_1 + i \left( 1 - \frac{p_0}{\varkappa} \right) \sigma_2 \right\}. \quad (8)$$

**Теорема.** Уравнение (5) инвариантно относительно следующих двух алгебр:

$$\{Q^{\text{II}}\} : P_{\mu}^{\text{II}} = p_{\mu}, \quad J_{ab}^{\text{II}} = J_{ab}, \quad J_{0a}^{\text{II}} = J_{0a} + \xi_a^{\text{II}}, \quad (9)$$

$$\xi_a^{\text{II}} = -ip_a \frac{p}{2E^2} (\sigma_0 + \sigma_3);$$

$$\{Q^{\text{III}}\} : P_0^{\text{III}} = \mathcal{H}, \quad P_a^{\text{III}} = p_a, \quad J_{ab}^{\text{III}} = J_{ab}, \quad (10)$$

$$J_{0a}^{\text{III}} = x_0 p_a - \frac{1}{2} (x_a \mathcal{H} + \mathcal{H} x_a) + \xi_a^{\text{III}}, \quad \xi_a^{\text{III}} = -ip_a \frac{\mathcal{H}}{2E^2}.$$

**Доказательство.** Воспользуемся приемом [1, 2], с помощью которого была обнаружена новая симметрия уравнений Максвелла и Дирака. Осуществим над уравнением (5) изометрическое интегральное преобразование

$$W = \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}} \{(E + \varkappa)(\sigma_0 + i\sigma_2) + (E - \varkappa)(\sigma_3 - \sigma_1)\}; \quad (11)$$

$\sigma_0$  — единичная двумерная матрица. После этого преобразования уравнение (5) переходит в систему двух не зацепляющихся интегро-дифференциальных уравнений вида

$$i \frac{\partial \Phi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \sigma_3 E \Phi(t, \mathbf{x}), \quad \Phi = W \Psi, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $E = (p_a^2 + m^2)^{1/2}$  — положительный псевдодифференциальный оператор.

Условие инвариантности (2) для уравнения (12) выглядит так

$$[L', Q'_i]_- \Phi = 0, \quad L' = p_0 - \sigma_3 E. \quad (2')$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что условие (2') удовлетворяется для таких двух алгебр:

$$\{Q^{(2)}\} : P_{\mu}^{(2)} = p_{\mu}, \quad J_{\mu\nu}^{(2)} = x_{\mu} p_{\nu} - x_{\nu} p_{\mu}; \quad (13)$$

$$\{Q^{(3)}\} : P_0^{(3)} = \sigma_3 E, \quad P_a^{(3)} = p_a, \quad J_{ab}^{(3)} = J_{ab}, \quad (14)$$

$$J_{0a}^{(3)} = t p_a - \frac{1}{2} (x_a \mathcal{H}' + \mathcal{H}' x_a), \quad \mathcal{H}' = \sigma_3 E.$$

Явная структура операторов (9) и (10) получается из операторов (13) и (14) с помощью таких преобразований

$$Q_i^{\text{II}} = W^{-1} Q_i^{(2)} W, \quad (15)$$

$$Q_i^{\text{III}} = W^{-1} Q_i^{(3)} W, \quad (16)$$

где

$$W^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{\varkappa} E} \{(E + \varkappa)(\sigma_0 - i\sigma_2) + (E - \varkappa)(\sigma_1 - i\sigma_2)\}. \quad (17)$$

Этим самым и доказана теорема. Конечно, зная явный вид операторов (9) и (10), в справедливости теоремы можно было убедиться и прямой проверкой условий (2).

**Замечание 1.** Помимо алгебры (7), (9), (10) уравнение (5) инвариантно, например, относительно такой совокупности операторов:

$$\begin{aligned} P_0^{IV} &= \mathcal{H}, & P_a^{IV} &= p_a, & J_{ab}^{IV} &= J_{ab}, \\ J_{0a}^{IV} &= tp_a - \frac{1}{2}(x_a \mathcal{H} + \mathcal{H} x_a) = tp_a - x_a \mathcal{H} + \frac{ip_a}{2\mathcal{H}}(\sigma_1 - i\sigma_2). \end{aligned} \quad (18)$$

На решениях уравнения (5) операторы  $P_0^{IV}$ ,  $J_{0a}^{IV}$  можно представить в виде

$$P_0^{IV} \Psi = p_0 \Psi, \quad J_{0a}^{IV} \Psi = \left\{ tp_a - x_a p_0 + \frac{ip_a}{2\mathcal{H}}(\sigma_1 - i\sigma_2) \right\} \Psi.$$

Можно, однако, показать, что операторы (18) унитарно эквивалентны операторам (10).

**Замечание 2.** Операторы (9) и (10) реализуют представления алгебры Пуанкаре  $P(1, 3)$  в классе интегро-дифференциальных (нелокальных) операторов. Вся нелокальность содержится в операторах  $\xi_a^{II}$  и  $\xi_a^{III}$ , поскольку  $E^{-2}$  — интегральный оператор в  $x$ -пространстве.

**Следствие 1.** Для алгебры (10)

$$[x_a, J_{\mu\nu}]_- \neq i(g_{a\mu}x_\nu - g_{a\nu}x_\mu), \quad a = 1, 2, 3; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (19)$$

$$[x_0, J_{\mu\nu}]_- = 0. \quad (20)$$

**Следствие 2.** Операторы (9) и (10) порождают обычные, лоренцовские, правила преобразования для энергии и импульса, поскольку для обеих алгебр удовлетворяются коммутационные соотношения

$$[P_\mu, J_{\alpha\beta}]_- = i(g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha).$$

**Следствие 3.** Операторы (9) и (10) порождают совершенно различные правила преобразования для пространственных и временной координат при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$(x_a^{II})' = \exp(iJ_{0b}^{II}\theta_b) x_a \exp(-iJ_{0c}^{II}\theta_c), \quad a, b, c, = 1, 2, 3, \quad (21)$$

$$(x_0^{II})' = \exp(iJ_{0b}^{II}\theta_b) x_0 \exp(-iJ_{0c}^{II}\theta_c);$$

$$(x_a^{III})' = \exp(iJ_{0b}^{III}\theta_b) x_a \exp(-iJ_{0c}^{III}\theta_c); \quad (22)$$

$$(x_0^{III})' = \exp(iJ_{0b}^{III}\theta_b) x_0 \exp(-iJ_{0c}^{III}\theta_c) = x_0^{III}. \quad (23)$$

Формула (23) является следствием соотношения (20) и указывает на то, что время не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой.

Суммируя все сказанное, приходим к выводу: относительно преобразований (22), (23) релятивистское уравнение (5) инвариантно в смысле (2), хотя время не изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой. При этом, конечно, нелокальные преобразования (22) не совпадают с преобразованиями Лоренца. Для уравнений Максвелла и Дирака этот факт был обнаружен в [2].

**Замечание 3.** Преобразование (11), осуществляющее переход от уравнения (5) к (12), не единственно. Существует много преобразований такого типа. Вот одно из них [1, 2]:

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \sigma_3 \frac{\mathcal{H}}{E} \right), \quad W_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - \sigma_3 \frac{\mathcal{H}}{E} \right).$$

Наконец, приведем явный вид оператора координаты в представлении  $\Psi$ :

$$\hat{X}_a = W^{-1} x_a W = x_a + \frac{i p_a}{2E^2} (\sigma_0 + \sigma_3).$$

1. Фушич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, № 1, 3; Препринт Ин-та теор. физики АН УССР, № 70-32, Киев, 1970.
2. Fushchych W.I., *Lettere Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508.

# On the Galilean-invariant equations for particles with arbitrary spin

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

In our preceding paper [1] the equations of motion which are invariant under the Galilei group  $G$  have been obtained starting from the assumption that the Hamiltonian of a nonrelativistic particle has positive eigenvalues and negative ones. These nonrelativistic equations as well as the relativistic Dirac equation lead to the spin-orbit and to the Darwin interactions by the standard replacement  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ . Previously it was generally accepted the hypothesis that the spin-orbit and the Darwin interactions are truly relativistic effects [2].

In [1] only the equations for the particles with the lowest spins  $s = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$  have been obtained. What puts the equations [1] in a class by themselves is that the transformation properties of a wave function are rather complicated (nonlocal) and it is difficult to establish their invariance under the Galilei transformations after the replacement  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu$ .

In the present note equations for arbitrary-spin particles are obtained which possess as good physical properties as the equations [1].

Moreover the wave function has simple transformation properties in the case of the equation describing the interaction with an external field as well as in the case of the absence of interaction.

We shall start from the assumption that under the Galilei transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{V}t + \mathbf{a}, \\ t &\rightarrow t' = t + b, \end{aligned} \quad (1)$$

the  $2(2s+1)$ -component wave function  $\Psi(t, \mathbf{x})$  transforms as

$$\Psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \Psi'(t', \mathbf{x}') = \exp[i f(t, \mathbf{x})] D^s(R, \mathbf{V}) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad (2)$$

where  $D^s(R, \mathbf{V})$  is some numerical matrix, depending on the parameters of the transformation (1),  $\exp[i f(t, \mathbf{x})]$  is the phase factor [3]

$$f(t, \mathbf{x}) = m\mathbf{V} \cdot R\mathbf{x} + \frac{1}{2}mv^2t. \quad (3)$$

The generators of the group  $G$ , which corresponds to the transformation (2), have the form

$$\begin{aligned} P_0 &= i\frac{\partial}{\partial t}, & P_a &= p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, & J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ G_a &= t p_a - m x_a + \lambda_a, & S_{ab} &= \begin{pmatrix} s_{ab} & 0 \\ 0 & s_{ab} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

where  $s_{ab}$  are the generators of the irreducible representation  $D(s)$  of the group  $O_3$ ,  $\lambda_a$  are some numerical matrices, which have to be such that the operators (4) satisfy

the commutation relations of the algebra  $G$ . It can be shown that the most general (up to equivalence) form of the matrices  $\lambda_a$  satisfying this requirement is

$$\lambda_a = k(\sigma_3 + i\sigma_2)S_a, \quad S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}S_{bc}, \quad (5)$$

where  $\sigma_2, \sigma_3$  are the  $2(2s+1)$ -dimensional Pauli matrices which commute with  $S_{ab}$ ,  $k$  is an arbitrary constant.

To find the motion equations for arbitrary-spin particles

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, \mathbf{x}) = H_s(\mathbf{p}, \mathbf{s})\Psi(t, \mathbf{x}) \quad (6)$$

it is sufficient to construct such an operator (Hamiltonian)  $H_s(\mathbf{p}, \mathbf{s})$  that eq. (6) be invariant under the Galilei group  $G$ . Equation (6) will be invariant relative to  $G$ , if the following conditions are satisfied:

$$[H_s(\mathbf{p}, \mathbf{s}), P_a]_- = 0, \quad [H_s(\mathbf{p}, \mathbf{s}), J_{ab}]_- = 0, \quad [H_s(\mathbf{p}, \mathbf{s}), G_a]_- = -iP_a. \quad (7)$$

Thus our problem has been reduced to the solution of the commutation relations (7)<sup>1</sup>.

In order to solve relation (7) we expand  $H_s$  in a complete system of the orthoprojectors and Pauli matrices

$$H_s(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \sum_{\mu, r} \sigma_\mu a_r^\mu \Lambda_r, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (8)$$

where

$$\Lambda_r = \prod_{r \neq r'} \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}/p - r'}{r - r'}, \quad r, r' = -s, -s+1, \dots, s,$$

and  $\sigma_0$  is the  $2(2s+1)$ -dimensional unit matrix,  $a_r^\mu(p)$  are unknown coefficient functions. Substituting (8) into (7), using the relations [4]

$$[\Lambda_r, x_a] = \frac{S_{ab}p_b}{2p^2}(2\Lambda_r - \Lambda_{r+1} - \Lambda_{r-1}) + \frac{i}{2p} \left( S_a - \frac{p_a}{p} \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p} \right) (\Lambda_{r+1} - \Lambda_{r-1}), \quad (9)$$

$$[\Lambda_r, S_{ab}] = p_a[\Lambda_r, x_b] - p_b[\Lambda_r, x_a],$$

and taking into account the completeness and the orthogonality of the orthoprojectors, we have found that, up to equivalence, the general form of the Hamiltonian  $H_s(\mathbf{p}, \mathbf{s})$ , satisfying (7), is given by the formula

$$H_s = m_0 + \sigma_3 \eta m + \frac{p^2}{2m} - \sigma_1 2i\eta h \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} - (\sigma_3 + i\sigma_2) \eta k^2 \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m}, \quad (10)$$

where  $\eta$  is an arbitrary constant.

Formula (10) gives the free nonrelativistic Hamiltonian for a particle with an arbitrary spin. Equation (6) with the Hamiltonian (10) is invariant under the group  $G$ . For the spin  $\frac{1}{2}$  particle (when  $s = \frac{1}{2}$ ,  $k = -i$ ,  $\eta = 1$ ) equation (6) may be written in the compact form

$$(\gamma_\mu p^\mu + m)\Psi = (1 + \gamma_4 - \gamma_0) \frac{p^2}{2m} \Psi, \quad (11)$$

where  $\gamma_\mu$  are the Dirac matrices.

<sup>1</sup>The analogous problem has been solved in the relativistic case in [4]. Lately the method of the work [4] has been further developed in works of R.F. Guertin [5].

The Hamiltonian (10) and the generators (4) are non-Hermitian under the usual scalar product. They are, however, Hermitian under

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger M \Psi_2, \quad (12)$$

where  $M$  is the positive-definite metric operator

$$M = 1 + [i(k - k^*)\sigma_3 - (k + k^*)\sigma_2] \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{m} + 2|k|^2(1 + \sigma_1) \left( \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{m} \right)^2. \quad (13)$$

Besides, if  $\eta, k$  satisfy the condition  $\eta k = (\eta k)^*$ , the Hamiltonians are Hermitian also in the indefinite metric

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger \xi \Psi_2, \quad (14)$$

where

$$\xi = \begin{cases} \sigma_3, & \text{if } \eta^* = \eta, k^* = k, \\ \sigma_2, & \text{if } \eta^* = -\eta, k^* = -k. \end{cases}$$

With the help of the transformation

$$H_s \rightarrow H'_s = V H_s V^{-1}, \quad V = \exp \left[ i \frac{\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{p}}{m} \right], \quad (15)$$

the Hamiltonian (10) may be reduced to the diagonal form

$$H'_s = m_0 + \sigma_3 \eta m + \frac{p^2}{2m}. \quad (16)$$

It is interesting to note that the condition of Galilei invariance admits the possibility to introduce two masses: the rest mass, or the rest energy ( $\varepsilon_1 = m_0 + \eta m$ ,  $\varepsilon_2 = m_0 - \eta m$ ) and the kinetic mass (the coefficient of  $p^2$ ). Below we consider the case when  $m_0 = 0$ ,  $\eta = 1$ , i.e. the rest mass is equal to the kinetic mass.

To describe the motion of the charged particle in external electromagnetic fields we make in (6) and (10) the replacement  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu$  (symmetrizing preliminarily the Hamiltonian in  $p_a$  [1]). This leads to the equation

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{x}) = H_s(\boldsymbol{\pi}) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad (17)$$

$$H_s(\boldsymbol{\pi}) = \sigma_3 m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \sigma_1 2ik(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) + \frac{2k^2}{m} (\sigma_3 + i\sigma_2) \left[ (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}) \right], \quad (18)$$

where  $H_a = i\varepsilon_{abc}[\pi_b, \pi_c]$  are components of the magnitude of the magnetic field.

It is important to note that eq. (17) as before is invariant with respect to the Galilei transformations (1) and (2), if the vector potential is transformed according to [2]

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = R\mathbf{A}, \quad A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 + \mathbf{V}R\mathbf{A}. \quad (19)$$

To prove this statement it is sufficient to use the exact form of the matrix  $D^s(R, \mathbf{V})$  in (2)

$$D^s(R, \mathbf{V}) = (1 + i\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{V}) \cdot \begin{pmatrix} D^s(R) & 0 \\ 0 & D^s(R) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

where  $D^s(R)$  the matrices from the representation  $D(s)$  of the group  $O_3$ .

As in the case of the Dirac equation [6] the Hamiltonian (18) cannot be diagonalized exactly. We shall make the approximate diagonalization of the operator (18) up to the terms of the power  $1/m^2$  with the help of the operator

$$V(\boldsymbol{\pi}) = \exp[iB_3^s] \exp[iB_2^s] \exp[iB_1^s], \quad (21)$$

where

$$\begin{aligned} B_1^s &= i\sigma_2 k \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{m}, & E_a &= -\frac{\partial A_a}{\partial x_a} - \frac{\partial A_a}{\partial t}, \\ B_2^s &= -\sigma_1 k \frac{[\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}^2]_-}{4m^2} - i\sigma_1 k^2 \frac{(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}}{m^2} - i\sigma_1 k \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}}{2m^2}, \\ B_3^s &= -\frac{2}{3} ik^3 \sigma_2 \left( \frac{\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}}{m} \right)^3 + ik^3 \frac{[\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}, \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}]_+}{m^3} \sigma_2 + \sigma_2 \frac{k^2 [(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2, eA_0]}{m^3}. \end{aligned} \quad (22)$$

After this diagonalization one obtains

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{\pi})H^s(\boldsymbol{\pi})V^{-1}(\boldsymbol{\pi}) &= \sigma_3 m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + eA_0 + k^2 \sigma_3 \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}}{m} - \\ &- \frac{k^2}{4m^2} \mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \boldsymbol{\pi}) + \frac{k^2}{6m^2} s(s+1) \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{k^2}{12m^2} Q_{ab} \frac{\partial E_b}{\partial x_a} + \\ &+ \frac{k^3}{m^2} \mathbf{S} \cdot (\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{H} - \mathbf{H} \times \boldsymbol{\pi}) - \frac{1}{3} \frac{k^3}{m^2} Q_{ab} \frac{\partial H_a}{\partial x_b} + o\left(\frac{1}{m^3}\right), \end{aligned} \quad (23)$$

where  $Q_{ab}$  is the tensor of the quadrupole interaction

$$Q_{ab} = 3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1). \quad (24)$$

It is readily seen from (23) that  $-k^2$  can be interpreted as the dipole magnetic moment of the particle. If  $s = \frac{1}{2}$ ,  $-k^2 = 1$  (it corresponds to the ‘‘normal’’ dipole moment), the first seven constituents of the approximate Hamiltonian coincide on the set  $\Phi^+ = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3)\Phi$  with the Foldy–Wouthuysen Hamiltonian, which had been obtained from the relativistic Dirac equation. The last two terms in (23) may be interpreted as the magnetic spin-orbit and the magnetic quadrupole interactions of the particle with the field.

In conclusion we note that we have not required the invariance with respect to the time reflection for eq. (6). This invariance has been ensured if one doubles (brings to  $4(2s+1)$ ) the number of the components of the wave function and assumes that the particle energy can take both positive and negative values. An analogous situation takes place in the relativistic theory [7].

As in the relativistic theory, it is possible to construct for the particle with spin  $s$  the nonrelativistic wave equations with another (different from  $2(2s+1)$  or  $4(2s+1)$ )

number of components. For instance, the spin-one and spin-zero particles may be described by the Galilean-invariant equations

$$(\beta_{\mu} p^{\mu} - m)\Psi = \left[ \beta_0 \frac{p^2}{2m} + \beta_0^2 \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p})^2}{m} \right] \Psi, \quad (25)$$

where  $\beta_{\mu}$  are the  $10 \times 10$ - or  $5 \times 5$ -dimensional Kemmer–Duffin–Petiau matrices. These equations will be considered in another work.

**Note.** The equations obtained in [1] and in the present paper may be considered as those with the broken Lorentz symmetry. Actually, equations (12) from [1] and (11) from the present work have the form of the Dirac equation with the additional term which is noninvariant under the Poincaré group, but is Galilean invariant. The second-order equations with this broken symmetry have the form

$$(p_{\mu} p^{\mu} - m^2)\Psi = B\Psi, \quad (26)$$

where  $B = p^4/4m^2$  for the equations of ref. [1] and  $B = m(1 + 2\sigma_3) + p^2\sigma_3 + p^4/4m^2$  for the equations from the present paper (if  $m_0 = m$ ,  $\eta = 1$ ).

1. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, **14**, № 13, 483–488.
2. Levi-Leblond J.-M., *Comm. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286.
3. Bargman V., *Ann. Math.*, 1954, **59**, 1;  
Hamermesh M., *Am. J. Phys.*, 1960, **9**, 518.
4. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., Nikitin A.G., *Teor. Mat. Fiz.*, 1971, **8**, № 2, 192–205 (in Russian); *Theor. Math. Phys.*, 1971, **8**, 766 (in English).
5. Guertin R.F., *Ann. of Phys.*, 1974, **88**, 504; 1975, **91**, 386.
6. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **68**, 29.
7. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **6**, № 4, 133–137.

# О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики

В.И. ФУЩИЧ, Ю.Н. СЕГЕДА

В данной заметке находим группы инвариантности уравнений

$$i \frac{\partial \varphi(\tau, x)}{\partial \tau} = \frac{1}{l} \square \varphi(\tau, x), \quad (1)$$

$$i \frac{\partial \Psi(\tau, x)}{\partial \tau} = \gamma_\mu p^\mu \Psi(\tau, x), \quad p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nabla^2$  — оператор Даламбера,  $x$  — точка в пространстве Минковского,  $l$  — постоянная величина.

Четырехрядные матрицы  $\gamma_\mu$  удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad g_{00} = -g_{kk} = 1, \quad k = 1, 2, 3; \quad g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (3)$$

В уравнении (2) по повторяющимся индексам  $\mu$ , подразумевается суммирование от 0 до 3.  $\phi(\tau, x)$  — скалярная функция,  $\Psi(\tau, x)$  — четырехрядная матрица-столбец

$$\Psi(\tau, x) = \begin{pmatrix} \psi_1(\tau, x) \\ \psi_2(\tau, x) \\ \psi_3(\tau, x) \\ \psi_4(\tau, x) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Переменная  $\tau$  — собственное время частицы.

Обозначим через  $Q_A$  базисные векторы алгебры Ли некоторой группы  $G$ . Для того чтобы уравнения (1) и (2) были инвариантными относительно группы  $G$ , должны выполняться, по определению, следующие коммутационные соотношения:

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{l} \square, Q_A \right] \varphi(\tau, x) = 0, \quad (5)$$

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \tau} - \gamma_\mu p^\mu, Q_A \right] \Psi(\tau, x) = 0. \quad (6)$$

Мы иногда будем употреблять термин “алгебра инвариантности” вместо “группа инвариантности”.

1. Найдем максимальную группу инвариантности уравнения (1) в классе дифференциальных операторов первого порядка

$$Q_A = \sum_{j=0}^4 f_A^j(\tau, x) D_j + f_A(\tau, x), \quad (7)$$

где

$$D_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad D_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_4 = i \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (8)$$

$\{A\}$  — некоторое множество индексов.

Наша задача состоит в том, чтобы найти функции  $f_A^j(\tau, x)$ ,  $f_A(\tau, x)$ , при которых условия (5) выполняются. Условия (5) можно записать в виде

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{l} \square, Q_A \right] = i \lambda(\tau, x) \left( i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{l} \square \right), \quad (9)$$

где  $\lambda(\tau, x)$  — некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, подлежащая определению. Подставляя (7) в (8), получаем довольно громоздкую систему дифференциальных уравнений для функций  $\lambda(\tau, x)$ ,  $f_A(\tau, x)$ ,  $f_A^j(\tau, x)$ . Решая эту систему уравнений, получим набор 17 операторов  $\{Q_A\}$ , удовлетворяющих условию (9). Эти операторы имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned} A &= -i \left( \tau^2 \frac{\partial}{\partial \tau} + \tau t \frac{\partial}{\partial t} + \tau x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + 2\tau \right) + \frac{l}{4} s^2, \\ D &= i \left( 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + t \frac{\partial}{\partial t} + x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + 2 \right), \quad R = i \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \\ P_k &= -i \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad G_\mu = \tau p_\mu - \frac{l}{2} x_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \\ x_0 &\equiv t, \quad s^2 = t^2 - x_k^2 = x_\mu x^\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (10)$$

Операторы (10) образуют алгебру Ли и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [A, D] &= -2iA, & [D, R] &= -2iR, & [R, G_\mu] &= iP_\mu, & [A, R] &= iD, \\ [D, P_\mu] &= -iP_\mu, & [R, J_{\mu\nu}] &= 0, & [A, P_\mu] &= iG_\mu, & [D, G_\mu] &= iG_\mu, \\ [P_\mu, G_\nu] &= -i \frac{l}{2} g_{\mu\nu}, & [A, G_\mu] &= 0, & [D, J_{\mu\nu}] &= 0, & [A, J_{\mu\nu}] &= 0, \\ [R, P_\mu] &= 0, & [G_\mu, G_\nu] &= 0, & [J_{\mu\nu}, P_\lambda] &= i(g_{\nu\lambda} P_\mu - g_{\mu\lambda} P_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, G_\lambda] &= i(g_{\nu\lambda} G_\mu - g_{\mu\lambda} G_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha}). \end{aligned} \quad (11)$$

Эта алгебра Ли порождает соответствующую 17-параметрическую группу Ли, которую по аналогии с группой инвариантности нерелятивистского уравнения Шредингера [1–3] назовем релятивистской группой Шредингера.

Таким образом, окончательно имеем следующий результат.

**Теорема 1.** Уравнение (1) инвариантно относительно релятивистской группы Шредингера, алгебра Ли которой задается коммутационными соотношениями (11).

**Замечание 1.** Можно непосредственной проверкой убедиться, что если к операторам  $J_{\mu\nu}$  присоединить оператор

$$J_{\mu 4} = \tau \tilde{p}_\mu - \frac{1}{2} (x_\mu p + p x_\mu), \quad \tilde{p}_\mu = p_\mu \frac{2p}{l}, \quad p = (p_\alpha p^\alpha)^{1/2},$$

то совокупность операторов  $\{J_{\mu\nu}, J_{\mu 4}\}$  удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры Ли группы  $SO(1, 4)$ :

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\lambda 4}] &= i(g_{\nu\lambda}J_{\mu 4} - g_{\mu\nu}J_{\nu 4}), \quad [J_{\mu 4}, J_{\nu 4}] = iJ_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

**Замечание 2.** В работе [4] была предложена релятивистская группа Галилея  $\tilde{G}_5$ , являющаяся естественным обобщением группы Галилея  $G_4$ . Группа  $\tilde{G}_5$  является подгруппой релятивистской группы Шредингера.

2. В этом пункте найдем группы симметрии уравнения (2) — уравнения типа Дирака с собственным временем.

**Теорема 2.** Уравнение (2) инвариантно относительно группы вращений и сдвигов в пятимерном пространстве Минковского.

**Доказательство.** Непосредственной подстановкой можно убедиться, что совокупность операторов

$$\begin{aligned} P_0 &= i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad P_4 = -i\frac{\partial}{\partial \tau}, \\ J_{\mu\nu} &= x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \\ J_{4\mu}^I &= \tau p_\mu + \frac{1}{2}(x_\mu \hat{M} + \hat{M} x_\mu), \quad \hat{M} = \gamma_\mu p^\mu, \end{aligned} \quad (12)$$

удовлетворяет условиям (6), а их коммутационные соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}), \\ [J_{\mu\nu}, P_\lambda] &= i(g_{\nu\lambda}P_\mu - g_{\mu\lambda}P_\nu), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4$ ;  $g_{00} = -g_{11} = \dots = -g_{44} = 1$ . Из (13) видно, что совокупность операторов  $J_{\mu\nu}, P_\lambda, \mu, \nu, \lambda = 0, 1, \dots, 4$ , является базисными элементами алгебры Ли группы вращений и сдвигов в 5-мерном пространстве Минковского — группы  $P(1, 4)$ . Более подробно об этой группе и ее применениях в физике см. [5].

На множестве решений уравнения (2) операторы (12) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P_0 &= i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad P_4 = -i\frac{\partial}{\partial \tau}, \\ J_{\mu\nu}^{II} &= J_{\mu\nu}, \quad J_{4\mu}^{II} = \tau p_\mu - x_\mu p_4 + \frac{i}{2}\gamma_\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (12')$$

3. До сих пор мы находили алгебры Ли групп инвариантности дифференциальных уравнений (1) и (2) в классе дифференциальных операторов первого порядка. В [6] показано, что, например, уравнения Максвелла и Дирака допускают алгебру инвариантности, базисные элементы которой являются существенно интегро-дифференциальными операторами. Это означает, что если расширить класс иско- мых дифференциальных операторов  $Q_A$  до интегро-дифференциальных операторов, сможем обнаружить совершенно новые симметрии уравнений движения. В

этом пункте найдем несколько алгебр инвариантности для уравнения (2) в классе интегро-дифференциальных операторов.

**Теорема 3.** *Если на множестве решений уравнений (1) и (2)  $p_\mu^2 > 0$ , то эти уравнения инвариантны относительно групп  $SO(1, 4)$  и  $SO(1, 5)$  соответственно.*

Доказательство проведем только для уравнения (2). Воспользуемся приемом, предложенным в [7]. Рассмотрим оператор

$$R_\mu = \frac{1}{2}(P^\alpha J_{\mu\alpha} + J_{\mu\alpha} P^\alpha) \quad (\mu, \alpha = 0, 1, 2, 3, 4). \quad (14)$$

Оператор  $R_\mu$  удовлетворяет следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [R_\mu, R_\nu] &= iJ_{\mu\nu}(P_\alpha P^\alpha), & [J_{\mu\nu}, R_\lambda] &= i(g_{\nu\lambda}R_\mu - g_{\mu\lambda}R_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}). \end{aligned} \quad (15)$$

Введем интегральный оператор

$$J_{\mu 5} = \frac{R_\mu}{\sqrt{P_\alpha P^\alpha}}. \quad (16)$$

Оператор  $J_{\mu 5}$  удовлетворяет соотношениям

$$[J_{\mu 5}, J_{\nu 5}] = iJ_{\mu\nu}. \quad (17)$$

Из (15)–(17) следует, что операторы  $J_{\mu\nu}$ ,  $J_{\mu 5}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы  $SO(1, 5)$  группы вращений в  $(1 + 5)$ -мерном пространстве Минковского. Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказывается следующая теорема.

**Теорема 4.** *Если на множестве решений уравнений (1) и (2)  $p_\mu^2 < 0$ , то эти уравнения инвариантны относительно групп  $SO(2, 3)$  и  $SO(2, 4)$  соответственно.*

Все найденные выше типы инвариантности уравнений связаны с преобразованием пространственно-временных координат. Оказывается, что система уравнений (2) обладает еще одним типом симметрии, обусловленным преобразованием только компонент волновой функции  $\Psi(\tau, x)$ . Базисные элементы алгебры инвариантности  $Q_A$  в этом случае также являются интегро-дифференциальными операторами.

**Теорема 5.** *Уравнение (2) инвариантно относительно группы  $SO(1, 3)$ , причем базисные элементы алгебры Ли задаются формулами*

$$S^{\mu\nu}(p) = S^{\mu\nu} + \xi^{\mu\nu}(p), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu, & \mu \neq \nu &= 0, 1, 2, 3; \\ \xi^{\mu\nu}(p) &= -\frac{i}{2}(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu)\frac{1}{p^2}(i\gamma_5 m - \hat{M}). \end{aligned} \quad (19)$$

**Доказательство.** Для доказательства теоремы перейдем от дифференциального уравнения (2) к эквивалентному ему интегро-дифференциальному уравнению [6–8]. Этот переход осуществляется с помощью оператора

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + i\gamma_5 \frac{\hat{M}}{m} \right), \quad m = [\hat{M}^2]^{1/2}, \tag{20}$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 - i\gamma_5 \frac{\hat{M}}{m} \right), \quad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Оператор  $W$  использовался в работах [9, 10] для совершенно других целей.

После преобразования (20) уравнение (2) принимает вид

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = i\gamma_5 m \Phi, \quad \Phi = W\Psi. \tag{21}$$

Условие инвариантности (6) принимает вид

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial \tau} - i\gamma_5 m, Q_A^\Phi \right] \Phi = 0, \quad Q_A^\Phi = W Q_A W^{-1}. \tag{22}$$

Из (22) видно, что все те четырехрядные матрицы, которые коммутируют с матрицей  $\gamma_5$ , образуют алгебру инвариантности уравнения (21). Базисными элементами этой алгебры являются матрицы

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \tag{23}$$

Если теперь над матрицами (23) сделать обратное преобразование  $W^{-1}$ , то получим интегральные операторы (19), образующие алгебру Ли группы  $SO(1,3)$ . Теорема доказана.

В связи с приведенными выше результатами интересно исследовать группы симметрии уравнений типа (1) и (2) с потенциалом  $V(x_\mu x^\mu)$ . Приведем без доказательства следующее утверждение.

**Теорема 6.** *Уравнение*

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \mathcal{H} \varphi(\tau, x),$$

где

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{l} p_\alpha p^\alpha + V(x), \quad V(x) = (x_\alpha x^\alpha)^{-1/2},$$

инвариантно относительно группы  $SO(1,4)$ , если  $\mathcal{H} < 0$ , и группы  $SO(2,3)$ , если  $\mathcal{H} > 0$ .

**Замечание 3.** Если на решения уравнения (2) наложить релятивистски-инвариантное условие

$$i \frac{\partial \Psi(\tau, x)}{\partial \tau} = \varkappa \Psi(\tau, x), \tag{24}$$

$\varkappa$  — фиксированная масса частицы, то система уравнений (2), (24) совпадет с обычным уравнением Дирака. Важно при этом подчеркнуть, что алгеброй инвариантности системы (2), (24) также будет алгебра Ли группы  $SO(1,3)$ , базисными

элементами которой будут уже не интегральные, а дифференциальные операторы, так как в (19), согласно (24), следует положить  $p^2 = \varkappa^2$  и  $m = \varkappa$ .

1. Niederer U., The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equation, *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 802–810.
2. Andersson R.L., Kumei S., Wulfman C.E., Invariants of the equations of wave mechanics, *Rev. Mex. Phys.*, 1972, **21**, № 1, 1–35.
3. Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W.Jr., Lie theory and separation of variables, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 3, 499–511.
4. Aghassi J.J., Roman P., Santilli R.M., New dynamical group for relativistic quantum mechanics, *Phys. Rev. D*, 1970, **1**, № 10, 2753–2765.
5. Фушич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе, *ТМФ*, 1970, **4**, № 3, 361–382.
6. Fushchych W.I., On the additional invariance of the Dirac and Maxwell Equations, *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **11**, № 10, 508–512
7. Фушич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *ТМФ*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
8. Fushchych W., On the additional invariance of the relativistic equations of motion, Preprint ITP-70-32, Kiev, 1970, 17 p.
9. Chakrabarti A., Canonical form of the covariant free-particle equations, *J. Math. Phys.*, 1963, **4**, № 10, 1215–1222.
10. Johnson J., Chang K.K., Exact diagonalisation of the Dirac hamiltonian in an external field, *Phys. Rev. D*, 1974, **10**, № 8, 2421–2430.

# Максимальна та мінімальна групи симетрії атома водню

С.А. ВЛАДИМІРОВ, В.І. ФУЩИЧ

Using the representation in which the hydrogen atom Hamiltonian is diagonal, the maximal and minimal symmetry groups of the Schrödinger equation are found. The maximal group contains any finite-dimensional Lee group as a subgroup. The minimal group which determines the spectrum degeneracy, is  $SU(2)$  group.

Дослідження прихованих або додаткових симетрій різних рівнянь теоретичної фізики привертає увагу багатьох дослідників [1–11]. В [10] показано, що для знаходження групи інваріантності того чи іншого рівняння найбільш доцільно розв'язувати цю задачу в такому зображенні, де оператор рівняння є діагональним. Саме ця ідея і використовується для рівняння Шредінгера. В цій роботі з'ясується питання, наскільки істотні теоретико-групові властивості сукупності операторів, які комутують з оператором Гамільтона системи. Виявилось, що максимальна група симетрії занадто широка (вона, наприклад, для атома водню містить в собі будь-яку скінченну групу Лі), а мінімальна група, яка визначає кратність спектра, є універсальною для багатьох систем — це група  $SU(2)$ .

Показано, що групу  $D_4$  для атома водню виділяє умова, щоб вона як група перетворень у просторі станів містила в собі групу обертань тривимірного простору, що діє також у просторі станів.

## § 1. Максимальна група симетрії

Розглянемо питання про симетрію атома водню

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{r}\right)\psi = E\psi. \quad (1)$$

Нас цікавлять оператори, які комутують з гамільтоніаном  $H$ , тому найбільш зручно перейти до енергетичного зображення. Оскільки мова іде про атом водню, то природно за базис вибрати і власні функції рівняння (1)  $\psi_{nlm}$ , які відповідають зв'язаним станам. Ці функції утворюють повну систему в просторі квадратично інтегрованих функцій. Надалі будемо вважати, що всі оператори діють у тому ж просторі. Тоді оператор Гамільтона має вигляд

$$H_{nlm}^{n'l'm'} = E_n \delta_n^{n'} \delta_l^{l'} \delta_m^{m'}, \quad E_n = -\frac{1}{2n^2}. \quad (2)$$

Лінійний оператор  $V$ , що комутує з (2), має такі матричні елементи:

$$V_{nlm}^{n'l'm'} = \delta_n^{n'} v_{lm}^{l'm'}. \quad (3)$$

Тут  $v_{lm}^{l'm'}$  — довільні комплексні числа, які при фіксованому  $n$  утворюють матрицю розмірності  $n^2$  (розмірність матриці дорівнює кратності власного значення  $E_n$ ). Усі такі невідроджені матриці утворюють групу  $GL(n^2, C)$ . Звідси випливає, що група

інваріантності  $G_L$  рівняння (1) містить в собі групи  $GL(n^2, C)$  при  $n = 1, 2, \dots$ , а отже, і будь-яку скінченно-вимірну групу лінійних перетворень. Звідси, згідно з [12], випливає, що будь-яка скінченна група Лі може відігравати роль групи  $G_L$  системи (1).

Довільне перетворення симетрії квантової системи, як показано в [13], описується унітарним чи антиунітарним оператором. Обмежуючи групу  $G_L$  умовою унітарності, одержуємо групу симетрії рівняння (1):

$$G_S = \bigotimes_{n=1,2,\dots} U(n^2), \quad (4)$$

де  $U(n^2)$  — унітарна група в  $n^2$ -вимірному комплексному просторі. Рівняння (1) інваріантне відносно комплексного спряження  $\sigma$ , яке не входить до  $G_L$ . Доповнивши групу (4) оператором  $\sigma$ , одержимо максимальну групу симетрії рівняння (1):

$$G_L^{\max} = \left[ \bigotimes_{n=1,2,\dots} U(n^2) \right] \otimes G_\sigma, \quad G_\sigma = \{1, \sigma\}. \quad (5)$$

Аналогічно для довільного гамільтоніана у випадку дискретного спектра маємо

$$G_S^{\max} = \left[ \bigotimes_{n=1,2,\dots} U(N_n) \right] \otimes G_\sigma, \quad (6)$$

$N_n$  — кратність виродження власного значення  $E_n$ . Для нерелятивістського атома водню  $N_n = n^2$ , для релятивістського  $N_n = 4n - 2$ , для довільного обертально-інваріантного рівняння  $N_n = 2n - 1$  і т.д.

## § 2. Мінімальна група симетрії

Дослідимо питання про “зменшення” групи, яка забезпечує наявну кратність спектра оператора  $H$ . Нехай  $G_S$  — група симетрії гамільтоніана  $H$ ,  $T_\psi$  — її зображення у просторі хвильових функцій,  $\{T_{li}\}$  — сукупність усіх незвідних зображень з розмірністю  $l_i$  групи  $G_S$ , які входять в  $T_\psi$ . Тоді, згідно з [13], можна стверджувати, що  $H$  має власні значення, кратність яких не менша за  $l_i$ . Звідси випливає, що групою симетрії оператора  $H$ , яка забезпечує необхідну кратність виродження спектра, може бути така група  $G_E$ , серед незвідних зображень якої є зображення розмірності  $l_i$  при всіх  $i$ . Ці вимоги задовольняє група  $SU(2)$ , яка має незвідні зображення будь-якої цілої та скінченної розмірності  $m_i = 2s_i + 1$ . Оскільки  $l_i$  — ціле, рівняння

$$m_i = 2s_i + 1 = l_i \quad (7)$$

завжди розв’язується в цілих або півцілих  $s_i$ .

Покажемо, що  $SU(2)$  є мінімальною за розмірністю групою серед груп  $G_E$ . Одновимірна група Лі є абелевою і не може задавати кратність спектра  $H$ . Єдина група Лі з  $G$  розмірністю, що дорівнює двом, розв’язується [14] і, отже, її незвідні зображення одновимірні. Серед груп Лі з розмірністю, що дорівнює трьом, нам підходить лише група  $SU(2)$ , оскільки інші групи або розв’язні, або не мають унітарних зображень потрібної розмірності. Для атома водню  $l_i = l^2$  і з (7) маємо

$$s_i = \frac{1}{2}(l^2 - 1), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$T_\psi = \sum_{i=1,2,\dots} \otimes T_{s_i}. \quad (9)$$

Таким чином, для довільного рівняння Шредінгера, зв'язані стани якого утворюють базис і кратності різних власних значень не збігаються і скінченні, кратність спектра можна пояснити, виходячи з групи  $SU(2)$ .

### § 3. Група $O_4$

З результатів § 1 та § 2 випливає, що теоретико-групові властивості сукупності операторів, які комутують з оператором  $H$ , дуже слабо пов'язані з фізичними властивостями системи.

З'ясуємо умови, які виділяють групу  $O_4$  з усіх інших груп симетрії рівняння Шредінгера для атома водню. Зафіксуємо зображення групи обертань фізичного простору в просторі станів атома водню. Тоді підпростір власних функцій  $\psi_{nlm}$ , які відносяться до власного значення  $E_n$ , утворює звідне зображення  $T_n$  групи  $SO_3$ .

Розкладаючи  $T_n$  на незвідні компоненти, бачимо, що до нього входять по одному разу незвідні зображення групи  $SO_3$  з вагою  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ .

Простим підрахунком можна показати, що серед класичних груп малих розмірностей лише  $O_4$  має при довільному  $n$  незвідні зображення розмірності  $n^2$ , які, будучи розкладеними по підгрупі  $SO_3$ , містять у собі вагу  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Таким чином, можна сказати, що використання групи  $O_4$  у випадку атома водню тісно пов'язане з тим, як діє група обертань тривимірного фізичного простору в просторі станів квантової системи.

1. Fok V.A., *Zs. Phys.*, 1936, **98**, 145.
2. Добронравов Ю.А., *Вестник ЛГУ*, 1957, № 10, 5.
3. Аллилуев С.П., *ЖЭТФ*, 1958, **33**, 200.
4. Ніш Ф.М., Jauch J.M., *Phys. Rev.*, 1950, **57**, 641.
5. Демков Ю.М., *Вестник ЛГУ*, 1953, № 11.
6. Переломов А.М., Попов В.С., *ДАН СССР*, 1968, **181**, 320.
7. Малкин И.А., Манько В.И., *Письма в ЖЭТФ*, 1968, **7**, 105.
8. Малкин И.А., Манько В.И., *ЖЭТФ*, 1968, **55**, 287.
9. Малкин И.А., Манько В.И., *Ядерная физика*, 1968, **8**, 1264.
10. Фушич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
11. Аронсон Э.Б., Малкин И.А., Манько В.И., *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, М., Атомиздат, т. 5, 1974, С. 122.
12. Адо И., О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок, *Изв. ФМО, Казань*, 1934/35, **7**, 3.
13. Вигнер Е., *Теория групп*, М., ИЛ, 1961.
14. Джекобсон Н., Алгебры Ли, М., Мир, 1964.

# Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам

А.Г. НИКИТИН, В.И. ФУЩИЧ, И.И. ЮРИК

The problem of the reduction of the generalized Poincaré groups  $P(1, n)$  representations by their subgroups  $P(1, n - k)$  is considered. The explicit form of the unitary operator connecting the canonical representation basis with the  $P(1, n - k)$ -basis is given explicitly. The case of the inhomogeneous De Sitter Group is considered in detail.

Рассматривается задача о редукции унитарных неприводимых представлений обобщенных групп Пуанкаре  $P(1, n)$  по их подгруппам  $P(1, n - k)$ . Находится явный вид унитарного оператора, связывающего канонический базис представления с  $P(1, n - k)$ -базисом. Явно задается действие генераторов в  $P(1, n - k)$ -базисе. Подробно рассмотрен случай неоднородной группы де Ситтера.

## Введение

Обобщенная группа Пуанкаре  $P(1, n)$  является полупрямым произведением групп  $SO_0(1, n)$  и  $T$ , где  $T$  — аддитивная группа  $n$ -мерных вещественных векторов  $p_0, p_1, \dots, p_n$ , а  $SO_0(1, n)$  — связная компонента единицы в группе всех линейных преобразований  $T$  на  $T$ , сохраняющих квадратичную форму  $p_0^2 - p_1^2 - \dots - p_n^2$ .

В [1, 2] предложено использовать группы  $P(1, n)$ ,  $P(1, 6)$ ,  $P(1, 4)$  для описания физических систем с переменной массой и спином. Примером такой физической системы является система из двух (или трех) свободных релятивистских частиц. Действительно, в этом случае оператор энергии имеет вид

$$E = \sqrt{\mathbf{P}^2 + M^2}, \quad M = (m_1^2 + \mathbf{K}^2)^{1/2} + (m_2^2 + \mathbf{K}^2)^{1/2}, \quad (0.1)$$

где  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}$  — импульс центра масс частиц,  $\mathbf{K}$  — относительный импульс<sup>1</sup>.

Формула (0.1), как хорошо известно [3, 4], получается при редукции прямого произведения двух унитарных неприводимых представлений группы  $P(1, 3)$ . Поскольку неприводимое представление группы  $P(1, n > 3)$  является приводимым относительно  $P(1, 3)$ , то естественно рассмотреть задачу о редукции этих представлений по неприводимым представлениям группы Пуанкаре<sup>2</sup>.

Помимо указанных приложений, обобщенные группы  $P(1, 4)$ ,  $P(2, 3)$  и т.д. могут иметь прямое отношение к задаче о расширении  $S$ -матрицы за массовую оболочку [5] и для описания частиц с внутренней структурой [2, 6]. Во всех этих задачах первоочередным вопросом является редукция неприводимых представлений  $P(1, n) \rightarrow P(1, 3)$ .

Теоретическая и математическая физика, 1976, **26**, № 2, С. 206–220.

Препринт ИМ-75-5, Институт математики АН Украины, Киев, 1975, 32 с.

<sup>1</sup>Более подробно об этом см. [2] (и цитированную там литературу).

<sup>2</sup>На самом деле производится редукция представлений алгебры Ли. Алгебры Ли и соответствующие им группы обозначаются одинаковыми символами. В [11] рассмотрена редукция приводимых представлений алгебры  $P(1, n)$  по  $P(1, 3)$ .

В данной работе произведена редукция неприводимых унитарных представлений группы  $P(1, n) \rightarrow P(1, n - k)$  для случая, когда оператор квадрата “массы”  $P_\mu P^\mu = P_0^2 - P_k^2 = \varkappa^2 \geq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и энергии  $P_0^2 > 0$ .

В разделе 1 приводятся необходимые сведения о представлениях группы  $P(1, 4)$  — неоднородной группы де Ситтера — и формулируется задача редукции  $P(1, 4) \rightarrow P(1, 3)$ . В разделе 2 находится унитарный оператор, связывающий канонический базис группы  $P(1, 4)$  с  $P(1, 3)$ -базисом. Здесь же приведена редукция  $P(1, 4) \rightarrow P(1, 3) \rightarrow P(1, 2)$ . Раздел 3 посвящен редукции  $P(1, n) \rightarrow P(1, n - 1) \rightarrow \dots \rightarrow P(1, n - k)$ .

### 1. Основные определения и постановка задачи

Группа  $P(1, 4)$  является наиболее естественным обобщением группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ , поэтому мы подробно рассмотрим редукцию  $P(1, 4) \rightarrow P(1, 3)$ . Часть результатов, приведенных для группы  $P(1, 4)$ , легко переносится на случай группы  $P(2, 3)$ . Группа  $P(1, 4)$  имеет три основных инварианта [1]<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu^2 = P_0^2 - P_a^2 - P_4^2, & V_1^2 &= \frac{1}{2}\omega_\mu^2, \\ V_2^2 &= -\frac{1}{4}J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}, & \omega_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta\gamma}P^\alpha J^{\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Алгебра Ли группы  $P(1, 4)$  порождается операторами  $P_\mu, J_{\mu\nu}$ , которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0; & [P_\mu, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha); \\ [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Генераторы  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  в каноническом базисе  $|p, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$  имеют вид

$$\begin{aligned} P_0 &= E = \sqrt{p_a^2 + p_4^2 + \varkappa^2}, & P_k &= p_k, \\ J_{ab} &= ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, & a, b &= 1, 2, 3; \\ J_{0a} &= -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab}P_b + S_{4a}P_4}{E + \varkappa}, & J_{4a} &= ip_a \frac{\partial}{\partial p_4} - ip_4 \frac{\partial}{\partial p_a} + S_{4a}, \\ J_{04} &= -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{S_{4b}P_b}{E + \varkappa}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где  $S_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4$ ) — матрицы неприводимого представления  $D(j, \tau)$  алгебры Ли группы  $SO(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)$ . Числа  $\varkappa, j, \tau$  характеризуют неприводимые представления класса I ( $P_\mu^2 > 0$ ) группы  $P(1, 4)$ . В пространстве  $H$  неприводимого представления группы  $P(1, 4)$  операторы

$$\begin{aligned} J_a^2 &= \frac{V_1}{4\varkappa^2} + \frac{\varepsilon V_2}{2\varkappa} = j(j+1)I, & T_a^2 &= \frac{V_1}{4\varkappa^2} - \frac{\varepsilon V_2}{2\varkappa} = \tau(\tau+1)I, \\ P_\mu^2 &= \varkappa^2 I, & \varepsilon &= \frac{P_0}{|P_0|} \end{aligned} \tag{1.4}$$

<sup>3</sup>Обозначения, приведенные без объяснений, те же, что и в [1].

кратны единичному оператору. Матрицы  $J_a$ ,  $T_a$  выражаются через матрицы  $S_{kl}$  следующим образом:

$$J_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_{abc}S_{bc} + S_{4a}), \quad T_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_{abc}S_{bc} - S_{4a}). \quad (1.5)$$

Операторы (1.3) определены на пространстве Гординга  $D \subset H$  (см. дополнение).

Базисные векторы  $|\mathbf{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle^4$  нормированы согласно

$$\langle \mathbf{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa | \mathbf{p}', p'_4, j'_3, \tau'_3; j, \tau, \varkappa \rangle = 2p_0 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(p_4 - p'_4) \delta_{\tau_3 \tau'_3} \delta_{j_3 j'_3},$$

а скалярное произведение имеет вид

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \frac{d^4 p}{2p_0} \Psi_1^+(p_k, j_3, \tau_3) \Psi_2(p_k, j_3, \tau_3).$$

Базис неприводимого представления группы  $P(1, 4)$ , в котором диагональны операторы квадрата массы  $M^2 = P_0^2 - P_a^2$  и спина  $W^2 = W_0^2 - W_a^2$ , а также операторы  $P_a$  и  $S_3$ , будем называть пуанкаре-базисом и обозначать его через  $|\mathbf{p}, m, s, s_3; j, \tau, \varkappa\rangle$ .

Базисные векторы нормируем согласно

$$\langle \mathbf{p}, m, s, s_3; j, \tau, \varkappa | \mathbf{p}', m', s', s'_3; j, \tau, \varkappa \rangle = 2p_0 \delta(m - m') \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \delta_{s_3 s'_3}, \quad (1.6)$$

а это означает что

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_s \int dm \int \frac{d^3 p}{2p_0} \varphi_1^+(s, s_3, m) \varphi_2(s, s_3, m).$$

Собственные значения операторов  $M^2$  и  $W^2$  соответствуют неприводимым представлениям группы  $P(1, 3)$ .

Наша задача состоит в том, чтобы определить спектр возможных значений  $M^2$  и  $W^2$ , найти явный вид генераторов  $J_{\mu\nu}$  и  $P_\mu$  в  $P(1, 3)$ -базисе и отыскать унитарный оператор, связывающий базис  $|\mathbf{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$  и базис  $|\mathbf{p}, m, s, s_3; j, \tau, \varkappa\rangle$ .

## 2. Редукция $P(1, 4) \rightarrow P(1, 3)$

1. Неприводимое представление (1.3) характеризуется величиной  $\varkappa^2 > 0$  и числами  $j, \tau$ , задающими неприводимое представление малой группы  $SO(4)$ . При сужении на подгруппу  $P(1, 3)$  пространство  $H$  разлагается в прямую сумму  $P(1, 3)$ -инвариантных подпространств  $H_{p_4}$  (одно для каждого значения  $p_4$ ). Подпространства  $H_{p_4}$  неприводимы относительно  $P(1, 3)$  тогда и только тогда, когда представления малой группы  $P(1, 3)$  неприводимы. Пересечение групп  $SO(4)$  и  $P(1, 3)$  есть малая группа в  $P(1, 3)$ , соответствующая орбите  $p_0^2 - p_a^2 = p_4^2 + \varkappa^2$ , а это группа  $SO(3)$ . Поэтому отсюда следует, что пространство  $H$  разлагается на подпространства, соответствующие унитарным неприводимым представлениям подгруппы  $P(1, 3)$  со следующими значениями массы  $m$  и спина  $s$ :

$$\varkappa^2 \leq m^2 < \infty, \quad |j - \tau| \leq s \leq j + \tau. \quad (2.1)$$

Оператор  $V_4$ , связывающий канонический базис с  $P(1, 3)$ -базисом, является некоторой матрицей (зависящей от переменных  $\mathbf{p}, p_4$ ), заданной в пространстве

<sup>4</sup>Базис  $|\mathbf{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$  мы будем называть каноническим.

неприводимого представления группы  $P(1, 4)$  размерности  $(2j+1)(2\tau+1)$ , поэтому естественно для нахождения его явного вида воспользоваться разложением по полной системе ортопроекторов. Будем искать оператор  $V_4$  в виде

$$V_4 = \sum_r \sum_l a_{rl}(\mathbf{p}, p_4) A_r B_l, \quad (2.2)$$

где

$$A_r = \prod_{r \neq r'} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{p} - r'}{r - r'}, \quad B_l = \prod_{l \neq l'} \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{p} - l'}{l - l'} \quad (p = \sqrt{p_a^2}) \quad (2.3)$$

являются операторами проектирования на собственные подпространства эрмитовых операторов  $\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}}{p}$ ,  $\frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}}{p}$ , удовлетворяющие условиям ортогональности и полноты

$$\begin{aligned} A_r A_{r'} &= \delta_{rr'} A_r, & \sum_{r=-j}^j A_r &= 1, & \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}}{p} &= \sum_{r=-j}^j r A_r, \\ B_l A_{l'} &= \delta_{ll'} B_l, & \sum_{l=-\tau}^{\tau} B_l &= 1, & \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}}{p} &= \sum_{l=-\tau}^{\tau} l B_l. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Обратный оператор  $V_4^{-1}$  имеет вид

$$V_4^{-1} = \sum_r \sum_l a_{rl}^{-1}(\mathbf{p}, p_4) A_r B_l. \quad (2.5)$$

Поскольку генераторы  $P_0$ ,  $P_a$ ,  $J_{ab}$ ,  $J_{0a}$  в  $P(1, 3)$ -базисе имеют канонический вид Вигнера–Широкова, то оператор  $V_4$  должен удовлетворять условиям

$$V_4 P_0 V_4^{-1} = \sqrt{p_a^2 + m^2}, \quad m^2 = \varkappa^2 + p_4^2, \quad (2.6)$$

$$V_4 P_k V_4^{-1} = p_k, \quad (2.7)$$

$$V_4 J_{ab} V_4^{-1} = i p_b \frac{\partial}{\partial p_a} - i p_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \quad (2.8)$$

$$V_4 J_{0a} V_4^{-1} = -i p_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{p_0 + m} \equiv J'_{0a}, \quad (2.9)$$

где  $P_0$ ,  $P_a$ ,  $J_{ab}$ ,  $J_{0a}$ ,  $S_{ab}$  — из (1.3). Из (2.6)–(2.8) следует, что функции  $a_{rl}$  и  $a_{rl}^{-1}$  являются скалярами относительно трехмерных вращений, т.е.

$$a_{rl}(\mathbf{p}, p_4) = a_{rl}(\mathbf{p}^2, p_4), \quad a_{rl}^{-1}(\mathbf{p}, p_4) = a_{rl}^{-1}(\mathbf{p}^2, p_4). \quad (2.10)$$

Окончательную структуру функций  $a_{rl}$  и  $a_{rl}^{-1}$  определяет соотношение (2.9). Запишем его в форме

$$[V_4^{-1}, J_{0a}] V_4 = \frac{((\mathbf{p} \times \mathbf{J})_a + (\mathbf{p} \times \mathbf{T})_a)(\varkappa - m)}{(E + m)(E + \varkappa)} + \frac{(J_a - T_a)p_4}{E + \varkappa}. \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.11) найдем условия, которым должны удовлетворять функции  $a_{rl}$  и  $a_{rl}^{-1}$ . Для вычисления в явном виде коммутатора, входящего в левую часть уравнения (2.11), воспользуемся соотношениями [7]

$$\begin{aligned} \left[ A_r, i \frac{\partial}{\partial p_a} \right] &= -\frac{1}{p^2} [A_r, (\mathbf{p} \times \mathbf{J})_a] = \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{J})_a}{2p^2} (2A_r - A_{r-1} - A_{r+1}) + \\ &+ \frac{i}{2p} \left( J_a - \frac{p_a}{p} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{p}}{p} \right) (A_{r+1} - A_{r-1}), \\ \left[ B_l, i \frac{\partial}{\partial p_a} \right] &= -\frac{1}{p^2} [B_l, (\mathbf{p} \times \mathbf{T})_a] = \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{T})_a}{2p^2} (2B_l - B_{l-1} - B_{l+1}) + \\ &+ \frac{1}{2p} \left( T_a - \frac{p_a}{p} \frac{\mathbf{T} \times \mathbf{p}}{p} \right) (B_{l+1} - B_{l-1}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставляя (2.2), (2.5) в (2.11) и учитывая (2.12), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} [V_4^{-1}, J'_{0a}] V_4 &= \sum_{l,r,l',r'} \left[ a_{r'l'}^{-1} A_{r'l'}, \left\{ -iE \frac{\partial}{\partial p_a} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{J})_a + (\mathbf{p} \times \mathbf{T})_a}{E+m} \right\} a_{rl} A_r B_l = \sum_{l,r,l',r'} \left\{ i \frac{p_a}{p} \frac{\partial a_{r'l'}^{-1}}{\partial p} A_{r'} B_{l'} a_{rl} A_r B_l - \right. \\ &- \left. a_{r'l'}^{-1} \left[ \left\{ iE \frac{\partial}{\partial p_a} + \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{T})_a + (\mathbf{p} \times \mathbf{J})_a}{E+m} \right\}, A_{r'} B_{l'} \right] \right\} a_{rl} A_r B_l = \\ &= \sum_{l',r',l,r} \left\{ \frac{p_a}{p} \frac{\partial a_{rl}^{-1}}{\partial p} E a_{rl} A_r B_l - m a_{r'l'}^{-1} a_{rl} \left( \left[ A_{r'}, i \frac{\partial}{\partial p_a} \right] B_{l'} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left[ B_{l'}, i \frac{\partial}{\partial p_a} \right] A_{r'} \right) \right\} A_r B_l = \sum_{r,l} \left\{ iE \frac{p_a}{p} \frac{\partial a_{rl}^{-1}}{\partial p} a_{rl} - \right. \\ &- m \left[ \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{J})_a}{p^2} (2a_{rl}^{-1} - a_{r+1l}^{-1} - a_{r-1l}^{-1}) + \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{T})_a}{p^2} (2a_{rl}^{-1} - \right. \\ &- \left. a_{rl+1} - a_{rl-1}) \right] + \frac{i}{2p} \left[ \left( J_a - \frac{p_a}{p} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}}{p} \right) (a_{r-1l}^{-1} - a_{r+1l}^{-1}) + \right. \\ &+ \left. \left( T_a - \frac{p_a}{p} \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{p}}{p} \right) (a_{rl-1}^{-1} - a_{rl+1}^{-1}) \right] \right\} A_r B_l = \\ &= \frac{[(\mathbf{p} \times \mathbf{J})_a + (\mathbf{p} \times \mathbf{T})_a](\varkappa - m)}{(E+m)(E+\varkappa)} + \frac{(J_a - T_a)p_a}{E+m}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Приравняв в (2.13) коэффициенты при линейно-независимых векторах

$$i \frac{p_a}{p} A_r B_l, \quad T_a A_r B_l, \quad J_a A_r B_l, \quad (\mathbf{p} \times \mathbf{J})_a A_r B_l \quad \text{и} \quad (\mathbf{p} \times \mathbf{T})_a A_r B_l,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{rl}^{-1}}{\partial p} a_{rl} + \frac{m}{2p} [r (a_{r-1l}^{-1} - a_{r+1l}^{-1}) a_{rl} + l (a_{rl-1}^{-1} - a_{rl+1}^{-1}) a_{rl}] &= 0, \\ \frac{im}{2p} (a_{r-1l}^{-1} - a_{r+1l}^{-1}) a_{rl} &= -\frac{p_4}{E + \varkappa}, \\ \frac{im}{2p} (a_{rl-1}^{-1} - a_{rl+1}^{-1}) a_{rl} &= \frac{p_4}{E + \varkappa}, \\ \frac{m}{2p^2} (2a_{rl}^{-1} - a_{r-1l}^{-1} - a_{r+1l}^{-1}) a_{rl} &= \frac{m - \varkappa}{(E + m)(E + \varkappa)}, \\ \frac{m}{2p^2} (2a_{rl}^{-1} - a_{rl-1}^{-1} - a_{rl+1}^{-1}) a_{rl} &= \frac{m - \varkappa}{(E + m)(E + \varkappa)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

После несложных преобразований система (2.14) приводится к виду

$$\begin{aligned} E \frac{\partial a_{rl}^{-1}}{\partial p} a_{rl} + i \frac{p_4}{E + \varkappa} (r - l) &= 0, \\ a_{r\pm 1l}^{-1} a_{rl} &= \frac{\varkappa E + m^2 \mp i p p_4}{m(E + \varkappa)} = \exp(\pm i \theta_4), \\ a_{rl\pm 1}^{-1} a_{rl} &= \frac{\varkappa E + m^2 \pm i p p_4}{m(E + \varkappa)} = \exp(\mp i \theta_4), \\ \theta_4 &= \arctg \frac{p p_4}{m^2 + \varkappa E} = 2 \arctg \frac{p p_4}{(E + m)(m + \varkappa)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Покажем, что общее решение системы (2.15) задается формулой

$$a_{rl} = R_4 \exp i(r - l) \theta_4, \tag{2.16}$$

где  $R_4$  — произвольная функция от  $p_4$ . Действительно, представляя  $a_{rl}$  в форме

$$a_{rl} = B_{rl} \exp[iE(r - l) \theta_4 - C_{rl}], \tag{2.17}$$

где  $B_{rl}, C_{rl}$  — функции от  $p^2, p_4$ , получаем из (2.15)

$$B_{rl} = B_{r\pm 1l} = B_{rl\pm 1} = B; \quad C_{rl} = C_{r\pm 1l} = C_{rl\pm 1} = C. \tag{2.18}$$

Обозначив  $B e^{ic}$  через  $R_4$  и подставляя (2.19) в (2.17), приходим к (2.16). Легко видеть, что подстановка (2.16) в (2.17) обращает последнее уравнение в тождество. Из (1.6) следует, что  $R_4 = \sqrt{m/p_4}$ .

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{S_{4a} p_a}{p} = \sum (r - l) A_r B_l \tag{2.19}$$

и подставляя (2.16) в (2.2), получаем

$$V_4 = \sqrt{\frac{m}{p_4}} \exp \left( i \frac{S_{4a} p_a}{p} 2 \arctg \frac{p p_4}{(E + m)(E + \varkappa)} \right). \tag{2.20}$$

Формула (2.20) задает искомый оператор преобразования из канонического базиса к  $P(1, 3)$ -базису.

Теперь найдем явный вид генераторов  $J_{04}$ ,  $J_{4a}$  в  $P(1, 3)$ -базисе. Используя тождество Хаусдорфа–Камбела

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{B, A\}^{(n)}}{n!}, \quad (2.21)$$

$$\{B, A\}^{(n)} = [\{B, A\}^{(n-1)}, A], \quad \{B, A\}^{(0)} = B,$$

имеем

$$V_4 i \frac{\partial}{\partial p_a} V_4^{-1} = i \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{p_a S_{4b} p_b p_4}{(E + \varkappa)(E + m) E m} + \frac{p_4 S_{4a}}{m(E + \varkappa)} + \frac{S_{ab} p_b (m - \varkappa)}{m(E + m)(E + \varkappa)},$$

$$V_4 S_{4a} V_4^{-1} = \frac{S_{4a}(m^2 + \varkappa E)}{m(E + \varkappa)} + \frac{p_a}{p} \frac{S_{4b} p_b (m - \varkappa)}{m p (E + m)(E + \varkappa)} + \frac{S_{ab} p_b p_4}{m(E + \varkappa)},$$

$$V_4 i \frac{\partial}{\partial p_4} V_4^{-1} = i \frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{\varkappa^2}{2 p_4 m^2} + \frac{\varkappa S_{4b} p_b}{E m^2} - \frac{S_{4a} p_a}{E(E + \varkappa)},$$

$$V_4 S_{ab} p_b V_4^{-1} = S_{ab} p_b + \frac{p p_4 S_{4b} p_b}{(E + \varkappa)(E + m) E m} + \frac{p p_4 S_{4a}}{m(E + \varkappa)} + \frac{S_{ab} p_b p (m - \varkappa)}{m(E + m)(E + \varkappa)}.$$

Сделав затем замену переменных  $p_4 \rightarrow \varepsilon_4 \sqrt{m^2 - \varkappa^2}$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , получаем явный вид операторов  $J_{04}$ ,  $J_{4a}$  в  $P(1, 3)$ -базисе.

Итак, мы пришли к окончательному результату.

**Теорема.** *Пространство  $H$  унитарного неприводимого представления группы  $P(1, 4)$  с  $\varkappa^2 > 0$ ,  $P_0 > 0$ , разлагается на подпространства, соответствующие унитарным неприводимым представлениям подгруппы  $P(1, 3)$  со следующими значениями инвариантов  $M^2$  и  $W^2$ :  $\varkappa^2 \leq m^2 < \infty$ ,  $|j - \tau| \leq s \leq j + \tau$ . Оператор перехода от базиса  $|\mathbf{p}, p_4, j_3, \tau_3; j, \tau, \varkappa\rangle$  к  $P(1, 3)$ -базису задается формулой (2.20), а операторы  $J_{\mu\nu}$ ,  $P_\mu$  в  $P(1, 3)$ -базисе имеют вид*

$$\begin{aligned} P_0 &= \sqrt{p^2 + m^2}, & P_a &= p_a, & P_4 &= \varepsilon_4 \sqrt{m^2 + \varkappa^2}, & \varepsilon_4 &= \pm 1, \\ J_{ab} &= i p_b \frac{\partial}{\partial p_a} - i p_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, & J_{0a} &= -i p_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{E + m}, \\ J_{04} &= -i E \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} - \frac{\varkappa}{m} \frac{S_{4a} p_a}{m}, \\ J_{4a} &= i p_a \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} - i \varepsilon m \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}} \frac{\partial}{\partial p_a} + \\ &+ \frac{\varkappa p_a S_{4b} p_b}{m^2 (E + m)} + \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}} \frac{S_{ab} p_b}{E + m} + \frac{\varkappa}{m} S_{4a}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$\{A, B\} \equiv AB + BA.$$

**Замечание.** Если в (2.22) положить  $\varkappa = 0$  ( $p_4 \neq 0$ ), то операторы  $J_{\mu\nu}$ ,  $P_\mu$  имеют вид [1]

$$\begin{aligned} P_0 &= \sqrt{p^2 + m^2}, & m^2 &= p_4^2, & J_{ab} &= ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \\ J_{04} &= -iE \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\}, \\ J_{4a} &= \frac{i}{2} p_a \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} - i\varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{m^2}} \frac{\partial}{\partial p_a} - \varepsilon_4 \frac{S_{ab} p_b}{E + m}. \end{aligned}$$

**2.** В случае  $\varkappa^2 < 0$  генераторы канонического неприводимого представления группы  $P(1, 4)$  выглядят так:

$$\begin{aligned} P_0 &= \sqrt{p_k^2 - \eta^2}, & P_k &= p_k, & P_\mu P^\mu &= -\eta^2, \\ J_{ab} &= ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, & J_{0a} &= -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} + S_{0a}, \\ J_{a4} &= ip_4 \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{S_{ab} p_b - S_{a0} P_0}{p_4 + \eta}, & J_{04} &= -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_4} - \frac{S_{0a} p_a}{p_4 + \eta}, \end{aligned}$$

где  $S_{\mu\nu}$  — генераторы неприводимого представления группы  $SO_0(1, 3)$ . С помощью изометрического преобразования

$$V = \exp \left( -i \frac{S_{0a} p_a}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{E} \right)$$

и последующей замены переменной  $p_4 \rightarrow \varepsilon_4 \sqrt{m^2 - \varkappa^2}$  получаем

$$\begin{aligned} P_0 &= \sqrt{p_a^2 + m^2}, & P_a &= p_a, & P_4 &= \varepsilon_4 \sqrt{m^2 + \eta^2}, \\ J_{ab} &= ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, & J_{0a} &= -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{E + m}, \\ J_{04} &= -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_4} + \frac{\eta}{m} \frac{S_{0a} p_a}{m}, \\ J_{a4} &= \frac{i}{2} p_a \left\{ \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{m^2}}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} - i\varepsilon_4 \sqrt{m^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial p_a} + \\ &+ \frac{\eta p_a S_{ab} p_b}{m^2 (E + m)} + \frac{\eta}{m} S_{0a} + \varepsilon_4 \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{m^2}} \frac{S_{ab} p_b}{E + m}. \end{aligned}$$

Если  $p_4^2 > \eta^2$ , то эти формулы задают представление группы  $P(1, 4)$  в  $P(1, 3)$ -базисе.

**3.** В некоторых физических задачах, когда нарушена  $P(1, 3)$ -симметрия, но сохраняется еще симметрия относительно подгруппы  $P(1, 2)$ , удобно использовать  $P(1, 2)$ -базис. В связи с этим интересно продолжить редукцию до подгруппы

$P(1, 2)$ . Это означает переход к такому базису, в котором генераторы  $P_0, P_\alpha, J_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) имеют каноническую форму

$$P_0 = E = \sqrt{p_\alpha^2 + m_3^2}, \quad P_\alpha = p_\alpha, \quad m_3^2 = m^2 + p_3^2,$$

$$J_{12} = ip_2 \frac{\partial}{\partial p_1} - ip_1 \frac{\partial}{\partial p_2} + S_{12}, \quad J_{0\alpha} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{S_{\alpha\beta} p_\beta}{E + m_3}.$$

Найдем вид остальных генераторов группы  $P(1, 4)$ . Для этого достаточно определить оператор  $V_3$ , удовлетворяющий условиям

$$V_3 P_0 V_3^{-1} = E, \quad V_3 P_\alpha V_3^{-1} = p_\alpha, \quad (2.23)$$

$$V_3 J_{0\alpha} V_3^{-1} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{S_{\alpha\beta} p_\beta}{E + m}, \quad (2.24)$$

где операторы  $P_0, P_\alpha, J_{0\alpha}, S_{\alpha\beta}$  заданы в  $P(1, 3)$ -базисе.

Представим  $V_3$  в виде

$$V_3 = R_3 \exp \left( i \frac{S_{3\alpha} p_\alpha}{|p|_3} \theta_3 \right), \quad |p|_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \quad (2.25)$$

где  $R_3$  и  $\theta_3$  — некоторые функции от  $p_3, p_4$  и  $|p|_3, p_3, p_4$ , соответственно. Чтобы определить эти функции, подставим (2.25) в (2.24). Тогда имеем

$$\left[ V_3^{-1}, -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{S_{\alpha\beta} p_\beta}{E + m_3} \right] V_3 = -\frac{S_{\alpha 3} p_3}{E + m} + \frac{(m - m_3) S_{\alpha\beta} p_\beta}{(E + m_3)(E + m)}. \quad (2.26)$$

Используя (2.21), получаем

$$\begin{aligned} \left[ V_3^{-1}, -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{S_{\alpha\beta} p_\beta}{E + m_3} \right] V_3 \equiv & \frac{p_\alpha}{|p|_3} \frac{\partial \theta_3}{\partial |p|_3} E \frac{S_{3\alpha} p_\alpha}{|p|_3} - \\ & - m_3 \frac{S_{\alpha\beta} p_\beta}{|p|_3} (1 - \cos \theta_3) + \frac{m_3}{|p|_3} \left( S_{3\alpha} - \frac{p_\alpha}{|p|_3} \frac{S_{3\beta} p_\beta}{|p|_3} \right) \sin \theta_3, \end{aligned} \quad (2.27)$$

откуда

$$\theta_3 = 2 \operatorname{arctg} \frac{|p| p_3}{(E + m_3)(m_3 + m)}. \quad (2.28)$$

Множитель  $R_3$  выберем в виде  $R_3 = \sqrt{m_3/p_3}$ , тогда скалярное произведение в  $P(1, 2)$ -базисе будет иметь форму

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varkappa}^{\infty} dm \int_m^{\infty} dm_3 \int \frac{d^2 p}{2E} \varphi_1^+ \varphi_2.$$

Теперь, используя (2.24), (2.27), можно найти действие генераторов  $J_{03}, J_{04}, J_{34}$  группы  $P(1, 4)$  в  $P(1, 2)$ -базисе. Имеем

$$J_{03} = -\frac{i}{2} E \left\{ \varepsilon_3 \sqrt{1 - \left( \frac{m}{m_3} \right)^2}, \frac{\partial}{\partial m_3} \right\} - \frac{m}{m_3} \frac{S_{3\alpha} p_\alpha}{m_3}, \quad \varepsilon_3 = p_3/|p|_3,$$

$$J_{43} = -\frac{im}{2} \left\{ \varepsilon_3 \varepsilon_4 \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{m}{m_3} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{\varkappa}{m} \right)^2 \right]}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} + \frac{\varkappa m_3}{m^2} S_{43},$$

$$J_{04} = -\frac{i}{2}E \left[ \left\{ \varepsilon_3 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{m_3}\right)^2}, \frac{\partial}{\partial m_3} \right\} + \left\{ \varepsilon_4 \sqrt{1 - \left(\frac{\varkappa}{m}\right)^2}, \frac{\partial}{\partial m} \right\} \right] - \frac{\varkappa S_{4\alpha} p_\alpha}{m m_3} + \\ + \varepsilon_3 \varepsilon_4 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{m}{m_3}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\varkappa}{m}\right)^2\right]} \frac{S_{3\alpha} p_\alpha}{m_3} - \varkappa \varepsilon_3 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{m_3}\right)^2} E \frac{S_{43}}{m^2}.$$

### 3. Редукция $P(1, n) \rightarrow P(1, n-1) \rightarrow \dots \rightarrow P(1, n-k)$

1. Покажем сначала, как представление алгебры  $P(1, n)$  может быть задано в  $P(1, n-1)$ -базисе. Каноническое неприводимое представление генераторов группы  $P(1, n)$  задается формулами

$$P_0 = E = \sqrt{p_k^2 + \varkappa^2}, \quad P_k = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ J_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \quad a, b < n, \quad (3.1)$$

$$J_{0a} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{P_0 + \varkappa} - \frac{S_{an} p_n}{P_0 + \varkappa}, \\ J_{0n} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_n} - \frac{S_{na} p_a}{P_0 + \varkappa}, \quad J_{an} = ip_n \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_n} + S_{an}, \quad (3.2)$$

здесь  $S_{kl}$  — матрицы неприводимого представления  $D(m_1, m_2, \dots, m_{[n/2]})$  алгебры  $SO(n)$ ,  $m_i$  — числа Гельфанда-Цетлина. Операторы (3.1) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \frac{d^n p}{2p_0} \Psi_1^+ \Psi_2. \quad (3.3)$$

В  $P(1, n-1)$ -базисе генераторы (3.1) по определению имеют вид прямой суммы генераторов канонических представлений группы  $P(1, n-1)$ . Если представление алгебры  $SO(n)$  задано в базисе  $SO(n) \supset SO(n-1) \supset \dots$ , то эти генераторы имеют форму

$$P_0 = E = \sqrt{P_a^2 + m_n^2}, \quad m_n^2 = \varkappa^2 + p_n^2, \quad P_a = p_a, \\ J_{ab} = ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \quad J_{0a} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{E + m_n}. \quad (3.4)$$

Задача нахождения явного вида генераторов  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  в  $P(1, n-1)$ -базисе сводится к отысканию изометрического оператора, преобразующего генераторы (3.1) к виду (3.4).

По аналогии с разделом 2 оператор преобразования будем искать в виде

$$V_n = R_n \exp\left(i \frac{S_{na} p_a}{|p|_n} \theta_n\right), \quad |p|_n = \left(\sum_{a < n} p_a^2\right)^{1/2}, \quad (3.5)$$

где  $R_n$  и  $\theta_n$  — некоторые функции от  $p_n$  и  $p_n, |p|_n$ , соответственно, которые предстоит найти.

Оператор  $V_n$  преобразует (3.1) к (3.4), если выполняются соотношения

$$[V_n^{-1}, J_{0a}]V_n = \frac{S_{ab}p_b(\varkappa - m_n)}{(E + m_n)(E + \varkappa)} + \frac{S_{na}p_n}{E + \varkappa}. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.4), (3.5) в (3.6) и используя тождества

$$\begin{aligned} V_n^{-1}i \frac{\partial}{\partial p_a} V_n &= i \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{p_a}{|p|_n} \frac{\partial \theta_n}{\partial p} \frac{S_{nb}p_b}{|p|_n} + \\ &+ \frac{S_{ab}p_b}{|p|_n^2} (1 - \cos \theta_n) - \frac{1}{|p|_n} \left( S_{na} - \frac{p_a}{|p|_n} \frac{S_{nb}p_b}{|p|_n} \right) \sin \theta_n, \\ V_n S_{ab}p_b V_n^{-1} &= p^2 (V_n x_a V_n^{-1} - x_a), \end{aligned}$$

приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{p_a}{|p|_n} E \frac{\partial \theta_n}{\partial |p|_n} \frac{S_{nb}p_b}{|p|_n} - m \left[ \frac{S_{ab}p_b}{|p|_n^2} (1 - \cos \theta_n) - \right. \\ \left. - \frac{1}{|p|_n} \left( S_{na} - \frac{p_a S_{nb}p_b}{|p|_n^2} \right) \right] = \frac{S_{ab}p_b(\varkappa - m_n)}{(E + m_n)(E + \varkappa)} + \frac{S_{na}p_n}{E + \varkappa}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициент при линейно-независимых векторах  $\frac{p_a}{|p|_n} \frac{S_{nb}p_b}{|p|_n}$ ,  $\frac{S_{ab}p_b}{|p|_n}$  и  $S_{na}$ , получаем систему уравнений для искомых функций  $\theta_n$

$$\begin{aligned} E \frac{\partial \theta_n}{\partial |p|_n} - \frac{m_n}{|p|_n} \sin \theta_n = 0, \quad m_n \sin \theta_n = \frac{|p|_n p_n}{E + \varkappa}, \\ m_n (\cos \theta_n - 1) = \frac{p^2 (\varkappa - m_n)}{(E + m_n)(E + \varkappa)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решение системы (3.7) задается формулой

$$\theta_n^2 = \arctg \frac{|p|_n p_n}{(E + m_n)(m_n + \varkappa)}. \quad (3.8)$$

Из условия нормировки базисных векторов получаем, что множитель  $R_n = \sqrt{m_n/p_n}$ .

Теперь, используя явный вид оператора  $V_n$ , нетрудно найти выражения для генераторов  $J_{0n}$ ,  $J_{an}$  в  $P(1, n-1)$  базисе. Принимая во внимание тождества

$$\begin{aligned} V_n i \frac{\partial}{\partial p_a} V_n^{-1} &= i \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{p_a p_n S_{ab}p_b}{E m_n (E + m_n)(E + \varkappa)} + \\ &+ \frac{p_n S_{na}}{m_n (E + \varkappa)} + \frac{S_{ab}p_b (m_n - \varkappa)}{m_n (E + m_n)(E + \varkappa)}, \\ V_n S_{na} V_n^{-1} &= S_{na} \frac{m_n^2 + \varkappa E}{m_n (E + \varkappa)} + \frac{p_n S_{nb}p_b (m_n - \varkappa)}{m_n (E + m_n)(E + \varkappa)} + \frac{p_n S_{ab}p_b}{m_n (E + \varkappa)}, \\ V_n i \frac{\partial}{\partial p_n} V_n^{-1} &= i \frac{\partial}{\partial p_n} + S_{na} p_a \left( \frac{\varkappa}{E m_n^2} - \frac{1}{E(E + \varkappa)} - \frac{i \varkappa^2}{2 p_n m_n^2} \right) \end{aligned}$$

и сделав замену переменных  $p_n \rightarrow \varepsilon_n \sqrt{m_n^2 - \varkappa^2}$ , получаем

$$\begin{aligned}
 J_{na} &= \frac{ip_a}{2} \left\{ \varepsilon_n \sqrt{1 - \left( \frac{\varkappa}{m_n} \right)^2}, \frac{\partial}{\partial m_n} \right\} - i\varepsilon_n \sqrt{1 - \left( \frac{\varkappa}{m_n} \right)^2} \frac{\partial}{\partial p_a} + \\
 &+ \frac{P_a \varkappa S_{nb} p_b}{m_n^2 (E + m_n)} + \varepsilon_n \sqrt{1 - \left( \frac{\varkappa}{m_n} \right)^2} \frac{S_{ab} p_b}{(E + m_n)} + \frac{\varkappa}{m_n} S_{na}, \quad \varepsilon_n = p_n / |p_n|, \quad (3.9) \\
 J_{0n} &= -\frac{i}{2} E \left\{ \varepsilon_n \sqrt{1 - \left( \frac{\varkappa}{m_n} \right)^2}, \frac{\partial}{\partial m_n} \right\} - \frac{\varkappa}{m_n} \frac{S_{na} p_a}{m_n}.
 \end{aligned}$$

Итак, мы нашли, что явный вид генераторов группы  $P(1, n)$  в  $P(1, n-1)$ -базисе задается формулами (3.4), (3.9). Генераторы (3.4), (3.9) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varkappa}^{\infty} dm_n \sum_{\eta} \frac{d^{n-1} p}{2E} \varphi_1^+(\eta, m) \varphi_2(\eta, m),$$

где  $\eta$  — набор чисел, характеризующих неприводимые представления группы  $SO(n-1)$ , содержащиеся в представлении  $D(m_1, m_2, \dots, m_{[\frac{n}{2}]})$ .

**2.** Получим теперь представление алгебры  $P(1, n)$  в  $P(1, n-2)$ -базисе. Используя приведенные выше результаты, заключаем, что оператор

$$V_{n-1} = \sqrt{\frac{m_{n-1}}{p_{n-1}}} \exp \left( 2i \frac{S_{n-1} a p_a}{|p|_{n-1}} \arctg \frac{p_{n-1} |p|_{n-1}}{(E + m_{n-1})(m_n + m_{n-1})} \right), \quad (3.10)$$

где

$$m_{n-1} = (\varkappa^2 + p_n^2 + p_{n-1}^2)^{1/2}, \quad |p|_{n-1} = \left( \sum_{a < n-1} p_a^2 \right)^{1/2},$$

преобразует генераторы (3.4) к виду

$$\begin{aligned}
 P_0 &= E = \sqrt{p_a^2 + m_{n-1}^2}, \quad P_a = p_a, \quad a \leq n-1, \\
 P_n &= \varepsilon_n \sqrt{m_n^2 - \varkappa^2}, \quad P_{n-1} = \varepsilon_{n-1} \sqrt{m_{n-1}^2 - m_n^2}, \\
 J_{ab} &= ip_b \frac{\partial}{\partial p_a} - ip_a \frac{\partial}{\partial p_b} + S_{ab}, \quad J_{0a} = -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{E + m_{n-1}}, \quad (3.11) \\
 J_{0n-1} &= -\frac{i}{2} E \left\{ \sqrt{1 - \left( \frac{m_n}{m_{n-1}} \right)^2}, \frac{\partial}{\partial m_{n-1}} \right\} - \frac{m_n}{m_{n-1}} \frac{S_{n-1} a p_a}{m_{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Для того чтобы задать вид остальных генераторов в  $P(1, n-2)$ -базисе, достаточно найти генератор  $J_{n n-1}$  (остальные определяются из коммутационных соотношений (1.2)). Используя тождества

$$V_{n-1}^{-1} i \frac{\partial}{\partial p_n} V_{n-1} = i \frac{\partial}{\partial p_n} - \frac{p_n p_{n-1} S_{n-1} a p_a}{m_n m_{n-1}^2 E} - \frac{i}{2} \frac{p_n}{m_{n-1}^2},$$

$$V_{n-1}^{-1} i \frac{\partial}{\partial p_{n-1}} V_{n-1} = i \frac{\partial}{\partial p_{n-1}} + S_{n-1} a p_a \left( \frac{m_n}{E m_{n-1}^2} - \frac{1}{E(E+m_n)} \right) + \frac{i m_n^2}{p_{n-1} m_{n-1}^2},$$

$$V_{n-1}^{-1} S_{n-1} V_{n-1} = S_{n-1} \frac{m_{n-1}^2 + E m}{m_{n-1}(E+m_n)} + \frac{S_{n-1} a p_a p_{n-1}}{m_{n-1}(E+m_n)}$$

получаем

$$J_{n-1} = \frac{i}{2} \left\{ \sqrt{\left(1 - \frac{\varkappa}{m_n}\right) \left(1 - \frac{m_n}{m_{n-1}}\right) m_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial m_n} \right\} + \frac{\varkappa m_{n-1}}{m_n^2} S_{n-1}. \quad (3.12)$$

Генераторы (3.11), (3.12) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\varkappa}^{\infty} dm_n \int_{m_n}^{\infty} dm_{n-1} \sum_{\alpha} \int \frac{d^{n-2} p}{p_0} \varphi_1^+(m_{n-1}, \alpha) \varphi_2(m_{n-1}, \alpha),$$

где через  $\alpha$  обозначены числа, нумерующие неприводимые представления алгебры  $SO(n-2)$ , содержащиеся в представлении  $D(m_1, m_2, \dots, m_{[\frac{n}{2}]})$  группы  $SO(n)$ .

**3.** Аналогично определяется представление алгебры  $P(1, n)$  в  $P(1, n-3)$ -базисе. Подвергая генераторы (3.11) и (3.12) преобразованию

$$V_{n-2} = \sqrt{\frac{m_{n-2}}{p_{n-2}}} \exp \left( 2i \frac{S_{n-2} a p_a}{|p|_{n-2}} \operatorname{arctg} \frac{p_{n-2} |p|_{n-2}}{(E+m_{n-2})(m_{n-2}+m_{n-1})} \right),$$

$$|p|_{n-2} = \left( \sum_{a < n-2} p_a^2 \right)^{1/2}, \quad m_{n-2} = (\varkappa^2 + p_n^2 + p_{n-1}^2 + p_{n-2}^2)^{1/2}$$

и учитывая коммутативность (3.12) и (3.2), имеем

$$P_0 = E, \quad P_a = p_a, \quad P_n = \varepsilon_n \sqrt{m_n^2 - \varkappa^2},$$

$$P_{n-1} = \varepsilon_{n-1} \sqrt{m_{n-1}^2 - m_n^2}, \quad P_{n-2} = \varepsilon_{n-2} \sqrt{m_{n-2}^2 - m_{n-1}^2},$$

$$J_{ab} = i \frac{\partial}{\partial p_a} p_b - i \frac{\partial}{\partial p_b} p_a + S_{ab}, \quad a, b < n-2,$$

$$J_{0n-2} = -\frac{i}{2} E \left\{ \frac{P_{n-2}}{m_{n-2}}, \frac{\partial}{\partial m_{n-2}} \right\} - \frac{m_{n-1}}{m_{n-2}} \frac{S_{n-2} a p_a}{m_{n-2}}, \quad (3.13)$$

$$J_{n-1n-2} = \frac{i}{2} \left\{ \frac{P_{n-1} P_{n-2}}{m_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial m_n} \right\} + \frac{m_n m_{n-2}}{m_{n-1}^2} S_{n-2},$$

$$J_{nn-1} = \frac{i}{2} \left\{ \frac{P_n P_{n-1}}{m_n}, \frac{\partial}{\partial m_{n-1}} \right\} + \frac{\varkappa m_{n-1}}{m_n^2} S_{n-1}.$$

**4.** Подвергая генераторы (3.13) последовательно преобразованиям

$$V_{n-l} = \sqrt{\frac{m_{n-l}}{p_{n-l}}} \exp \left( 2i \frac{S_{n-l} a p_a}{|p|_{n-l}} \operatorname{arctg} \frac{|p|_{n-l} p_{n-l}}{(E+m_{n-l})(m_{n-l}+m_{n-l+1})} \right),$$

где

$$|p|_{n-l} = \left( \sum_{a < n-l} p_a^2 \right)^{1/2}, \quad m_{n-l} = \left( \varkappa^2 + \sum_{\alpha=1}^l p_{n-\alpha}^2 \right)^{1/2}, \quad l = 3, 4, \dots,$$

и используя результаты п. 1–3, получаем

$$\begin{aligned}
 P_0 &= E, & P_a &= p_a, & P_{n-\alpha} &= \varepsilon_{n-\alpha} \sqrt{m_{n-\alpha}^2 - m_{n-\alpha+1}^2}, & \alpha < k, \\
 J_{0a} &= -ip_0 \frac{\partial}{\partial p_a} - \frac{S_{ab} p_b}{E + m_{n-k+1}}, & a, b &\leq n-k, \\
 J_{ab} &= i \frac{\partial}{\partial p_a} p_b - i \frac{\partial}{\partial p_b} p_a + S_{ab}, \\
 J_{0n-\alpha} &= -\frac{i}{2} E \left\{ \frac{P_{n-\alpha}}{m_{n-\alpha}}, \frac{\partial}{\partial m_{n-\alpha}} \right\} - \frac{m_{n-\alpha+1}}{m_{n-\alpha}} \frac{S_{n-\alpha} p_a}{m_{n-\alpha}}, \\
 J_{n-\alpha n-\alpha+1} &= \frac{i}{2} \left\{ \frac{P_{n-\alpha} P_{n-\alpha+1}}{m_{n-\alpha}}, \frac{\partial}{\partial m_n} \right\} + \frac{\varkappa m_{n-\alpha+1}}{m_{n-\alpha}^2} S_{n-\alpha n-\alpha+1}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Генераторы (3.14) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int dm_{n-k} \int dm_{n-k+1} \cdots \int dm_n \sum_{\lambda} \frac{d^{m-l} p}{p_0} \varphi_1^{\dagger} \varphi_2,$$

где  $\lambda$  — набор чисел, характеризующих представления группы  $SO(n-k)$ . входящих в представление группы  $D(m_1, m_2, \dots, m_{[\frac{n}{2}]})$  группы  $SO(n)$ .

Таким образом, генераторы группы  $P(1, n)$  в  $P(1, n-k)$ -базисе имеют вид (3.14). Оператор преобразования из (3.1) к (3.14) задается формулой

$$V = \prod_{l=1}^k V_{n-l}.$$

### Дополнение

В  $D$  можно так ввести топологию со счетной системой норм

$$(\varphi_1, \varphi_2)_n = (\varphi_1, (\Delta + 1)^n \varphi_2), \quad \Delta = \sum_{\mu} p_{\mu}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} J_{\mu\nu}^2,$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в пространстве  $H$ , относительно которого  $J_{\mu\nu}$ ,  $P_{\mu}$  эрмитовы, что, пополнив  $D$  по ней, получим пространство  $\Psi$ , обладающее следующими замечательными свойствами:

- 1)  $\Psi$  плотно в  $H$ ;
- 2) обертывающая алгебра  $E(P(1, 4))$  является алгеброй непрерывных (относительно топологии  $\Psi$ ) операторов на  $\Psi$ ;
- 3)  $\Psi$  ядерно.

Приведем доказательство ядерности  $\Psi$ . Используя результаты работы [8] и тот факт, что группу  $P(1, 4)$  можно получить сжатием группы  $SO_0(1, 5)$  в смысле Иноню–Вигнера [9], достаточно показать, что существует такой оператор  $X$ , принадлежащий  $E(SO_0(1, 5))$ , для которого  $X^* = X^{**}$  и  $X^{-1}$  ядерный.

Рассмотрим оператор  $A = (C + 1)^n$ , где  $C$  — оператор Казимира группы  $SO_0(1, 5)$  второго порядка. Из теоремы Нельсона [10] следует, что  $C$  и  $C^n$  существенно самосопряженные, поэтому  $A^* = A^{**}$ .

Покажем далее, что  $A^{-1}$  — оператор Гильберта–Шмидта. Очевидно,

$$A^{-1} = \sum_i \frac{1}{(c_i - 1)^n} P_i,$$

где  $P_i$  — проекторы на подпространства  $H_i$  ( $H_i$  — собственное пространство оператора Казимира  $C$  с собственным значением  $c_i$ ). Кроме того, легко проверить, что при достаточно больших  $n$  выполняется неравенство

$$\sum \left( \frac{1}{(c_i + 1)^n} \dim H_i \right)^2 < \infty.$$

Таким образом,  $A^{-1}$  — оператор Гильберта–Шмидта. Поскольку квадрат оператора Гильберта–Шмидта всегда существенно самосопряжен, то за  $X$  мы можем взять оператор  $(A^{-1})^2$ . Итак,  $\Psi$  ядерно. Из свойств 1–3 следует, что в нашем случае ядерная спектральная теорема применима и векторы  $|\mathbf{p}, p_4, j_3 \tau_3; j, \tau, \kappa\rangle$  канонического базиса принадлежат пространству  $\Psi^*$  ( $\Psi \subset H \subset \Psi^*$ ).

1. Фушич В.И., *ТМФ*, 1970, **4**, № 3, 360–382;  
Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79–82; 1969, **14**, № 2, 573–585.
2. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **10**, № 4, 163–167.
3. Широков Ю.М., *ДАН СССР*, 1954, **99**, 737.
4. Macfarlane A.J., *J. Math. Phys.*, 1963, **4**, 490;  
Fong R., Sucher J., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 456.
5. Donkov A.D., Kadyshevsky V.G., Mateev M.D., Mir-Kasimov R.M., Preprint JINR E2-7936, Dubna, 1974.
6. Aghassi J.J., Roman P., Santilli R.M., *J. Math. Phys.*, 1970, **11**, 2297;  
Castell L., *Nuovo Cim.*, 1967, **49**, 285.
7. Фушич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, № 2, 192–205.
8. Roberts J.E., *Commun. Math. Phys.*, 1966, **3**, 98.
9. İnönü K., Wigner E.P., *Proc. N.A.S.*, 1953, **39**, 50.
10. Nelson E., Stinespring W.F., *Amer. J. Math.*, 1959, **81**, 547.
11. Фушич В.И., Никитин А.Г., Юрик И.И., Препринт Института математики АН Украины, № 5, Киев, 1975, 32 с.

# О дополнительной инвариантности уравнений Кеммера–Дэффина и Рариты–Швингера

А.Г. НИКИТИН, Ю.Н. СЕГЕДА, В.И. ФУЩИЧ

The complementary (implicite) symmetry of the Kemmer–Duffin (KD), Rarita–Schwinger (RS) and Dirac equations is established. It is shown that the algebra of the invariance of the KD equations is the 34-dimensional Lie algebra including the  $SU(3)$  algebra as one of its subalgebras, and the RS equation is invariant with respect to the 64-dimensional Lie algebra including the subalgebra  $O(2,4)$ . The explicit form of the operator reducing the RS equation to the diagonal form, and the operator transforming the KD equation into the TST equation are found. The algebra of the complementary invariance of the Dirac and TST equations are found in the class of differential operators.

Установлена дополнительная (неявная) симметрия уравнений Кеммера–Дэффина (КД), Рариты–Швингера (РШ) и Дирака. Показано, что алгеброй инвариантности уравнения КД является 34-мерная алгебра Ли, содержащая алгебру  $SU(3)$  в качестве подалгебры, и что уравнение РШ инвариантно относительно 64-мерной алгебры Ли, включающей подалгебру  $O(2,4)$ . Найдены явный вид оператора, приводящего уравнение РШ к диагональной форме, и оператор, преобразующий уравнение КД в уравнение Тамма–Сакаты–Такетани (ТСТ). Найдена алгебра дополнительной инвариантности уравнений Дирака и ТСТ в классе дифференциальных операторов.

## Введение

Хорошо известно, что некоторые уравнения движения в квантовой физике обладают дополнительной (неявной) симметрией. Так, например, уравнение Шредингера для атома водорода обладает неявной инвариантностью относительно группы четырехмерных вращений [1], уравнения Максвелла и Дирака (для нулевой массы) инвариантны относительно конформной группы [2].

В [3, 4] установлено, что уравнения Максвелла, Клейна–Гордона и Дирака (с нулевой и ненулевой массами) обладают дополнительной инвариантностью, отличной от лоренц-инвариантности. Базисные элементы этой новой алгебры инвариантности не принадлежат, как это имеет место в случае лоренц-симметрии, когда инфинитезимальные операторы представляют собой линейные дифференциальные операторы первого порядка, классу дифференциальных операторов. В этом случае базисные элементы являются интегродифференциальными (нелокальными) операторами в конфигурационном пространстве. Из-за нелокальности эти операторы не являются инфинитезимальными операторами касательных преобразований в смысле Ли, однако они образуют конечномерную алгебру Ли.

В дальнейшем под дополнительной инвариантностью уравнений движения мы понимаем любую инвариантность, отличную от лоренц-инвариантности.

В настоящей работе исследуются групповые свойства свободных релятивистских уравнений движения для частиц с ненулевой массой и спинами  $s \leq 3/2$ .

Устанавливаются теоремы о дополнительной инвариантности уравнений Кеммера–Дэффина (КД), Тамма–Сакаты–Такетани (ТСТ) и Рариты–Швингера (РШ). Кроме того, найдена алгебра инвариантности Дирака и ТСТ в классе дифференциальных операторов. Доказательство теорем осуществляется с помощью приема, предложенного в [3]. Суть его состоит в том, что сначала система дифференциальных уравнений первого порядка, предварительно приведенная к гамильтоновой форме, с помощью унитарного преобразования приводится к другому эквивалентному уравнению с диагональным гамильтонианом, а затем уже для преобразованного уравнения устанавливается дополнительная алгебра инвариантности. Найдя базисные элементы дополнительной алгебры инвариантности для преобразованного уравнения и имея унитарный оператор, диагонализующий гамильтониан, определяем алгебру инвариантности исходного уравнения.

В последние годы интенсивно изучаются групповые свойства дифференциальных уравнений в частных производных на основе классических методов Ли [5, 6]. Эти методы существенно отличаются от наших.

## 1. Симметрия уравнений Кеммера–Дэффина и Тамма–Сакаты–Такетани

**А.** Уравнение КД записывается в виде

$$(\beta_\mu p^\mu - m)\Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

где  $p_\mu = i\partial/\partial x^\mu$ , а матрицы  $\beta_\mu$  удовлетворяют алгебре

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu g_{\nu\lambda} + \beta_\lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Как известно, уравнение КД описывает свободное движение частицы со спином 0 или 1. В первом случае матрицы  $\beta_\mu$  5-рядные, а во втором — 10-рядные.

Удобнее записать уравнение (1.1) в гамильтоновой форме [7]

$$i\partial\Psi/\partial t = H\Psi(t, \mathbf{x}), \quad H = [\beta_0, \beta_a]p_a + \beta_0 m, \quad (1.3)$$

$$\{m(1 - \beta_0^2) + (\beta \cdot \mathbf{p})\beta_0^2\}\Psi(t, \mathbf{x}) \equiv mP\Psi = 0. \quad (1.4)$$

Физический смысл дополнительного условия (1.4) состоит в том, что оно устраняет “лишние” компоненты волновой функции  $\Psi$ . Для спина  $s = 0$  волновая функция имеет три, а для спина  $s = 1$  — четыре лишние компоненты.

Условие инвариантности уравнения (1.1) относительно некоторой совокупности преобразований эквивалентно по определению выполнению условий

$$\left[ i\frac{\partial}{\partial t} - H, Q_A \right] \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad [mP, Q_A]\Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.5)$$

где  $Q_A$  — операторы преобразований,  $\Psi$  удовлетворяет уравнениям (1.3), (1.4),  $\{A\}$  — некоторое множество индексов.

Задача о нахождении алгебры инвариантности уравнения (1.1) состоит в описании всевозможных операторов  $Q_A$ , удовлетворяющих условиям (1.5).

Покажем, что справедлива следующая

**Теорема 1.** *Уравнение КД инвариантно относительно алгебры Ли группы  $SU(3)$ . В случае спина  $s = 1$  уравнение КД инвариантно относительно более*

широкой, 34-мерной алгебры Ли, содержащей алгебру  $SU(3)$  в качестве подалгебры. Базисные элементы этой алгебры инвариантности удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.10), (1.14).

**Доказательство.** Переход к представлению, в котором  $H$  диагонален, осуществляется с помощью интегрального унитарного оператора типа Фолди–Ваутхойзена [8]

$$\Psi \rightarrow \Phi = U\Psi, \quad U = \exp \left\{ \frac{\beta_a p_a}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{m} \right\}, \quad (1.6)$$

$$p = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}, \quad a = 1, 2, 3.$$

В результате получаем систему интегродифференциальных уравнений

$$i\partial\Phi/\partial t = H^\Phi\Phi(t, \mathbf{x}), \quad H^\Phi = UHU^{-1} = \beta_0 E, \quad (1.7)$$

$$(1 - \beta_0^2)\Phi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad E = (p^2 + m^2)^{1/2},$$

а условие инвариантности (1.5) приводится к виду

$$\left[ i\frac{\partial}{\partial t} - \beta_0 E, Q_A^\Phi \right] \Phi = 0, \quad Q_A^\Phi = UQ_A U^{-1}, \quad [1 - \beta_0^2, Q_A^\Phi]\Phi = 0. \quad (1.5')$$

Условие (1.5') удовлетворяется произвольными матрицами, коммутирующими с  $\beta_0$ .

Используя соотношения (1.2), нетрудно убедиться, что условию (1.5') удовлетворяют матрицы

$$S_{ab} = i(\beta_a\beta_b - \beta_b\beta_a), \quad S_{ab} = \varepsilon_{abc}S_c, \quad a, b, c = 1, 2, 3. \quad (1.8)$$

Этим же свойством обладают, очевидно, все функции от  $S_{ab}$ , среди которых можно выбрать только восемь независимых:

$$Q_1^\Phi = -(S_1S_2 + S_2S_1), \quad Q_2^\Phi = S_3, \quad Q_3^\Phi = i(S_3S_1S_2 - S_1S_2S_3),$$

$$Q_4^\Phi = -(S_3S_1 + S_1S_2), \quad Q_5^\Phi = -S_2, \quad Q_6^\Phi = -(S_2S_3 + S_3S_2), \quad (1.9)$$

$$Q_7^\Phi = S_1, \quad Q_8^\Phi = -\frac{i}{\sqrt{3}}(S_3S_1S_2 + S_1S_2S_3 - 2S_2S_3S_1).$$

Операторы  $Q_A^\Phi$ ,  $A = 1, 2, \dots, 8$ , удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[Q_M^\Phi, Q_L^\Phi] = if_{MLK}Q_K^\Phi, \quad M, L, K = 1, 2, \dots, 8, \quad (1.10)$$

где  $f_{MLK}$  — структурные константы группы  $SU(3)$ .

В случае спина  $s = 0$  операторами (1.10) исчерпываются всевозможные (с точностью до эквивалентности) независимые матрицы, коммутирующие с  $\beta_0$ . При  $s = 1$  число таких матриц увеличивается. Полную систему матриц, коммутирующих с  $\beta_0$ , построим следующим образом. Не умаляя общности, матрицу  $\beta_0$  можно выбрать в виде

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} I^3 & & \\ & -I^3 & \\ & & 0^4 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

где  $I^3, 0^4$  — трехрядная единичная и четырехрядная нулевая матрицы, на остальных местах стоят нули.

Общий вид матрицы, коммутирующей с  $\beta_0$ , задается выражением

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

где  $a, b, c$  — произвольные квадратные матрицы размерности  $3 \times 3, 3 \times 3$  и  $4 \times 4$ , соответственно. Таким образом, имеется всего 34 линейно-независимые матрицы, коммутирующие с  $\beta_0$ . В число этих 34 матриц входят операторы  $Q_A^\Phi$ ,  $A = 1, 2, \dots, 8$ , из (1.9), а остальные можно представить в виде

$$\begin{aligned} Q_{s+A}^\Phi &= \beta_0 Q_A^\Phi, \quad A = 1, 2, \dots, 8, \quad Q_{17}^\Phi = \Gamma_0 = (S_{12} - S_{43})(1 - \beta_0^2), \\ Q_{17+a}^\Phi &= \Gamma_a = (S_{bc} + S_{4a})(S_{31} - S_{42})(1 - \beta_0^2), \quad S_{4a} = i(\beta_a \beta_4 - \beta_4 \beta_a), \\ \beta_4 &= \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma, \quad \{Q_{21}^\Phi, Q_{22}^\Phi, \dots, Q_{32}^\Phi\} = \\ &= \{\Gamma_\mu \Gamma_\nu; \Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\lambda; \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3\}, \quad Q_{33}^\Phi = 1, \quad Q_{34}^\Phi = \beta_0, \\ \mu, \nu, \lambda, \dots &= 0, 1, 2, 3, \quad a = 1, 2, 3; \quad (a, b, c) = \text{цикл}(1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[Q_{s+A}^\Phi, Q_{s+B}^\Phi] = if_{ABC} Q_C^\Phi, \quad [Q_{s+A}^\Phi, Q_B^\Phi] = if_{ABC} Q_{s+C}^\Phi; \quad (1.14')$$

$$[\Gamma_\mu, Q_A^\Phi] = [\Gamma_\mu, Q_{s+A}^\Phi] = 0, \quad (\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu)(1 - \beta_0^2) = 2g_{\mu\nu}(1 - \beta_0^2). \quad (1.14'')$$

Перестановочные соотношения (1.10) и (1.14) непосредственно следуют из (1.2). Теорема доказана.

В заключение этого пункта отметим, что явный вид операторов (1.9) и (1.13) в исходном  $\Psi$ -представлении получается с помощью преобразования, обратного к (1.6). Иными словами, операторы  $Q_A$  получаются из  $Q_A^\Phi$ ,  $A = 1, 2, \dots, 34$ , посредством замены

$$\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} = U^{-1} \mathbf{S} U = \mathbf{S} = \frac{m}{E} - i \frac{\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{p}}{E} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})}{E(E + m)}. \quad (1.8')$$

**Замечание 1.** Как известно [9], уравнение (1.1) в предельном случае  $m \rightarrow 0$  не может служить для описания движения безмассовых частиц. Оказывается, однако, что такой предельный переход возможен в гамильтоновой форме (1.3), (1.4) уравнения КД. При этом теорема 1 остается верной.

Если же на волновую функцию  $\Psi$  наложить пуанкаре-инвариантное условие поперечности

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})\Psi = 0, \quad (1.15)$$

то теорема 1 не имеет места.

Система уравнений (1.3), (1.4) (с  $m = 0$ ) и (1.15) эквивалентна уравнениям Максвелла.

**Замечание 2.** Для уравнения КД, как и для уравнения Дирака [3], можно указать четыре типа операторов, удовлетворяющих коммутационным соотношениям алгебры Ли группы Пуанкаре, для которых выполняется условие (1.5). Эти операторы имеют такое явное представление:

$$\{Q^1\} : \quad {}^1P_\mu = i\partial/\partial x^\mu, \quad (1.16)$$

$${}^1J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu);$$

$$\{Q^2\} : \quad {}^2P_0 = H, \quad {}^2P_a = -i\partial/\partial x_a, \quad (1.17)$$

$${}^2J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad {}^2J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}(x_a H + H x_a);$$

$$\{Q^3\} : \quad {}^3P_0 = i\partial/\partial t, \quad {}^3P_a = -i\partial/\partial x_a, \quad (1.18)$$

$${}^3J_{ab} = \tilde{x}_a p_b - \tilde{x}_b p_a, \quad {}^3J_{0a} = x_0 p_a - \tilde{x}_a p_0;$$

$$\{Q^4\} : \quad {}^4P_0 = H, \quad {}^4P_a = -i\partial/\partial x_a, \quad (1.19)$$

$${}^4J_{ab} = \tilde{x}_a p_b - \tilde{x}_b p_a, \quad {}^4J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}(\tilde{x}_a H + H \tilde{x}_a);$$

где

$$\tilde{x}_a = x_a - i\frac{\beta_a}{E} + i\frac{(\beta_k p_k)p_a}{E^2(E+m)} + \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{S})_a}{E(E+m)}.$$

Операторы (1.16) неэрмитовы в гильбертовом пространстве, где эрмитовы операторы (1.17). Операторы (1.18) и (1.19) эрмитовы и неэквивалентны операторам (1.16) и (1.17). Этот факт легко установить, если вычислить операторы Казимира для представлений (1.16), (1.18) и (1.17), (1.19).

Далее отметим, что операторы (1.16)–(1.19) порождают совершенно различные законы преобразования координаты и времени. А именно из явного вида операторов  $J_{0a}$  непосредственно получаем, что в случае (1.17) и (1.19) в отличие от (1.16) и (1.18) время не изменяется:

$$x'_0 = \exp\{iJ_{0a}\theta_a\}x_0 \exp\{-iJ_{0b}\theta_b\} = x_0. \quad (1.20)$$

**Б.** Уравнение ТСТ имеет вид [10]

$$i\partial\Psi^{\text{ТСТ}}/\partial t = H^{\text{ТСТ}}\Psi^{\text{ТСТ}}(t, \mathbf{x}), \quad (1.21)$$

$$H^{\text{ТСТ}} = \sigma_2 m - i\sigma_1 \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m} + (i\sigma_1 + \sigma_2) \frac{p^2}{2m},$$

где  $\Psi^{\text{ТСТ}}$  — шестикомпонентная волновая функция,  $S_a$  — генераторы представления, являющегося прямой суммой двух неприводимых представлений  $D(1)$  группы  $O(3)$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — шестирядные матрицы Паули, коммутирующие с  $S_a$ .

Уравнение ТСТ описывает движение свободной релятивистской частицы со спином  $s = 1$  и в отличие от (1.1) не содержит лишних компонент.

**Теорема 2.** Уравнение ТСТ инвариантно относительно 16-мерной алгебры Ли, содержащей алгебру  $SU(3)$  в качестве подалгебры. Базисные элементы этой алгебры удовлетворяют перестановочным соотношениям (1.10), (1.14).

**Доказательство.** Прежде всего установим связь между решениями уравнений КД и ТСТ. Обычно уравнение ТСТ получают из уравнений КД путем непосредственного исключения лишних компонент. Эта процедура для наших целей непригодна. Покажем, что уравнение ТСТ может быть получено из уравнений КД с помощью изометрического преобразования

$$\Psi \rightarrow \Psi^{\text{TCT}} = V\Psi, \quad V = \exp \left\{ \frac{\beta_a p_a}{m} \beta_0^2 \right\} = 1 + \frac{\beta_a p_a}{m} \beta_0^2, \quad a = 1, 2, 3. \quad (1.22)$$

Нетрудно убедиться, что  $\Psi^{\text{TCT}}$  удовлетворяет уравнениям

$$i\partial\Psi^{\text{TCT}}/\partial t = VHV^{-1}\Psi^{\text{TCT}} = \beta_0 \left( m + \frac{\beta_a p_a}{m} \right) \Psi^{\text{TCT}}, \quad (1.23)$$

$$V(mP)V^{-1}\Psi^{\text{TCT}} = m(1 - \beta_0^2)\Psi^{\text{TCT}} = 0.$$

Система уравнений (1.23), как известно [7], эквивалентна (1.21), поскольку волновая функция  $\Psi^{\text{TCT}}$  имеет только шесть отличных от нуля компонент, и всегда можно положить

$$\begin{aligned} \beta_0 m \Psi^{\text{TCT}} &= \sigma_2 m \Psi^{\text{TCT}}, \\ \beta_0 \frac{\beta_a p_a}{m} \Psi^{\text{TCT}} &= \left[ -i\sigma_1 \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m} + (\sigma_2 + i\sigma_1) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right] \Psi^{\text{TCT}}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Поскольку уравнения (1.3), (1.4) инвариантны относительно алгебры, порождаемой операторами  $Q_A$ , то уравнение (1.21) инвариантно относительно алгебры  $\{Q_A^{\text{TCT}}\}$ ,  $Q_A^{\text{TCT}} = VQ_AV^{-1}$ . Явный вид операторов  $Q_A^{\text{TCT}}$  получаем из (1.9), (1.13), (1.8') и (1.22):

$$\begin{aligned} Q_1^{\text{TCT}} &= -(\check{S}_1\check{S}_2 + \check{S}_2\check{S}_1), & Q_2^{\text{TCT}} &= \check{S}_3, \\ Q_3^{\text{TCT}} &= -i(\check{S}_3\check{S}_1\check{S}_2 - \check{S}_1\check{S}_2\check{S}_3), & Q_4^{\text{TCT}} &= -(\check{S}_3\check{S}_1 + \check{S}_1\check{S}_3), \\ Q_5^{\text{TCT}} &= -\check{S}_2, & Q_6^{\text{TCT}} &= -(\check{S}_2\check{S}_3 + \check{S}_3\check{S}_2), & Q_7^{\text{TCT}} &= -\check{S}_1, \\ Q_8^{\text{TCT}} &= -\frac{i}{\sqrt{3}}(\check{S}_3\check{S}_1\check{S}_2 + \check{S}_1\check{S}_2\check{S}_3 - 2\check{S}_2\check{S}_3\check{S}_1), & Q_{s+A}^{\text{TCT}} &= \frac{H^{\text{TCT}}}{E} Q_A^{\text{TCT}}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\check{S} = \mathbf{S} \frac{m}{E} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})}{E(E+m)} + \frac{i}{mE} \left\{ \sigma_3(\mathbf{S} \times \mathbf{p})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) + \frac{i}{2}(1 + \sigma_3)[\mathbf{p}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{S}\mathbf{p}^2] \right\},$$

$$Q_{17}^{\text{TCT}} = H^{\text{TCT}}/E, \quad Q_{18}^{\text{TCT}} = 1. \quad (1.26)$$

Операторы (1.25) удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям (1.9) и (1.14'), что и операторы  $Q_A^\Phi$ ,  $Q_{A+8}^\Phi$ . Операторы (1.26) коммутируют с (1.25).

Алгебра (1.25), (1.26) инвариантности уравнения ТСТ, конечно, уже алгебры (1.9), (1.14) уравнения КД. Это связано с тем, что волновая функция ТСТ имеет меньше компонент, чем волновая функция КД, и поэтому операторы  $VQ_{17}, Q_{18}, \dots, Q_{32}V^{-1}$  на решениях уравнения ТСТ не определены. Теорема доказана.

**Замечание 3.** Релятивистские уравнения без лишних компонент для частиц со спином  $s = 1$ , полученные в [11], также инвариантны относительно преобразований, удовлетворяющих алгебре (1.10), (1.14). Доказательство этого утверждения аналогично изложенному выше, поскольку упомянутые уравнения могут быть приведены к диагональной форме.

## 2. Симметрия уравнения Рариты–Швингера

Уравнение РШ для частицы со спином  $s = 3/2$  может быть записано в виде

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi^\nu(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \gamma_\nu \Psi^\nu(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

где  $\gamma_\mu - 4 \times 4$ -мерные матрицы Дирака. Волновая функция РШ имеет 16 компонент  $\Psi^\nu_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ .

Систему уравнений (2.1) запишем в гамильтоновой форме:

$$i\partial\Psi/\partial t = H\Psi(t, \mathbf{x}), \quad \gamma_\nu \Psi^\nu(t, \mathbf{x}) = 0, \\ H = \begin{pmatrix} \hat{H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{H} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 m. \quad (2.2)$$

На решениях уравнений (2.2) реализуется следующее явно ковариантное представление алгебры Ли группы Пуанкаре:

$$P_0 = H, \quad P_a = p_a = -i\partial/\partial x_a, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

где спиновые матрицы  $S_{\mu\nu}$  являются генераторами представления  $D(1/2, 1/2) \times [D(1/2, 0) \oplus D(0, 1/2)]$  группы  $O(1, 3)$  и, следовательно, могут быть представлены в виде

$$S_{\mu\nu} = j_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \quad [j_{\mu\nu}, \tau_{\mu'\nu'}] = 0, \quad \tau_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu, \\ j_{ab} = j_c^1 + j_c^2, \quad j_{0a} = i(j_a^1 - j_a^2), \quad [j_a^1, j_b^2] = 0, \quad (2.4)$$

где  $j_a^1, j_b^2$  — генераторы представления  $D(1/2)$  группы  $O(3)$ . Покажем теперь, что имеет место

**Теорема 3.** *Уравнение РШ инвариантно относительно 64-мерной алгебры Ли, содержащей алгебру Ли группы  $O(2, 4)$  как подалгебру. Базисными элементами этой алгебры являются всевозможные независимые произведения операторов (2.12).*

**Доказательство.** Как и в предыдущем разделе, для доказательства теоремы перейдем к представлению, в котором гамильтониан  $H$  диагонален, а волновая функция имеет только  $2(2s + 1)$  отличных от нуля компонент. Вопрос о переходе к такому представлению для уравнения РШ обсуждался в [12], однако там не был найден в явном виде оператор преобразования.

Мы получили такой оператор в форме

$$W = \exp \left\{ i\gamma_0 \frac{j_{0a} p_a}{p} \operatorname{arth} \frac{p}{E} \right\} \exp \left\{ \frac{\gamma_a p_a}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{m} \right\}. \quad (2.5)$$

Этот оператор не только диагонализует гамильтониан  $H$  (2.2), но также приводит остальные генераторы (2.3) канонической форме Фолди–Широкова.

Уравнения (2.2) после преобразования  $W$  принимают вид

$$i\partial\Phi/\partial t = H^\Phi\Phi(t, \mathbf{x}), \quad H^\Phi = WHW^{-1} = \Gamma_0^{(16)} E, \\ S_{ab}^2 \Phi = 3/2(3/2 + 1)\Phi; \quad \Phi = W\Psi; \quad E = (p^2 + m^2)^{1/2}, \quad (2.6)$$

где 16-рядная матрица  $\Gamma_0^{(16)}$  всегда может быть выбрана в виде

$$\Gamma_0^{(16)} = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hat{I} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$\hat{I}$  и  $0$  — четырехрядные единичная и нулевая матрицы.

Из (2.6) явствует, что дополнительная инвариантность уравнений РШ порождается теми матрицами  $B_N$ , которые удовлетворяют условиям

$$[B_N, \Gamma_0^{(16)}] = 0, \quad [B_N, S_{ab}^2] = 0. \quad (2.8)$$

Без потери общности матрицу  $S_{ab}^2$  можно выбрать в таком диагональном виде:

$$S_{ab}^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 5\hat{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5\hat{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{I} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Из (2.7) и (2.9) видно, что самый общий вид матрицы, коммутирующей с  $\Gamma_0^{(16)}$  и  $S_{ab}^2$ , задается выражением

$$A = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

где  $l, f, g, h$  — произвольные квадратные четырехрядные матрицы. Поэтому матрицу  $A$  можно представить в виде линейной комбинации 64 линейно-независимых матриц  $B_N$ , коммутирующих с  $\Gamma_0^{(16)}$  и  $S_{ab}^2$ :

$$A = \sum_{N=1}^{64} a_N B_N, \quad (2.11)$$

с произвольными коэффициентами  $a_N$ .

Систему базисных матриц  $B_N$  можно построить в явном виде. Именно выберем 6 матриц размерностью  $16 \times 16$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(S_{23}S_{31} + S_{31}S_{23} - i\varepsilon_{abc}j_{0a}\tau_{bc}), \\ \Gamma_1 &= 2i\tau_{23}(1 - 2j_{23}^2)(j_{ab}^2 - 1), \quad \Gamma_2 = 2i\tau_{31}(1 - 2j_{31}^2)(j_{ab}^2 - 1), \\ \Gamma_3 &= 2i[\tau_{12}(1 - j_{12}^2) + 2j_{12}\tau_{12}](j_{ab}^2 - 1), \quad L_1 = \Gamma_0^{(16)}, \quad L_2 = \frac{2}{3}S_{ab}^2 - \frac{3}{2}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

которые удовлетворяют условию (2.8).

Используя соотношение (2.4), с помощью довольно громоздких вычислений можно установить, что операторы (2.12) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu &= 2g_{\mu\nu}, \quad [L_1, L_2] = [\Gamma_\mu, L_1] = [\Gamma_\mu, L_2] = 0, \\ L_1^2 &= L_2^2 = 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Если теперь взять совокупность всевозможных независимых произведений операторов (2.13), то получим в точности 64 элемента, которые и образуют базисную систему матриц, удовлетворяющих (2.8). В частности, совокупность всевозможных независимых произведений матриц  $\Gamma_\mu$ , как следует из (2.13), образует алгебру Клиффорда  $C_4$ , элементы которой являются базисными элементами алгебры Ли группы  $O(2, 4)$ .

Для полноты изложения приведем явный вид матриц  $\Gamma_\mu$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  в  $\Psi$ -представлении, где  $\Psi = W^{-1}\Phi$ . С помощью обратного преобразования  $W^{-1}$  получаем

$$\hat{\Gamma}_\mu = W^{-1}\Gamma_\mu W, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{S}_{23}\hat{S}_{31} + \hat{S}_{31}\hat{S}_{23} - i\epsilon_{abc}\hat{j}_0a\hat{t}_{bc}), & \hat{\Gamma}_1 &= 2i\hat{r}_{23}(1 - 2\hat{j}_{23}^2)(j_{ab}^2 - 1), \\ \hat{\Gamma}_2 &= 2i\hat{r}_{31}(1 - 2\hat{j}_{31}^2)(j_{ab}^2 - 1), & \hat{\Gamma}_3 &= 2i\hat{r}_{12}(1 - \hat{j}_{12}^2 + 2\hat{j}_{12}\hat{r}_{12})(j_{ab}^2 - 1), \\ \hat{L}_1 &= H/E, & \hat{L}_2 &= \frac{2}{3}\hat{S}_{ab}^2 - \frac{3}{2}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{ab} &= \tau_{ab}\frac{m}{E} + i\frac{\gamma_a p_b - \gamma_b p_a}{m} + \frac{p_c(p_\alpha \cdot \tau_\alpha)}{E(E+m)}, \\ \hat{j}_{ab} &= j_{ab}\frac{m}{E} - \frac{H}{Em}(j_{0a}p_b - j_{0b}p_a) + \frac{p_c(p_b j_{0b})}{E(E+m)}, \\ \hat{j}_{0a} &= j_{0a} + \frac{p_a(p_b \cdot j_b) - j_a p_b^2}{E(E+m)} - \frac{j_{ab}p_b}{Em}H, \\ \hat{S}_{ab} &= \hat{j}_{ab} + \hat{\tau}_{ab}, \quad (a, b, c) = \text{цикл } (1, 2, 3). \end{aligned} \tag{2.16}$$

В заключение отметим, что сделанные выше утверждения о дополнительной инвариантности справедливы и для уравнений Баргмана–Вигнера, Дирака–Фирца–Паули, Баба, описывающих частицы со спином 1 и 3/2. Дополнительная симметрия релятивистских уравнений для частиц со спином  $s > 3/2$  также может быть исследована с помощью методов использованных в настоящей работе.

### 3. Алгебра инвариантности уравнений Дирака и ТСТ в классе дифференциальных операторов

Во введении отмечалось, что уравнение Дирака, помимо инвариантности относительно алгебры Пуанкаре, неявно инвариантно относительно алгебры  $O(4)$ . Эта алгебра задается интегродифференциальными операторами и является в определенном смысле максимальной алгеброй дополнительной инвариантности уравнения Дирака [3]. В связи с этим естественно выяснить следующий вопрос: существует ли алгебра неявной инвариантности уравнений Дирака и ТСТ в классе дифференциальных операторов?

В дальнейшем мы докажем теоремы, дающие положительный ответ на поставленный вопрос.

**Теорема 4.** *Уравнение Дирака инвариантно относительно алгебры  $O(4)$ , базисные элементы которой задаются дифференциальными операторами.*

**Доказательство.** Уравнение Дирака

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi = 0 \tag{3.1}$$

подвергнем преобразованию

$$\begin{aligned}\Psi &\rightarrow \Phi = V\Psi, & (m - \gamma_\mu p^\mu) &\rightarrow V(m - \gamma_\mu p^\mu)V^{-1} = m - (P_\mu P^\mu)^{1/2}\gamma_5; \\ V &= \exp\left(\frac{S_{5\mu}p_\mu}{\sqrt{p_\mu p_\mu}}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{2S_{5\mu}p^\mu}{(p_\mu p^\mu)^{1/2}}\right), \\ S_{5\mu} &= \frac{i}{2}\gamma_5\gamma_\mu, & \gamma_5 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Условие инвариантности принимает вид

$$[m - (p_\mu p^\mu)^{1/2}\gamma_5, Q']\Phi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (3.3)$$

Уравнению (3.3) удовлетворяют произвольные матрицы, коммутирующие с  $\gamma_5$ . Любая такая матрица может быть представлена в виде линейной комбинации величин

$$S_{ab} = \frac{i}{2}\gamma_a\gamma_b, \quad S_{4a} = \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_a. \quad (3.4)$$

Матрицы (3.4), как известно, реализуют прямую сумму двух неприводимых представлений  $D(1/2, 0) \oplus D(0, 1/2)$  алгебры  $O(4)$ . Посредством преобразования, обратного (3.2), получаем базисные элементы алгебры дополнительной инвариантности уравнения (3.1):

$$\begin{aligned}\hat{S}_{ab} &= V^{-1}S_{ab}V = S_{ab} - \frac{i}{m}(1 + \varphi_5)(\gamma_a p_b - \gamma_b p_a), \\ \hat{S}_{4a} &= S_{4a} - \frac{1}{m}(1 + \gamma_5)(\gamma_0 p_a - \gamma_a p_0).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Следует отметить, что эта алгебра не эквивалентна алгебре Ли группы трехмерных вращений, задаваемой генераторами  $J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}$  группы Пуанкаре. Теорема доказана.

**Замечание 4.** Операторы  $\hat{S}_{ab}$  неэрмитовы относительно обычного скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^+(x)\Psi_2(x), \quad (3.6)$$

однако они эрмитовы в таком индефинитном скалярном произведении:

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^+ \left[ \gamma_0 + (1 - \gamma_4) \frac{2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})}{m} \right] \Psi_2. \quad (3.7)$$

В скалярном произведении (3.7) эрмитов также гамильтониан Дирака (3.1).

**Теорема 5.** Уравнение ТСТ инвариантно относительно алгебры  $SU(3)$ , базисные элементы которой задаются дифференциальными операторами.

**Доказательство.** Подвергнем уравнение ТСТ (1.21) преобразованию

$$\begin{aligned}\Psi^{\text{ТСТ}} &\rightarrow \Psi'^{\text{ТСТ}} = W\Psi^{\text{ТСТ}}, \\ H^{\text{ТСТ}} &\rightarrow WH^{\text{ТСТ}}W^{-1} = \sigma_2 m + (\sigma_2 + i\sigma_1) \frac{p^2}{2m} = H'^{\text{ТСТ}}, \\ W &= 1 + \sigma_2 \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})}{m} + (1 + \sigma_3) \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{2m^2}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Оператор  $H'^{\text{TCT}}$  (3.8) коммутирует со спиновыми матрицами  $S_a$ . Отсюда заключаем, что оператор  $i\partial/\partial t - H'^{\text{TCT}}$  коммутирует с набором величин

$$\begin{aligned} Q_1'^{\text{TCT}} &= -(S_1' S_2' + S_2' S_1'), & Q_2'^{\text{TCT}} &= S_3', \\ Q_3'^{\text{TCT}} &= -i(S_3' S_1' S_2' - S_1' S_2' S_3'), & Q_4'^{\text{TCT}} &= -(S_3' S_1' + S_1' S_3'), \\ Q_5'^{\text{TCT}} &= -S_2', & Q_6'^{\text{TCT}} &= -(S_2' S_3' + S_3' S_2'), & Q_7'^{\text{TCT}} &= S_1', \\ Q_8'^{\text{TCT}} &= -\frac{i}{\sqrt{3}}(S_3' S_1' S_2' + S_1' S_2' S_3' - 2S_2' S_3' S_1'), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} S_a' &= S_a + i \left\{ \sigma_2 \frac{\varepsilon_{abc} S_b p_c}{m} + (1 + \sigma_3) \frac{[\varepsilon_{abc} S_b p_c, (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})]_+}{2m^2} \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 - \sigma_2 \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})}{m} + (1 - \sigma_3) \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{2m^2} \right\}. \end{aligned}$$

Это означает, что операторы (3.9) удовлетворяют условию инвариантности уравнения ТСТ. Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы (3.9) удовлетворяют коммутационным соотношениям (1.10) алгебры  $SU(3)$ . Эти базисные элементы алгебры инвариантности уравнения ТСТ эрмитовы относительно такого индефинитного скалярного произведения:

$$\begin{aligned} (\Psi_1, \Psi_2) &= \int d^3x \Psi_1^+(t, \mathbf{x}) W^+ \sigma_2 W \Psi_2(t, \mathbf{x}) = \\ &= \int d^3x \Psi_1^+ \left\{ \sigma_2 + 2 \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{m} + 2\sigma_2 \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m^2} + (1 - \sigma_3) \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^3}{m^3} \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Теорема доказана.

Изложенные выше результаты могут быть использованы для нахождения интегралов движения частиц, взаимодействующих с внешним полем. Так, например, для частицы со спином  $s = 1/2$  в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$  интегралом движения является оператор  $Q = \varepsilon_{abc} \hat{S}_{bc}(\pi) H_c$ , где  $\hat{S}_{ab}(\pi)$  получаются из (3.5) заменой  $p_a \rightarrow \pi = p_a - eA_a$ .

1. Фок В.А., *Z. Phys.*, 1936, **98**, 145.
2. Lomont J.S., *Nuovo Cim.*, 1957, **6**, 204; Gross L., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 687.
3. Фушич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, № 1, 3–12; *Lett. Nuovo Cim.*, 1974, **11**, № 11, 508–512; Preprint ITP-70-32E, Kiev, 1970, 17 p.
4. Фушич В.И., *ДАН СССР*, 1976, **230**, № 3, 570–573.
5. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962; Ибрагимов Н.Х., *ДАН СССР*, 1969, **185**, 1226.
6. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 802; Andersson R.L. et al., *Phys. Rev. Lett.*, 1972, **28**, 988; Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W. (Jr.), *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 499.
7. Kemmer N., *Proc. Roy. Soc. A*, 1939, **173**, 91; Heitler W., *Proc. Roy. Irish Acad. A*, 1939, **49**, 1; Krajcik R.A., Nieto M.M., *Phys. Rev. D*, 1974, **10**, 4049.
8. Garrido L.M., Pascual P., *Nuovo Cim.*, 1959, **12**, 181.
9. Bludman S.A., *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 1163.

10. Тамм И.Е., *ДАН СССР*, 1940, **29**, 551; Sakata S., Taketany M., *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 1940, **22**, 757.
11. Фушич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, № 2, 192–205.
12. Вгуден А.Д., *Nucl. Phys.*, 1964, **53**, 165.

# Групповые свойства дифференциальных уравнений квантовой механики

*В.И. ФУЩИЧ*

Теорию групповых свойств дифференциальных уравнений, применительно к уравнениям механики и гидромеханики в Советском Союзе начал развивать Л.В. Овсянников со своими сотрудниками [1, 2]. Это направление оказалось весьма плодотворным и привело к ряду важных результатов.

С каждым годом сфера влияния групповых идей на различные разделы математики и физики расширяется. Так в частности, в последнее время математический аппарат теории групп и алгебр Ли начал использоваться Ю.А. Митропольским и А.К. Лопатыным [3, 4] в теории нелинейных колебаний для исследования вопроса о приводимости систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Несмотря на то, что в физике широко используются групповые методы для систематики элементарных частиц, до недавнего времени почти не велась работа по развитию и применению идей С. Ли к дифференциальным уравнениям квантовой механики.

В 1970 г. автором [5, 6] была начата работа по систематическому изучению групповых свойств уравнений движения в квантовой механике. В дальнейшем эти исследования были продолжены в работах [7–15].

Данная статья, в основном, является кратким обзором результатов, полученных в Институте математики АН УССР за последние годы по групповым свойствам уравнений квантовой механики. Групповые свойства дифференциальных уравнений изучаются с помощью метода канонических преобразований. Именно этот метод позволил найти конструктивно новые алгебры инвариантности основных уравнений движения квантовой механики.

Известно, что некоторые уравнения движения в квантовой механике обладают дополнительной (неявной) симметрией. Так, например, уравнение Шредингера для атома водорода обладает неявной инвариантностью относительно группы четырехмерных вращений, уравнения Максвелла и Дирака (для нулевой массы) инвариантны относительно конформной группы.

В дальнейшем будут сформулированы теоремы, устанавливающие новые групповые свойства уравнений Дирака, Клейна–Гордона–Фока, Кеммера–Дэффина и одного уравнения четвертого порядка, являющегося обобщением свободного нерелятивистского уравнения Шредингера. Доказательство этих теорем осуществляется с помощью метода, предложенного в [5, 6]. Суть его состоит в том, что сначала система дифференциальных уравнений первого порядка с помощью унитарного (или изотермического) преобразования приводится к диагональной (или жордановой) форме, а затем уже для преобразованного уравнения устанавливается дополнительная алгебра инвариантности. Найдя базисные элементы дополнительной алгебры инвариантности для преобразованного уравнения и имея унитарный оператор, определяем алгебру инвариантности исходного уравнения.

Под дополнительной инвариантностью будем понимать любую инвариантность, отличную от лоренц-инвариантности.

За последние несколько лет начали интенсивно изучаться групповые свойства дифференциальных уравнений в частных производных на основе классических методов С. Ли [16–18]. Эти методы существенно отличаются от наших. Основное отличие состоит в том, что в нашем случае базисные элементы новых алгебр инвариантности соответствующих уравнений, вообще говоря, не принадлежат классу дифференциальных операторов, как это имеет место в случае лоренц-симметрии, когда инфинитезимальные операторы группы представляют собой линейные дифференциальные операторы первого порядка. Базисные элементы этих алгебр являются, как правило, псевдодифференциальными или интегродифференциальными (нелокальными) операторами. По этой причине эти операторы не являются касательными преобразованиями в смысле С. Ли, однако они образуют конечномерную алгебру Ли.

### 1. Дополнительная инвариантность уравнения Дирака

1. Уравнение Дирака в гамильтоновой форме можно записать в виде [6]

$$i \frac{\partial \Psi(t, x_1, x_2, x_3)}{\partial t} = \mathcal{H} \Psi(t, x_1, x_2, x_3), \quad (1.1)$$

$$\Psi(t, \vec{x}) \equiv \begin{bmatrix} \psi_1(t, \vec{x}) \\ \psi_2(t, \vec{x}) \\ \psi_3(t, \vec{x}) \\ \psi_4(t, \vec{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 \gamma_4 m, \quad (1.2)$$

где  $m$  — масса частицы,  $p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}$ ,  $a = 1, 2, 3$ . Четырехрядные матрицы  $\gamma_0, \gamma_a, \gamma_4$  удовлетворяют алгебре Клиффорда

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$ ;  $g_{\mu\nu} = 0$ , если  $\mu \neq \nu$ . В (1.2) под повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 1 до 3.

Обозначим через  $\{Q_A\}$  множество базисных элементов алгебры Ли некоторой группы  $G$ . Уравнение (1.1) инвариантно относительно группы  $G$ , если выполняющей условия

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}, Q_A \right]_- \Psi(t, \vec{x}) = 0, \quad A = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Задача о нахождении максимальной группы инвариантности или алгебры инвариантности уравнения (1.1) состоит в описании и явном построении всех операторов  $Q_A$ , удовлетворяющих условиям (1.3).

**Теорема 1.** Уравнение Дирака (1.1) инвариантно относительно таких двух 10-мерных алгебр Ли, базисные элементы которых задаются операторами

$$\{Q_A^{(1)}\}: \quad P_0^{(1)} = p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a^{(1)} = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (1.4)$$

$$J_{ab}^{(1)} = J_{ab} = \tilde{x}_a p_b - \tilde{x}_b p_a, \quad J_{0a}^{(1)} = x_0 p_a - \tilde{x}_a p_0, \quad x_0 = t;$$

$$\tilde{x}_a = U x_a U^+ = x_a + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right) \left( \frac{\gamma_a}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} - \frac{\gamma_0 \mathcal{H} p_a}{\mathcal{H}^2 \sqrt{\mathcal{H}^2}} \right), \quad (1.5)$$

где унитарный оператор  $U$  имеет вид [6]

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right). \quad (1.6)$$

$$\{Q_A^{(2)}\} : \quad P_0^{(2)} = \mathcal{H} = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 \gamma_4 m, \quad P_a^{(2)} = p_a, \quad (1.7)$$

$$J_{ab}^{(2)} = J_{ab}, \quad J_{0a}^{(2)} = x_0 p_a - \frac{1}{2} (\tilde{x}_a \mathcal{H} + \mathcal{H} \tilde{x}_a).$$

**Доказательство.** Можно непосредственно проверить, что условия (1.3) для операторов (1.4) и (1.7) выполняются. Однако в этом проще убедиться, если над уравнением (1.1) и операторами (1.4) и (1.7) сделать унитарное преобразование (1.6). Подробное доказательство см. в [5, 6].

**Замечание 1.** Операторы (1.4) и (1.7) порождают совершенно различные правила преобразования для пространственных и временной координат при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$\left( x_a^{(1)} \right)' = \exp \left\{ i J_{0b}^{(1)} \theta_b \right\} x_a \exp \left\{ -i J_{0c}^{(1)} \theta_c \right\}, \quad (1.8)$$

$$\left( x_0^{(1)} \right)' = \exp \left\{ i J_{0b}^{(1)} \theta_b \right\} x_0 \exp \left\{ -i J_{0c}^{(1)} \theta_c \right\} \neq x_0,$$

$$\left( x_a^{(2)} \right)' = \exp \left\{ i J_{0b}^{(2)} \theta_b \right\} x_a \exp \left\{ -i J_{0c}^{(2)} \theta_c \right\}, \quad (1.9)$$

$$\left( x_0^{(2)} \right)' = \exp \left\{ i J_{0b}^{(2)} \theta_b \right\} x_0 \exp \left\{ -i J_{0c}^{(2)} \theta_c \right\} = x_0, \quad (1.10)$$

$\theta_b$  — параметры преобразования.

Формула (1.10) указывает на то, что время не меняется при переходе от одной системы отсчета в другой. Это означает, что релятивистское уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразованию (1.9), (1.10), хотя время при таком преобразовании не изменяется. Заметим, что нелокальное преобразование (1.10), конечно, не совпадает ни с преобразованием Лоренца, ни с преобразованием Галилея. Это означает, что преобразования (1.9), (1.10) не сохраняют квадратичную форму в конфигурационном пространстве

$$x_0^2 - x_a^2 \neq (x_0)^2 - (x_a)^2.$$

Однако аналогичные преобразования для энергии и импульса сохраняют квадратичную форму в импульсном пространстве

$$p_0^2 = p_a^2 = (p_0)^2 - (p_a)^2.$$

Таким образом, уравнение Дирака (1.1) обладает двойственной природой. С одной стороны, оно инвариантно относительно преобразований Лоренца, сохраняющих квадратичные формы как в конфигурационном, так и в импульсном пространствах. С другой стороны, уравнение Дирака инвариантно относительно преобразований (1.9), (1.10), которые не сохраняют квадратичную форму в конфигурационном пространстве. Если с помощью операторов (1.7) найти соответствующие

формулы преобразования для энергии и импульса, то такие преобразования сохраняют квадратичную форму в импульсном пространстве. Этот последний факт, инвариантность уравнения (1.1) и не инвариантность квадратичной формы относительно преобразований (1.9), (1.10), является следствием того, что оператор  $i\frac{\partial}{\partial t}$  в пространстве решений уравнения (1.1) имеет такой же спектр, как и оператор  $\mathcal{H}$ . Спектр оператора  $\mathcal{H}$  лежит, за исключением интервала  $(-m, m)$ , на всей действительной оси.

Используя эти рассуждения можно доказать следующее общее утверждение.

**Теорема 2.** Если произвольное уравнение вида (1.1) инвариантно относительно преобразований Лоренца, и спектр оператора  $\mathcal{H}(p)$  лежит на действительной оси и имеет ненулевую щель, то такое уравнение также инвариантно относительно преобразований координат  $x_a = f_a(x_1, x_2, x_3)$ ,  $a = 1, 2, 3$ , при которых время не изменяется.

**Замечание 2.** Уравнения Максвелла при отсутствии зарядов может быть записано в форме (1.1) и оператор  $\mathcal{H}$  для этих уравнений удовлетворяет условиям теоремы 2 [7]. Операторы (1.4), (1.5) являются интегро-дифференциальными.

С помощью интегрального преобразования (1.6) по указанной схеме доказываются следующее утверждение.

**Теорема 3.** Уравнение (1.1) инвариантно относительно алгебры Ли четырехмерной группы вращений  $O(4)$ , базисные элементы которой задаются интегро-дифференциальными операторами

$$\tilde{S}_{ab} = \frac{i}{4}(\tilde{\gamma}_a\tilde{\gamma}_b - \tilde{\gamma}_b\tilde{\gamma}_a), \quad a, b = 1, 2, 3, \quad \tilde{S}_{4a} = \frac{i}{4}(\tilde{\gamma}_4\tilde{\gamma}_a - \tilde{\gamma}_a\tilde{\gamma}_4), \quad (1.11)$$

где

$$\tilde{\gamma}_a = U^+ \gamma_a U = \gamma_a + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right) \left\{ \frac{(\gamma_a \gamma_c - \gamma_c \gamma_a) p_c + 2\gamma_a \gamma_4 m}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right\},$$

$$\tilde{\gamma}_4 = U^+ \gamma_4 U = \gamma_4 + \left( 1 - \frac{\gamma_b p_b + \gamma_4 m}{\sqrt{\mathcal{H}^2}} \right) \frac{\gamma_4 \gamma_c p_c}{\sqrt{\mathcal{H}^2}}.$$

2. Рассмотрим групповые свойства уравнения типа Дирака с собственным временем [11]

$$i \frac{\partial \Psi(\tau, x_0, x_1, x_2, x_3)}{\partial \tau} = (\gamma_0 p_0 - \gamma_a p_a) \Psi(\tau, x_0, x_1, x_2, x_3). \quad (1.12)$$

**Теорема 4.** Уравнение (1.12) инвариантно относительно группы вращений и сдвигов в пятимерном пространстве Минковского. Базисные элементы этой алгебры инвариантности уравнения (1.12) задаются такими дифференциальными операторами:

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_4 = -i \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad (1.13)$$

$$J_{4\mu} = \tau p_\mu + \frac{1}{2}(x_\mu \hat{M} + \hat{M} x_\mu), \quad \hat{M} = \gamma_0 p_0 - \gamma_a p_a.$$

**Теорема 5.** Уравнение (1.12) инвариантно относительно группы  $SO(1, 5)$ , если на множестве решений уравнения (1.12) оператор  $p_\mu^2 = p_0^2 - p_a^2 > 0$ , или группы  $SO(2, 4)$ , если на множестве решений уравнения (1.12) оператор  $p_\mu^2 = p_0^2 - p_a^2 < 0$ .

**Замечание 3.** В этом случае базисные элементы алгебры инвариантности уравнения (1.12) являются интегро-дифференциальными операторами. Из теоремы 5 следует, что уравнение (1.12) инвариантно относительно конформных преобразований.

## 2. Групповые свойства уравнений Кеммера–Дэффина и Клейна–Гордона–Фока

1. Уравнение Кеммера–Дэффина (КД) — это система десяти дифференциальных уравнений первого порядка

$$(\beta_0 p_0 - \beta_a p_a - m)\Psi(t, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (2.1)$$

$$p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3,$$

где четыре десятирядные матрицы  $\beta_0$  и  $\beta_a$  удовлетворяют алгебре

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = g_{\mu\nu} \beta_\lambda + g_{\lambda\nu} \beta_\mu. \quad (2.2)$$

Групповые свойства уравнения КД устанавливаются следующей теоремой.

**Теорема 6.** Уравнение КД инвариантно относительно 34-мерной алгебры Ли, содержащей в качестве подалгебры алгебру группы  $SU(3)$ .

Доказательство этой теоремы опубликовано в [13].

Известно, что помимо 10-мерного неприводимого представления алгебры (2.2), существует 5-мерное неприводимое представление. Поэтому неприводимое представление алгебры (2.2) наименьшей размерности может быть реализовано матрицами  $5 \times 5$ . В этом случае уравнение КД представляет собой дифференциальную систему пяти уравнений, для которых справедлива следующая теорема.

**Теорема 7.** Пятимерная система уравнений КД инвариантна относительно алгебры Ли группы  $SU(3)$ .

2. Перейдем к изучению групповых свойств уравнения Клейна–Гордона–Фока (КГФ). Преобразуем уравнение КГФ

$$(p_0^2 - p_a^2 - m^2) \varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x_0 = t \quad (2.3)$$

с помощью замены

$$p_0 \varphi = \varkappa \psi_2, \quad \varphi \equiv \psi_2, \quad p_0 \varphi \neq 0, \quad (2.4)$$

где  $\varkappa$  — постоянная величина, в системе двух уравнений первого порядка относительно временной производной:

$$p_0 \Psi(t, \vec{x}) = \mathcal{H} \Psi(t, \vec{x}), \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \vec{x}) \\ \psi_2(t, \vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\varkappa} \{ (E^2 + \varkappa^2) \sigma_1 - i \sigma_2 (E^2 - \varkappa^2) \}, \quad E = (p_a^2 + m^2)^{1/2}, \quad (2.6)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — двухмерные матрицы Паули.

Следующая теорема устанавливает групповые свойства уравнения КГФ.

**Теорема 8.** Уравнение (2.5) инвариантно относительно двух 10-мерных алгебр Ли, базисные элементы которых задаются операторами:

$$P_0^{(1)} = p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a^{(1)} = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab}^{(1)} = x_a p_b - x_b p_a, \quad (2.7)$$

$$J_{0a}^{(1)} = x_0 p_a - x_a p_0 + \xi_a^{(1)}, \quad \xi_a^{(1)} = -i p_a \frac{p_0}{2E^2} (\sigma_0 + \sigma_3);$$

$$P_0^{(2)} = \mathcal{H}, \quad P_a^{(2)} = p_a, \quad J_{ab}^{(2)} = x_a p_b - x_b p_a, \quad (2.8)$$

$$J_{0a}^{(2)} = x_0 p_a - \frac{1}{2} (x_a \mathcal{H} + \mathcal{H} x_a) + \xi_a^{(2)}, \quad \xi_a^{(2)} = -i p_a \frac{\mathcal{H}}{2E^2},$$

где  $\sigma_0$  — единичная двумерная матрица.

**Замечание 1.** Операторы (2.7) и (2.8) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ .

**3.** Изучим групповые свойства линейного уравнения четвертого порядка

$$i \frac{\partial \Psi(t, x_1, x_2, x_3)}{\partial t} = (a_0 + a_2 p^2 + a_4 p^4) \Psi(t, x_1, x_2, x_3), \quad (2.9)$$

где  $a_0, a_2, a_4$  — постоянные величины,

$$p^2 = p_a^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad p^4 = (p_a^2)^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^2.$$

Если в (2.9) положить  $a_0 = a_4 = 0$ ,  $a_2 = (2m)^{-1}$ , то такое уравнение совпадает со свободным нерелятивистским уравнением Шредингера для одной частицы. Поэтому уравнение (2.9) следует рассматривать как определенное обобщение уравнения Шредингера, учитывающее релятивистские эффекты. Для построения основ обобщенной нерелятивистской квантовой механики на базе уравнения (2.9) необходимо прежде всего найти группу инвариантности такого уравнения, что дает возможность получить формулу сложения скоростей при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Следующая теорема устанавливает группу инвариантности уравнения (2.9).

**Теорема 9.** Уравнение (2.9) инвариантно относительно 20-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются операторами

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad P_{ab} = p_a p_b, \quad (2.10)$$

$$L_a = p^2 p_a, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad \hat{M} = b_4 \hat{I},$$

$$G_a = t p_a^{(4)} - b_4 x_a, \quad a = 1, 2, 3, \quad (2.11)$$

где  $p_a^{(4)} = 2b_4(a_2 + 2a_4 p^2)p_a$ ,  $b_4$  — постоянная величина,  $\hat{I}$  — единичный оператор.

Операторы  $G_a$  порождают такие преобразования пространственных координат и обобщенного импульса  $p_a^{(4)}$ :

$$x'_a = \exp\{i G_b \theta_b\} x_a \exp\{-i G_c \theta_c\} = x_a + b_4^{-1} \left( p_a^{(4)'} - p_a^{(4)} \right) t, \quad (2.12)$$

$$t' = \exp\{i G_b \theta_b\} t \exp\{-i G_c \theta_c\} = t,$$

$$p_a^{(4)'} = \exp\{iG_b\theta_b\}p_a^{(4)} \exp\{-iG_c\theta_c\} = p_a^{(4)} + b_4(x'_a - x_a)t^{-1}, \quad (2.13)$$

$$p_a^{(4)'} = p_a + 2b_4^2\{(a_0^2 + 2b_4^2a_4\theta^2 + 2a_4p^2 + 4a_4b_4p_b\theta_b)\theta_a + 2a_4(2p_b\theta_b + b_4\theta^2)p_a\}, \quad (2.14)$$

где  $\theta_b$  — параметры преобразования,  $\theta^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2$ .

В случае, когда  $a_0 = a_4 = 0$ ,  $a_2 = (2m)^{-1}$ ,  $b_4 = m$ , а параметры преобразования  $\theta_a = v_a$  — компоненты скорости одной системы отсчета относительно другой, преобразования (2.12) и (2.13) приобретают простой вид

$$x'_a = x_a + \frac{p_a - p_0}{m}t = x_a + tv_a, \quad p'_a = p_a + mv_a, \quad t' = t. \quad (2.15)$$

Преобразования (2.15) совпадают с обычными преобразованиями Галилея.

**Замечание 2.** Оператор обобщенного импульса определяется из требования инвариантности уравнения (2.9) относительно операторов (2.11), т.е. из требования  $[p_0 - \mathcal{H}, G_a] = 0$ .

**Теорема 10.** Алгеброй инвариантности свободного уравнения Шредингера (уравнение (2.9), где  $a_0 = a_4 = 0$ ,  $a_2 = \frac{1}{2m}$ ) является шестимерная алгебра Ли, изоморфная алгебре Ли группы Лоренца  $SO(1, 3)$ .

Доказательство этой теоремы приведено в [15].

Во всех рассмотренных выше системах дифференциальных уравнений вида

$$\hat{L}\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(t, x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (2.16)$$

$\hat{L}$  — линейный дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами. Заметим, что все теоремы о группах инвариантности таких уравнений доказывались с помощью приведения матричного оператора  $\hat{L}$  к диагональному виду изометрическим (или унитарным) преобразованием. Привести  $L$  к диагональному виду удалось благодаря тому, что символ  $L(x, p)$  этого оператора является симметрической матрицей.

В тех случаях, когда символ оператора  $\hat{L}$  появляется симметрической матрицей, для установления алгебры инвариантности уравнения (2.16) нужно преобразовать его к виду, в котором символ преобразованного оператора  $\hat{L}'$  имеет канонический вид Жордана. Установив алгебру инвариантности для преобразованного уравнения (2.16), с помощью изометрического преобразования находится явный вид алгебры инвариантности для исходного уравнения (2.16). Очевидно, что методом канонических преобразований можно изучить групповые свойства дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Алгебра инвариантности уравнения (2.16) может быть установлена с помощью диагонализации и в том случае, когда  $\hat{L}$  — абстрактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Согласно спектральной теореме фон Неймана, всякий самосопряженный оператор может быть приведен к диагональному виду унитарным преобразованием. Примером таких уравнений может служить счетная система уравнений первого порядка в частных производных типа Майорана, описывающая движение релятивистской системы с переменной массой и спином. Групповые свойства линейных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве будут изучены в другой статье.

1. Овсянников Л.В., Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, 1958, **118**, № 3, С. 439–441.
2. Овсянников Л.В., Групповые свойства уравнений механики, В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., Наука, 1972, С. 381–393.
3. Митропольский Ю.А., Лопатин Л.К., О преобразовании систем нелинейных дифференциальных уравнений к нормальной форме, *Математическая физика*, К., 1973, вып. 14, С. 125–140.
4. Mitropolski Yu.A., Lopatine A.K., Le methode asymptotique dans la theorie des processus non-lineaires ondulatoires et oscilatoires, *Bolletino della Unione Matematica Italiana*, 1975, **4**, 11, Suppl. fasc. 3, P. 413–429.
5. Fushchych W.I., On additional invariance of relativistic equations of motion, Preprint Inst. Theor. Phys., 1970. № 32E, P. 1–16.
6. Фушич В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, С. 3–12.
7. Fushchych W.I., On the additional invariance of the Dirac and Maxwell Equations, *Lettere Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, P. 508–512.
8. Фушич В.И., О релятивистски-инвариантном массовом операторе, *Укр. физ. журн.*, 1968, **13**, № 3, С. 363–372.
9. Фушич В.И., О представлении группы де Ситтера, *Укр. физ. журн.*, 1966, **11**, № 8, С. 907–909.
10. Фушич В.И., О дополнительной инвариантности уравнения Клейна–Гордона–Фока, *ДАН СССР*, 1976, **230**, № 3, С. 570–573.
11. Фушич В.И., Сегада Ю.Н., О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики, *Укр. мат. журн.*, 1976, **28**, № 6, С. 844–849.
12. Никитин А.Г., Сегада Ю.Н., Фушич В.И., О дополнительной инвариантности уравнений Кеммера–Дэффина и Рариты–Швингера, *Теор. и мат. физика*, 1976, **29**, № 1, С. 82–92.
13. Владимиров С.А., Фушич В.И., Максимальная и минимальная группы симметрии атома водорода, *Укр. физ. журн.*, 1976, **21**, № 9, С. 1460–1462.
14. Сегада Ю.Н., О дополнительной инвариантности уравнений Максвелла, В кн.: Краевые задачи электродинамики сплошных сред, Киев, 1976, С. 218–224.
15. Фушич В.И., Сегада Ю.Н., О новой алгебре инвариантности уравнения Шредингера, *ДАН СССР*, 1977, **232**, № 4, С. 801–802.
16. Niederer U., The maximal kinematical Invariance groups of Schrödinger equation, *Helvetica Physica Acta*, 1972, **45**, С. 802–814.
17. Anderson R.L., Kumei S., Wulfman C.E., Generalization of the concept of invariance of differential equations, *Physical Review Letters*, 1972, **28**, № 15, С. 988–992.
18. Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W., Lie theory and separation of variables, *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, P. 499–512.

# Дифференциальные уравнения движения первого и второго порядка для частиц с произвольным спином

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

Выведены пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнения первого и второго порядка, описывающие движение свободной частицы с произвольным спином. Показано, что полученные уравнения допускают непротиворечивое обобщение на случай заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Точно решена задача о движении частицы произвольного спина в однородном магнитном поле. Найден в явном виде закон преобразования операторов координаты и спина частицы при переходе к новой инерциальной системе отсчета.

## Введение

В последние годы вновь оживился интерес к теории релятивистских уравнений для частиц с произвольным спином. Этот интерес обусловлен экспериментальным открытием относительно стабильных частиц со спином  $s > 1$ , а также тем обстоятельством, что все обычно используемые уравнения для таких частиц оказались во многих отношениях не вполне удовлетворительными.

В работах [1–3] было показано, что явно ковариантные уравнения, описывающие движение свободных частиц со спином  $s \geq 1$ , приводят к различным противоречиям при обобщении на случай взаимодействия с внешним полем — сверхсветовой скорости распространения сигнала, комплексным значениям энергии частицы и другим парадоксам.

Причины этих трудностей хорошо известны. Они состоят в том, что явно ковариантные уравнения для частиц с высокими спинами либо включают производные по времени выше первого порядка, либо содержат лишние (нефизические) компоненты. Поэтому самый кардинальный способ преодоления упомянутых трудностей заключается в том, чтобы исходить из уравнений движения свободной частицы в форме Шредингера

$$H_s \Psi(t, \vec{x}) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{x}), \quad (0.1)$$

где  $\Psi(t, \vec{x})$  —  $2(2s + 1)$ -компонентная волновая функция,  $H_s$  — гамильтониан частицы, зависящий от импульсов  $p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}$ ,  $a = 1, 2, 3$  и спиновых матриц.

Уравнения движения для частицы с произвольным спином  $s$  в форме (0.1) были получены в работах [4–6]. Несмотря на выделенность производной по времени, эти уравнения пуанкаре-инвариантны, поскольку операторы  $H_s$  удовлетворяют соотношениям

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - H_s, Q_i \right]_- \Psi(t, \vec{x}) = 0, \quad (0.2)$$

где  $Q_i$  — произвольный генератор группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ . Отличительной особенностью уравнений, полученных в [4–6], является то обстоятельство, что гамильтониан  $H_s$  определен в пространстве волновых функций  $\Psi(t, \vec{x})$  со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^+ \Psi_2, \quad (0.3)$$

в то время как в более ранних работах Вивера, Хаммера, Гуда и Метьюза с сотрудниками [7], в которых также рассматривались уравнения вида (0.1), скалярное произведение волновых функций имеет вид

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^+ M \Psi_2, \quad (0.4)$$

где  $M$  — некоторый интегро-дифференциальный метрический оператор.

В работах Гуертина [8] подход [4, 5] получил дальнейшее развитие и были найдены новые уравнения вида (0.1) в пространстве с индефинитной метрикой, которые для нижайших значений спина  $s = 0, 1$  совпадают с известными уравнениями Тамма–Сакаты–Такетани [9].

Найденные в [4–8] релятивистские гамильтонианы  $H_s$  при  $s > \frac{1}{2}$  являются интегро-дифференциальными (нелокальными) операторами, что сильно затрудняет задачу обобщения уравнений (0.1) на случай взаимодействующих частиц. В [5] такая задача решена для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле в предположении, что импульс частицы мал по сравнению с ее массой.

В настоящей работе получены дифференциальные уравнения движения в форме (0.1) для релятивистской частицы произвольного спина. С использованием алгебраического (неспинорного) подхода, развитого в работах [4, 5], найдены все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские гамильтонианы  $H_s$ , принадлежащие классу дифференциальных операторов первого и второго порядка. Показано, что полученные уравнения допускают непротиворечивое обобщение на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Исходя из найденных уравнений, точно решена задача о движении релятивистской частицы с произвольным спином в однородном магнитном поле.

Получены также релятивистские уравнения для безмассовых частиц с произвольным спином. Описанию таких частиц посвящено большое количество работ, опубликованных в последние годы [23]. Предложено большое количество (не всегда неэквивалентных) уравнений для безмассовых частиц и в то же время описаны не все возможные существенно различные типы таких уравнений. В настоящей работе найдены все возможные (с точностью до эквивалентности) пуанкаре-инвариантные уравнения для частиц с нулевой массой и исследованы их свойства относительно преобразований пространственной инверсии  $P$ , зарядового сопряжения  $C$  и обращения времени  $T$ .

### 1. Уравнения без лишних компонент

Дифференциальные уравнения движения частицы произвольного спина  $s$  мы получим, исходя из следующего представления для генераторов  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  группы

$P(1, 3)$

$$P_0 = H_s, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad (1.1)$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad J_{0a} = t p_a - \frac{1}{2} [x_a, H_s]_+ + \lambda_a,$$

где  $[A, B]_+ = AB + BA$ ,  $H_s$  — неизвестный пока дифференциальный оператор, включающий производные по  $\frac{\partial}{\partial x_a}$  не выше второго порядка,

$$S_{ab} = S_c = \begin{pmatrix} s_c & 0 \\ 0 & s_c \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \text{ — цикл } (1, 2, 3), \quad (1.2)$$

$s_c$  — генераторы неприводимого представления  $D(s)$  группы  $O(3)$ ,  $\lambda_a$  — некоторый оператор, явный вид которого может быть определен из требования, чтобы генераторы (1.1) удовлетворяли алгебре Пуанкаре  $P(1, 3)$ .

Представления вида (1.1) рассматривались в [8]. Однако уравнения для частицы с произвольным спином  $s$  полученные в [7], принадлежат при  $s > 1$  классу нелокальных (интегро-дифференциальных) уравнений.

**Определение.** Будем говорить, что уравнение (0.1) пуанкаре-инвариантно и описывает частицу с массой  $m$  и спином  $s$ , если генераторы  $P_a$ ,  $J_{\mu\nu}$  и гамильтониан  $H_s$  удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры  $P(1, 3)$  [4]

$$[H_s, P_a]_- = [H_s, J_{ab}]_- = 0, \quad (1.3)$$

$$[J_{ab}, J_{cd}]_- = i(\delta_{ac} J_{bd} + \delta_{bd} J_{ac} - \delta_{ad} J_{bc} - \delta_{bc} J_{ad}),$$

$$[J_{ab}, J_{0c}]_- = i(\delta_{bc} J_{0a} - \delta_{ac} J_{0b}), \quad (1.4)$$

$$[H_s, J_{0a}]_- = i p_a, \quad [J_{0a}, J_{0b}]_- = -i J_{ab}, \quad [P_a, J_{0b}] = i \delta_{ab} H_s,$$

$$P_\mu P^\mu = H_s^2 - p_a^2 = m^2, \quad (1.5)$$

$$W_\mu W^\mu \Psi = m^2 s(s+1) \Psi, \quad (1.6)$$

где введено обозначение  $[A, B]_- = AB - BA$ ,  $W_\mu$  — вектор Паули-Любанского,  $W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} J_{\nu\sigma} P_\lambda$ .

Таким образом, задача о нахождении всех неэквивалентных уравнений вида (0.1) сводится к отысканию операторов  $H_s$  и  $\lambda_a$  (зависящих от импульсов  $p_a$  и спиновых матриц  $S_a$ ), удовлетворяющих системе соотношений (1.1)–(1.6).

Искомый дифференциальный оператор второго порядка  $H_s$  представим в виде разложения по спиновым матрицам и  $2(2s+1)$ -рядным матрицам Паули

$$H_s = h_0^{(s)} m + h_1^{(s)} + \frac{1}{m} h_2^{(s)}, \quad (1.7)$$

где

$$h_0^{(s)} = a_\mu^{(s)} \sigma_\mu, \quad h_1^{(s)} = b_\mu^{(s)} \sigma_\mu, \quad (1.8)$$

$$h_2^{(s)} = c_\mu^{(s)} \sigma_\mu (\vec{S} \cdot \vec{P}) + d_\mu^{(s)} \sigma_\mu p^2, \quad p^2 = \sum_{a=1}^3 p_a^2,$$

$\sigma_\mu$  —  $2(2s+1)$ -рядные матрицы Паули, коммутирующие с  $S_{ab}(1, 2)$ ,  $a_\mu^{(s)}$ ,  $b_\mu^{(s)}$ ,  $c_\mu^{(s)}$ ,  $d_\mu^{(s)}$  — неизвестные коэффициенты. По повторяющемуся индексу  $\mu$  подразумевается суммирование от 0 до 3.

**Теорема 1.** Все возможные (с точностью до эквивалентности) дифференциальные операторы  $H_s$ , включающие производные не выше второго порядка и удовлетворяющие системе соотношений (1.1)–(1.6), задаются формулами:

$$H_s = \sigma_1 m + \sigma_3 k_1 \vec{S} \cdot \vec{p} + (\sigma_1 - i\sigma_2) \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{k^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{2m} \right), \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad (1.9)$$

$$H_1 = \sigma_1 m + (\sigma_1 - i\sigma_2) \frac{p^2}{2m} - \left( ik_2 \sigma_2 + \sqrt{k_2(k_2+1)} \sigma_3 \right) \frac{(\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{m}, \quad (1.10)$$

$$H_1 = \sigma_1 m + k_3 \sigma_3 (\vec{S} \cdot \vec{p}) + (\sigma_1 - i\sigma_2) \frac{p^2}{2m} + [-k_3^2 \sigma_1 + i\sigma_2 (2 - k_3^2)] \frac{(\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{2m}, \quad (1.11)$$

$$H_{\frac{3}{2}} = \sigma_1 \left( m + \frac{p^2}{2m} \right) + i\sigma_2 \frac{k_4}{2m} \left[ (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 - \frac{5}{4} p^2 \right] + \sigma_3 \sqrt{k_4^2 - 1} \frac{(\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{2m}, \quad (1.12)$$

$$H_{\frac{3}{2}} = \sigma_1 \left[ m + \frac{p^2}{2m} - \frac{k_5^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{2m} \right] + \sigma_3 k_5 \vec{S} \cdot \vec{p} + i\sigma_2 \left[ \left( \frac{5}{2} k_5^2 - 1 \right) \frac{(\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{2m} - \left( \frac{9}{4} k_5^2 - 1 \right) \frac{p^2}{2m} \right], \quad (1.13)$$

где  $k_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4, 5$  — произвольные параметры.

**Доказательство.** Используя явный вид (1.1)–(1.2) генераторов группы  $P(1, 3)$ , нетрудно убедиться, что гамильтониан (1.7), (1.8) удовлетворяет соотношениям (1.3) при произвольных значениях коэффициентов  $a_\mu^{(s)}$ ,  $b_\mu^{(s)}$ ,  $c_\mu^{(s)}$ ,  $d_\mu^{(s)}$ .

Потребуем, чтобы гамильтониан (1.7) удовлетворял условию (1.5). Подставив (1.7) в (1.5) и приравнявая коэффициенты при линейно независимых слагаемых, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} h_0^{(s)} \cdot h_0^{(s)} &= 1, & [h_1^{(s)}, h_2^{(s)}]_+ &= 0, & h_2^{(s)} \cdot h_2^{(s)} &= 0, \\ [h_0^{(s)}, h_1^{(s)}]_+ &= 0, & h_1^{(s)} \cdot h_1^{(s)} + [h_0^{(s)}, h_2^{(s)}]_+ &= p^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ввиду линейной независимости спиновых матриц  $S_a$  и матриц Паули  $\sigma_\mu$  система соотношений (1.8), (1.14) эквивалентна системе уравнений второго порядка для коэффициентов  $a_\mu^{(s)}$ ,  $b_\mu^{(s)}$ ,  $c_\mu^{(s)}$ ,  $d_\mu^{(s)}$ . Общее решение системы (1.8), (1.14) для произвольных значений  $s$  задается формулой (см. дополнение)

$$h_0^{(s)} = \sigma_1, \quad h_1^{(s)} = \sigma_3 k_1 (\vec{S} \cdot \vec{p}), \quad h_2^{(s)} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - i\sigma_2) \left[ p^2 - k_1^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 \right], \quad (1.15)$$

где  $k_1$  — произвольное комплексное число. В случаях  $s = 1$  и  $s = \frac{3}{2}$ , помимо (1.15) существует еще по два независимых решения

$$\begin{aligned} h_0^{(1)} &= \sigma_1, & h_1^{(1)} &= 0, \\ h_2^{(1)} &= (\sigma_1 - i\sigma_2) \frac{p^2}{2} - \left( ik_2 \sigma_2 + \sqrt{k_2(k_2+1)} \sigma_3 \right) (\vec{S} \cdot \vec{p})^2, \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}
 h_0^{(1)} &= \sigma_1, & h_1^{(1)} &= \sigma_3 k_3 (\vec{S} \cdot \vec{p}), \\
 h_3^{(1)} &= \sigma_1 \left( \frac{p^2}{2} - \frac{k_3^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{2} \right) + i\sigma_2 \left[ \left( 1 - \frac{k_3^2}{2} \right) (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 - \frac{p^2}{2} \right],
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}
 h_0^{(\frac{3}{2})} &= \sigma_1, & h_1^{(\frac{3}{2})} &= 0, \\
 h_2^{(\frac{3}{2})} &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma_1 p^2 + i\sigma_2 k_4 \left[ (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 - \frac{5}{4} p^2 \right] + \sigma_3 \sqrt{k_4^2 - 1} (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 \right\},
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
 h_0^{(\frac{3}{2})} &= \sigma_1, & h_1^{(\frac{3}{2})} &= \sigma_3 k_5 (\vec{S} \cdot \vec{p}), \\
 h_2^{(\frac{3}{2})} &= \frac{1}{2} \left\{ i\sigma_2 \left[ \left( \frac{5}{4} k_5^2 - 1 \right) (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 - \left( \frac{9}{4} k_5^2 - 1 \right) p^2 \right] + \sigma_1 \left[ p^2 - k_5^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

где  $k_2, k_3, k_4, k_5$  — произвольные комплексные числа.

Формулы (1.15)–(1.19) задают все возможные решения системы (1.8), (1.14) с точностью до преобразований эквивалентности, осуществляемых чисельными матрицами. Подставив (1.15)–(1.19) в (1.7) приходим к гамильтонианам (1.9)–(1.13).

Для завершения доказательства теоремы осталось только указать явный вид операторов  $\lambda_a$ , входящих в определение (1.1) генераторов  $J_{0a}$ , при котором операторы (1.1), (1.9)–(1.13) удовлетворяют соотношениям (1.4), (1.6). Можно убедиться непосредственной проверкой, что эти соотношения выполняются, если положить в (1.1)

$$\lambda_a = \left( 1 - \frac{k_1}{2} \right) \left[ i\sigma_1 S_a - \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2m} (\vec{p} \times \vec{S})_a \right] \tag{1.20}$$

в случае, когда гамильтониан  $H_s$  имеет вид (1.9) и

$$\begin{aligned}
 \lambda_a &= -\frac{[S_{ab} p_b, H_s]_+}{E(E+m)} + i\frac{p_a(2E+B_s)}{2E^2 B_s} - i\frac{[\dot{x}_a \sigma_1, H_s]_+}{2EB_s} - \frac{i[S_{ab} p_b \sigma_1, H_s]_+}{2(E+m)B_s}, \\
 B_s &= 2E + [H_s, \sigma_1]_+, & \dot{A} &= i[H_s, A]_-, & E &= \sqrt{p^2 + m^2}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

в случае, когда гамильтониан  $H_s$  задается одной из формул (1.10)–(1.18). Теорема доказана.

**Замечание 1.** Операторы (1.9)–(1.13) включают как частные случаи гамильтониан Дирака для частицы с  $s = \frac{1}{2}$  (формула (1.9) при  $k_1 = \pm 2$ ) и гамильтонианы Тамма–Сакаты–Такетани [9] для частиц с  $s = 0$  (формула (1.9)) и  $s = 1$  (формулы (1.10) при  $k_2 = -1$  и (1.11) при  $k_3 = 0$ ).

**Замечание 2.** Гамильтониан (1.9) при  $s = \frac{1}{2}$ ,  $k_1$  — произвольное чисто мнимое число, рассматривался ранее в [10].

**Замечание 3.** Все генераторы группы  $P(1,3)$ , задаваемые формулами (1.1), (1.9), (1.20), принадлежат классу дифференциальных операторов. При  $k_1 = 2$  генераторы  $J_{0a}$  (1.1), (1.20) принимают особо простой вид

$$J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, H_s]_+. \tag{1.22}$$

**Замечание 4.** Гамильтонианы (1.9)–(1.13) и остальные генераторы группы  $P(1, 3)$ , задаваемые формулами (1.1), (1.2), (1.20), (1.21), могут быть приведены к канонической форме Фолди–Широкова [11]. Это достигается посредством преобразования

$$\begin{aligned} P_0 &\rightarrow P_0^k = VP_0V^{-1} = \sigma_1 E, & P_a &\rightarrow P_a^k = VP_aV^{-1} = p_a, \\ J_{ab} &\rightarrow J_{ab}^k = VJ_{ab}V^{-1} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ J_{0a} &\rightarrow J_{0a}^k = VJ_{0a}V^{-1} = t p_a - \frac{1}{2}[x_a, E]_+ \sigma_1 - \sigma_1 \frac{S_{ab} p_b}{E + m}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

где операторы  $V$  задаются формулами

$$\begin{aligned} V &= V_1 V_2 V_3, \\ V_1 &= \exp\left(\sigma_1 \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p} \operatorname{arth} \frac{p}{E}\right), & V_3 &= \exp\left[(\sigma_1 - i\sigma_2) \left(\frac{k_1}{2} - 1\right) \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{m}\right], \\ V_2 &= \frac{1}{\sqrt{Em}} \left[ E\lambda^+ + m\lambda^- - 2\sigma_1 \vec{S} \cdot \vec{p} \lambda^- \right], & \lambda^\pm &= \frac{1}{2}(1 \pm \sigma_3) \end{aligned} \quad (1.24)$$

для гамильтонианов (1.9) и

$$V = \frac{E + \sigma_1 H_s}{\sqrt{2E^2 + E[H_s, \sigma_1]_+}} \quad (1.25)$$

для гамильтонианов (1.10)–(1.13).

Таким образом, мы нашли все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские гамильтонианы  $H_s$  частицы с произвольным спином  $s$ , включающие произвольные не выше второго порядка. Оказалось, что такие гамильтонианы существуют для любых значений  $s$  и задаются формулами (1.9)–(1.13).

Возникает естественный вопрос: существуют ли пуанкаре-инвариантные гамильтонианы для частиц с произвольным спином в классе дифференциальных операторов первого порядка? Задача описания таких гамильтонианов решается в следующем параграфе.

## 2. Дифференциальные гамильтонионы уравнения первого порядка

По аналогии с теорией Дирака для электрона, постулируем, что гамильтониан релятивистской частицы с произвольным спином является дифференциальным оператором, включающим производные по пространственным переменным не выше первого порядка. Общий вид такого оператора задается формулой

$$\mathcal{H}_s = \hat{\Gamma}_a^{(s)} p_a + \hat{\Gamma}_0^{(s)} m, \quad p_a = -\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad (2.1)$$

где  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$  — некоторые численные матрицы.

Генераторы представления группы Пуанкаре, которое реализуется на решениях уравнения (0.1) с гамильтонианом (2.1), выберем в виде

$$\begin{aligned} P_0 &= \mathcal{H}_s, & P_a &= p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, & J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ J_{0a} &= x_0 p_a - x_a P_a + S_{0a}, & x_0 &= t, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $S_{\mu\nu}$  — матрицы, образующие конечномерное представление (не обязательно неприводимое) алгебры Лоренца  $O(1,3)$ . Представление (2.2) соответствует локальным преобразованиям волновой функции при переходе к новой инерциальной системе отсчета.

Определить все возможные гамильтонианы вида (2.1) означает найти все такие матрицы  $\Gamma_\mu^{(s)}$  и  $S_{\mu\nu}$ , что операторы (2.1), (2.2) удовлетворяют алгебре Пуанкаре (1.3)–(1.6).

Потребуем, чтобы гамильтониан (2.1) удовлетворял соотношению (1.5):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s^2 - p_s^2 \equiv & \left(\hat{\Gamma}_a^{(s)}\right)^2 p_a^2 + \left(\hat{\Gamma}_0^{(s)}\right)^2 m^2 + \\ & + \left[\hat{\Gamma}_0^{(s)}, \hat{\Gamma}_a^{(s)}\right]_+ m p_a + \left[\hat{\Gamma}_a^{(s)}, \hat{\Gamma}_b^{(s)}\right]_+ p_a p_b - p_a^2 = m^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Приравнявая в (2.3) линейно независимые слагаемые, заключаем, что матрицы  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$  должны удовлетворять алгебре Клиффорда

$$\hat{\Gamma}_\mu^{(s)} \hat{\Gamma}_\nu^{(s)} + \hat{\Gamma}_\nu^{(s)} \hat{\Gamma}_\mu^{(s)} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Представления алгебры (2.4) хорошо известны и задаются матрицами размерности  $2^n \times 2^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . При этом матрицы

$$\tau_{ab} = \frac{i}{2} \hat{\Gamma}_a^{(s)} \hat{\Gamma}_b^{(s)}, \quad \tau_{0a} = \frac{i}{2} \hat{\Gamma}_a^{(s)} \quad (2.5)$$

реализуют  $2^{n-2}$  кратно вырожденное представление  $D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right)$  алгебры  $O(1,3)$ .

Определим теперь матрицы  $S_{\mu\nu}$  из (2.2). Представим  $S_{\mu\nu}$  в виде

$$S_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + j_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

где  $j_{\mu\nu}$  — неизвестные матрицы, подлежащие определению. Подставив (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) в (1.3), (1.4), получаем, что матрицы  $j_{\mu\nu}$  должны удовлетворять соотношениям

$$[j_{\mu\nu}, j_{\lambda\rho}]_- = i(g_{\mu\rho} j_{\nu\lambda} + g_{\lambda\nu} j_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda} j_{\nu\rho} - g_{\nu\rho} j_{\mu\lambda}), \quad (2.7)$$

$$\left[j_{\mu\nu}, \hat{\Gamma}_\lambda^{(s)}\right]_- = [j_{\mu\nu}, \tau_{\lambda\rho}]_- = 0, \quad (2.8)$$

т.е. матрицы  $j_{\mu\nu}$  должны реализовать конечномерное представление алгебры  $O(1,3)$  и коммутировать с  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ .

Рассмотрим случай, когда  $j_{\mu\nu}$  образуют неприводимое представление  $D(j, 0)$  алгебры  $O(1,3)$ . Это означает, что

$$\begin{aligned} j_{ab} &= j_c, & j_{0a} &= -ij_a, \\ [j_a, j_b]_- &= ij_c, & j_a^2 &= j(j+1), \end{aligned} \quad (a, b, c) \text{ — цикл } (1, 2, 3). \quad (2.9)$$

Тогда из (2.6), (2.8) по теореме Клебша–Гордона заключаем, что матрицы  $S_{\mu\nu}$  должны реализовать представление

$$\left[D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(0, \frac{1}{2}\right)\right] \otimes D(j, 0) = D\left(j + \frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(j - \frac{1}{2}, 0\right) \oplus D\left(j, \frac{1}{2}\right). \quad (2.10)$$

При редукции (2.10) на алгебру  $O(3)$  получаем представление (2.10)

$$D\left(j + \frac{1}{2}\right) \oplus D\left(j + \frac{1}{2}\right) \oplus D\left(j - \frac{1}{2}\right) \oplus D\left(j - \frac{1}{2}\right), \quad (2.10)$$

что соответствует двум возможным значениям спина

$$s_1 = s = j + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad s_2 = s - 1 = j - \frac{1}{2}. \quad (2.11)$$

Нетрудно подсчитать, что размерность матриц  $S_{\mu\nu}$ , входящих в представление (2.10), равна  $8s \times 8s$ ; такова же размерность матриц  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$  из (2.5), (2.6). При этом волновая функция  $\Psi(t, \vec{x})$ , удовлетворяющая уравнению (0.1) с гамильтонианом (2.1), должна иметь  $8s$  компонент. Можно показать, что если матрицы  $j_{\mu\nu}$  в (2.6) образуют неприводимое представление  $D(j_1, j_2)$  алгебры  $O(1, 3)$ , где  $j_1 \neq 0$  и  $j_2 \neq 0$  или приводимое представление этой алгебры, то при заданном фиксированном  $s$  размерность матриц  $S_{\mu\nu}$  всегда будет больше, чем  $8s \times 8s$ .

Таким образом, гамильтониан (2.1) и операторы (2.2) удовлетворяют условиям пуанкаре-инвариантности (1.3)–(1.5), а волновая функция  $\Psi(t, \vec{x})$  имеет минимальное число компонент тогда и только тогда, когда матрицы  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$  в (2.1) реализуют  $8s$ -рядное представление алгебры Клиффорда (2.4), а матрицы  $S_{\mu\nu}$  в (2.2) имеют вид (2.5), (2.6), (2.8), (2.9), где  $j = s - \frac{1}{2}$ .

Уравнение (0.1) с гамильтонианом (2.1) описывает частицу, спин которой может принимать два значения (2.11). Для того, чтобы получить описание частицы с фиксированным спином  $s$ , на волновую функцию  $\Psi(t, \vec{x})$  следует наложить пуанкаре-инвариантное дополнительное условие, исключающее лишние компоненты, соответствующие значению спина  $s_2 = s - 1$ . Такое дополнительное условие имеет особо простую форму в каноническом представлении алгебры  $P(1, 3)$  типа Фолди–Широкова [11], в котором гамильтониан  $\mathcal{H}_s$  (2.1) диагонален, а генераторы  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  (2.2) реализуют полностью приведенную прямую сумму неприводимых представлений  $D^+(s) \oplus D^-(s) \oplus D^+(s-1) \oplus D^-(s-1)$  алгебры Пуанкаре.

Преобразуем уравнение (0.1), (2.1) и генераторы (2.2) к канонической диагональной форме

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \mathcal{H}^k \Phi = \hat{\Gamma}_0^{(s)} E \Phi, \quad \Phi = U \Psi, \quad (2.12)$$

$$P_\mu \rightarrow U P_\mu U^{-1} = P_\mu^k, \quad J_{\mu\nu} \rightarrow U J_{\mu\nu} U^{-1} = J_{\mu\nu}^k, \quad (2.13)$$

где  $P_\mu^k, J_{\mu\nu}^k$  задаются формулами

$$\begin{aligned} P_0^k &= \hat{\Gamma}_0^{(s)} \cdot E, & P_a^k &= p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, & J_{ab}^k &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ J_{0a}^k &= x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, P_0^k]_+ - \hat{\Gamma}_0^k \frac{S_{ab} p_b}{E + m}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

а оператор преобразования  $U$  имеет форму

$$U = \exp\left(\frac{\Gamma_a^{(s)} p_a}{2p} \arctg \frac{p}{m}\right) \exp\left(\frac{\Gamma_0^{(s)} j_a p_a}{p} \operatorname{arth} \frac{p}{E}\right), \quad (2.15a)$$

$$\Gamma_a^{(s)} = \hat{\Gamma}_0^{(s)} \hat{\Gamma}_a^{(s)}, \quad \Gamma_0^{(s)} = \hat{\Gamma}_0^{(s)}, \quad \Gamma_4^{(s)} = i\Gamma_0^{(s)} \Gamma_1^{(s)} \Gamma_2^{(s)} \Gamma_3^{(s)}. \quad (2.15б)$$

В представлении (2.14) инвариантное дополнительное условие, выделяющее подпространство, соответствующее спину  $s$ , имеет вид

$$W_\mu W^\mu \Phi \equiv (S_{ab})^2 \Phi = s(s+1)\Phi. \quad (2.16)$$

Эквивалентной формой записи условия (2.16) служит формула

$$P_s \Phi = \Phi, \quad (2.17)$$

где  $P_s$  — оператор проектирования на подпространство, соответствующее фиксированному спину  $s$

$$P_s = \frac{1}{2s} [(S_{ab})^2 - s(s-1)]. \quad (2.18)$$

Таким образом, в представлении (2.14) уравнения движения релятивистской частицы с произвольным фиксированным спином  $s$  имеют вид (2.12), (2.17). Посредством преобразования, обратного (2.12), (2.15), получаем эти уравнения в  $\Psi$ -представлении

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \mathcal{H}_s \Psi, \quad \mathcal{H}_s = \Gamma_0^{(s)} \Gamma_a^{(s)} p_a + \Gamma_0^{(s)} m, \quad (2.19а)$$

$$\hat{P}_s \Psi = \Psi, \quad \hat{P}_s = U^{-1} P_s U = P_s + \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \frac{[\Gamma_\mu^{(s)} p_\mu, P_s]}{2m}. \quad (2.19б)$$

Отметим, что уравнения (2.19) могут быть записаны в явно ковариантной форме

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)} p_\mu - m\right) \Psi = 0, \quad (2.20а)$$

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)} p_\mu + m\right) \left(1 + \Gamma_4^{(s)} (S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 2s(s-1))\right) \Psi = 8ms\Psi. \quad (2.20б)$$

Уравнение (2.20а) получается из (2.19а) простым умножением на  $\Gamma_0^{(s)}$ , а уравнение (2.20б) легко сводится к (2.19б), если принять во внимание тождество

$$\left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right) P_s \equiv \frac{1}{4s} (S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 2s(s-1)). \quad (2.21)$$

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 2.** Системы уравнений (2.19) и (2.20) пуанкаре-инвариантны и описывают движение свободной частицы с фиксированным спином  $s$  и массой  $m$ .

Система уравнений (2.20) имеет ряд преимуществ перед другими известными уравнениями для частиц с произвольным спином [1–3]. Действительно, уравнения (2.20) имеют достаточно простую форму, которая не усложняется с ростом спина (алгебра  $\Gamma$ -матриц, безусловно, проще алгебры матриц, входящих в другие известные уравнения для высших спинов); предельный переход  $m \rightarrow 0$ , как будет показано ниже, позволяет получить из (2.20) уравнения для безмассовых частиц (в то время как уравнения Кеммера–Дэффина и Баба не допускают такого

перехода [14]); наконец, как будет показано далее, уравнения (2.20) допускают непротиворечивое обобщение на случай частиц, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем.

Уравнения (2.20) были выписаны нами ранее в [4] без каких-либо доказательств. Здесь мы привели подробный вывод этих уравнений.

В работах [15] также предлагались  $8s$ -компонентные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение свободной частицы с произвольным фиксированным спином  $s$  и массой  $m$ . Однако системы уравнений, полученные в [15], становятся несовместными при учете взаимодействия частицы с внешним полем.

### 3. Уравнение типа Вейля для частиц произвольного спина

Хорошо известно, что уравнение Вейля для нейтрино [12] эквивалентно уравнению Дирака ( $cm = 0$ ), если на решение последнего наложить пуанкаре-инвариантное дополнительное условие

$$(1 - \Gamma_4^{(s)}) \Psi = 0, \quad s = \frac{1}{2}. \quad (3.1)$$

В настоящем параграфе получено уравнения типа Вейля для частиц произвольного спина, исходя из обобщенного уравнения Дирака (2.20).

Система уравнений (2.20) для случая  $m = 0$  может быть записана в форме

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= \Gamma_0^{(s)} \Gamma_a^{(s)} p_a \Psi, \\ \left( i \frac{\partial}{\partial t} - \Gamma_0^{(s)} \Gamma_a^{(s)} p_a \right) (1 + \Gamma_4^{(s)}) (S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 2s(s-1)) \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из явного вида генераторов группы  $P(1,3)$  (2.2), (2.5), (2.6), (2.9) следует, что при  $m = 0$  оператор  $1 - \Gamma_4^{(s)}$  коммутирует с  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$ , и, следовательно, уравнение (3.1) пуанкаре-инвариантно для любого значения спина. Добавляя условия (3.1) к уравнениям (3.2) и выбирая матрицы  $\Gamma_\mu^{(s)}$  в виде

$$\Gamma_0^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{0} & I \\ I & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^{(s)} = \begin{pmatrix} I & \hat{0} \\ \hat{0} & -I \end{pmatrix}, \quad \Gamma_a^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{0} & 2\tau_a \\ -2\tau_a & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где  $I$  и  $\hat{0}$  —  $4s$ -рядные единичные и нулевые матрицы,  $\tau_a$  —  $4s$ -рядные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$[\tau_a, \tau_b] = i\tau_c, \quad (a, b, c) \text{ — цикл } (1, 2, 3), \quad \tau_a^2 = \frac{3}{4}, \quad (3.4)$$

приходим к системе уравнений

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \vec{x}) = 2\vec{\tau} \cdot \vec{p} \varphi(t, \vec{x}), \quad (3.5)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - 2\vec{\tau} \cdot \vec{p} \right) [S_{ab}^2 - s(s-1)] \varphi = 0, \quad S_{ab} = \frac{1}{2} (1 + \Gamma_0^{(s)}) S_{ab}, \quad (3.6)$$

где  $\varphi$  —  $4s$ -компонентная волновая функция, связанная с  $\Psi$  соотношением

$$\varphi = \frac{1}{2} (1 + \Gamma_4^{(s)}) \Psi. \quad (3.7)$$

Матрицы  $S_{ab}$ , входящие в (3.6), согласно (2.5), (2.6), (2.9) имеют следующую структуру

$$S_{ab} = j_c + \tau_c, \quad [j_c, \tau_b]_- = 0, \quad (3.8)$$

где матрицы  $j_c$  с точностью до преобразований эквивалентности задаются соотношениями

$$[j_a, j_b]_- = ij_c, \quad j_a^2 = j(j+1) = s(s-1). \quad (3.9)$$

Уравнение (3.5), очевидно, описывает частицу с нулевой массой покоя. Неприводимые представления группы Пуанкаре II класса (для  $P_\mu P^\mu = 0$ ,  $P_\mu \neq 0$ ) задаются собственными значениями  $\varepsilon$  и  $\lambda$  инвариантных операторов знака энергии

$$\hat{\varepsilon} = \frac{P_0}{|P_0|} \text{ и спиральности } \Lambda = \sum_{a \neq b \neq c} \frac{J_{ab} P_c}{p}.$$

Покажем, что система уравнений (3.5), (3.6) описывает частицу со спиральностью  $\lambda = \pm s$ . Обозначим

$$S_{ab}^2 - s^2 = g. \quad (3.10)$$

Подставив (3.10) в (3.6) и используя (3.5), получаем после несложных преобразований

$$\begin{aligned} \left( i \frac{\partial}{\partial t} - 2\vec{\tau} \cdot \vec{p} \right) g \varphi &\equiv \\ &\equiv \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial t} - 2\vec{\tau} \cdot \vec{p} \right) g - g \left( i \frac{\partial}{\partial t} - 2\tau \cdot \vec{p} \right) \right] \varphi = [g, 2\vec{\tau} \cdot \vec{p}]_- \varphi = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Принимая во внимание тождества

$$g\vec{\tau} \cdot \vec{p} + \vec{\tau} \cdot \vec{p}g = \vec{S} \cdot \vec{p}, \quad g^2 = S^2, \quad g\vec{S} \cdot \vec{p} = \vec{S} \cdot \vec{p}g, \quad (3.12)$$

получаем из (3.11)

$$\vec{S} \cdot \vec{p} \varphi = 2s\vec{\tau} \cdot \vec{p} \varphi. \quad (3.13)$$

Из (3.5), (3.13), (3.4) заключаем, что оператор знака энергии  $\hat{\varepsilon} = \frac{2\vec{\tau} \cdot \vec{p}}{p}$  имеет на множестве решений уравнений (3.5), (3.6) значения  $\varepsilon = \pm 1$ , а оператор спиральности  $\Lambda = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p}$  имеет при этом значения  $\Lambda = \pm s$ .

Следовательно, на решениях уравнений (3.5), (3.6) реализуется прямая сумма неприводимых представлений  $D^+(s) \oplus D^-(s)$  группы Пуанкаре, и их можно рассматривать как обобщение уравнений Вейля на случай частиц с произвольным спином. В § 9 мы покажем, что уравнения (3.5), (3.6)  $CP$ -,  $T$ -инвариантны, но  $C$ -,  $P$ -неинвариантны.

Рассмотрим примеры уравнений (3.5), (3.6) для  $s = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2$ .

а)  $s = \frac{1}{2}$ . В этом случае, согласно (3.8), (3.9)

$$S_a = \tau_a, \quad j_a = 0, \quad (3.14)$$

где  $\tau_a$  — матрицы размерности  $2 \times 2$ , удовлетворяющие (3.4). Подставив (3.14) в (3.5), (3.6), убеждаемся, что уравнение (3.6) обращается в тождество (если имеет место (3.5)), а (3.5) совпадает с уравнением Вейля

$$\rho_\mu p^\mu \varphi = 0, \quad (3.15)$$

где  $\rho_\mu$  — матрицы Паули

$$\rho_0 = I, \quad \rho_a = 2\tau_a. \quad (3.16)$$

б)  $s = 1$ . В этом случае матрицы  $\tau_a, j_b$ , удовлетворяющие (3.4), (3.8), (3.9), не умаляя общности, можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, & j_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ j_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & j_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Обозначив

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

и подставляя (3.17), (3.18) в (3.5), (3.13), приходим к системе уравнений для  $\varphi_\mu$

$$\text{rot } \vec{\varphi} = i \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{\varphi} = 0, \quad \varphi_0 = \text{const}, \quad (3.19)$$

где константа  $\varphi_0$ , не умаляя общности, может быть приравнена нулю.

Полагая в (3.19)  $\vec{\varphi} = \vec{H} - i\vec{E}$ , где  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  — векторы напряженности магнитного и электрического полей, приходим к уравнениям Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. Такая формулировка уравнений Максвелла была впервые предложена в [13].

в)  $s = 0$ . Уравнения для бесспиновых и безмассовых частиц могут быть получены из (3.5), (3.13), (3.17), если положить там  $s = 0$ . Используя обозначение (3.18), получаем в этом случае систему уравнений

$$\text{div } \vec{\varphi} = i \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \quad \text{grad } \varphi_0 = i \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}. \quad (3.20)$$

Уравнения (3.20) имеют решения вида

$$\varphi_\mu = k_\mu \varphi(\omega) e^{i(\vec{k}\vec{x} - i\omega t)}, \quad k_0 = \omega = \pm \sqrt{k_a^2}, \quad (3.21)$$

где  $\varphi(\omega)$  — произвольная функция, и описывают распространение продольной волны.

г)  $s = \frac{3}{2}$ . Выбирая матрицы  $\tau_a$  и  $j_b$  в виде

$$\begin{aligned}
 j_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & j_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 j_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \tau_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

и представляя волновую функцию  $\varphi$  в форме

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_\alpha = \begin{pmatrix} \varphi_\alpha^1 \\ \varphi_\alpha^2 \\ \varphi_\alpha^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.23)$$

получаем из (3.22), (3.23), (3.5), (3.6), (3.13) уравнение для  $\varphi_\alpha^2$

$$\text{rot } \vec{\varphi}_\alpha = i \frac{\partial \vec{\varphi}_\alpha}{\partial t}, \quad (3.24a)$$

$$(\rho_\mu)_{\alpha\alpha'} p^\mu \vec{\varphi}_{\alpha'} = 0. \quad (3.24б)$$

Таким образом, волновая функция  $\varphi_\alpha^a$  частицы с  $m = 0$  и  $s = \frac{3}{2}$ , удовлетворяет уравнению типа Максвелла (3.24a) по векторному индексу  $a$  и уравнению типа Вейля (3.24б) по спинорному индексу  $\alpha$ .

д)  $s = 2$ . Выберем матрицы  $\tau_a$  и  $j_b$  в виде

$$j_a = \hat{j}_a \otimes \hat{I}, \quad \tau_a = \frac{1}{2} I \otimes \rho_a, \quad (3.25)$$

где  $\hat{I}$  и  $I$  — двурядная и четырехрядная единичные матрицы,

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \rho_2 &= i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \rho_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
 \hat{j}_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}, & \hat{j}_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\hat{j}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Волновая функция  $\varphi(x)$  имеет, согласно (3.25), (3.20), 8 компонент  $\varphi_\alpha^k$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , причем матрицы  $\hat{j}_a$  действуют только на индекс  $k$ , а  $\rho_a$  — на индекс  $\alpha$ .

Из (3.5), (3.6), (3.18), (3.25) получаем уравнения для  $\varphi_\alpha^k$  в виде

$$(\rho_\mu)_{\alpha\alpha'} p^\mu \varphi_{\alpha'}^k = 0, \quad \frac{2}{3} (j_a)_{kk'} p_a \varphi_\alpha^{k'} = i \frac{\partial \varphi_\alpha^k}{\partial t}, \quad (3.27)$$

которые, в силу изложенного выше, могут быть интерпретированы как уравнения для безмассовых частиц со спином  $s = 2$ .

#### 4. Другие типы уравнений для частиц с нулевой массой

Как показано в [24], уравнение Вейля не является единственным возможным двухкомпонентным уравнением для безмассовых частиц со спином  $S = \frac{1}{2}$ . В [24] получены все неэквивалентные уравнения для таких частиц и исследованы их свойства относительно преобразований  $P, C, T$ .

Аналогичная ситуация имеет место и в случае частиц произвольного спина, т.е. уравнения (3.5), (3.6) не исчерпывают всех неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц. В настоящем параграфе мы получим все возможные (с точностью до эквивалентности) уравнения для частиц с  $m = 0$  и произвольным спином  $s$ .

Мы будем исходить из следующей системы  $8s$ -компонентных уравнений

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} \Psi, \quad (4.1)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \vec{p} \right) S_{ab}^2 \Psi = 0, \quad (4.2)$$

где  $\Psi(t, \vec{x})$  —  $8s$ -компонентная волновая функция,  $\alpha_a$  и  $S_{ab}$  — матрицы размерности  $8s \times 8s$

$$\alpha_a = i \begin{pmatrix} 0 & -2\tau_a \\ 2\tau_a & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab} & 0 \\ 0 & S_{ab} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

а матрицы  $S_{ab}$ ,  $\tau_a$  по-прежнему определяются соотношениями (3.4), (3.8), (3.9).

Уравнения (4.1), (4.2) пуанкаре-инвариантны. Генераторы группы  $P(1, 3)$  на множестве решений уравнений (4.1), (4.2) имеют вид

$$P_0 = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad (4.4)$$

$$J_{0a} = x_0 p_a - x_a P_0 + \frac{i}{2} \alpha_a + i \beta_a,$$

где

$$\beta_a = i \begin{pmatrix} 0 & -j_a \\ j_a & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_4 \begin{pmatrix} j_a & 0 \\ 0 & j_a \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = i \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

а матрицы  $j_a$  определены в (3.8), (3.9).

Повторяя почти дословно выкладки (3.10)–(3.13), нетрудно убедиться, что уравнение (4.2) может быть записано в следующей эквивалентной форме

$$\vec{S} \cdot \vec{p} \Psi = s \Gamma_4 \vec{\alpha} \cdot \vec{p}. \quad (4.6)$$

Из (4.4), (4.6) заключаем, что на множестве решений уравнений (4.1), (4.2) реализуется прямая сумма

$$D^+(s) \oplus D^-(-s) \oplus D^-(s) \oplus D^+(-s) \quad (4.7)$$

неприводимых представлений группы  $P(1,3)$ . Таким образом, уравнения (4.1), (4.2) неэквивалентны (3.5), (3.6).

Для получения всех других неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц произвольной спиральности воспользуемся тем фактом, что система (4.1), (4.2) не исчерпывает всех пуанкаре-инвариантных уравнений в представлении (4.4). Действительно, как и в случае  $s = \frac{1}{2}$  [24] помимо (4.2), на волновую функцию  $\Psi$  можно наложить одно из следующих инвариантных дополнительных условий

$$L_1 \Psi \equiv \left(1 + \varepsilon \Gamma_4 \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \varepsilon' \Gamma_4 + \varepsilon \varepsilon' \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}\right) \Psi = 0, \quad (4.8)$$

$$L_2 \Psi \equiv (1 + \varepsilon \Gamma_4) \Psi = 0, \quad (4.9)$$

$$L_3 \Psi \equiv \left(1 + \varepsilon \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}\right) \Psi = 0, \quad (4.10)$$

$$L_4 \Psi \equiv \left(1 + \varepsilon \Gamma_4 \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}\right) \Psi = 0, \quad (4.11)$$

$$L_5 \Psi \equiv \left(-3 + \varepsilon \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \varepsilon' \Gamma_4 + \varepsilon \varepsilon' \Gamma_4 \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}\right) \Psi = 0, \quad (4.12)$$

где

$$\hat{\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{p}, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1. \quad (4.13)$$

Уравнения (4.8)–(4.12) пуанкаре-инвариантны, поскольку операторы  $\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}$  и  $\Gamma_4$  (а значит, и  $L_1, \dots, L_5$ ) коммутируют со всеми генераторами (4.4) группы  $P(1,3)$ . С другой стороны, эти уравнения исчерпывают все возможные с точностью до эквивалентности пуанкаре-инвариантные дополнительные условия, которые можно наложить на решения системы (4.1), (4.2). Действительно, операторы  $L_n$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} L_1 &= 4P_1^\varepsilon P_2^{\varepsilon'}, & L_2 &= 2P_1^\varepsilon, & L_3 &= 2P_2^\varepsilon, & L_4 &= 2 \left( P_1^\varepsilon P_2^{\varepsilon'} + P_1^{-\varepsilon} P_2^{-\varepsilon'} \right), \\ L_5 &= 4 \left( P_1^{-\varepsilon} P_2^{-\varepsilon'} + P_1^{-\varepsilon} P_2^{\varepsilon'} + P_1^\varepsilon P_2^{-\varepsilon'} \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $P_1^\varepsilon$  и  $P_2^{\varepsilon'}$  — операторы проектирования на подпространства  $D^\varepsilon(s) \oplus D^\varepsilon(-s)$  и  $D^+(\varepsilon's) \oplus D^-(\varepsilon's)$  соответственно

$$P_1^\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \varepsilon \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}\right), \quad P_2^{\varepsilon'} = \frac{1}{2} \left(1 + \varepsilon' \Gamma_4 \vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}}\right). \quad (4.15)$$

Из (4.7), (4.14), (4.15) следует, что на решениях уравнений (4.1), (4.2) с одним из дополнительных условий (4.8)–(4.12) реализуются следующие представления группы  $P(1, 3)$

$$D^{-\varepsilon}(\varepsilon' s) D^{-\varepsilon}(-\varepsilon' s) \oplus D^{\varepsilon}(-\varepsilon' s), \quad (4.16)$$

$$D^{-\varepsilon}(s) \oplus D^{\varepsilon}(-s), \quad (4.17)$$

$$D^{-\varepsilon}(s) \oplus D^{-\varepsilon}(-s), \quad (4.18)$$

$$D^{+}(-\varepsilon s) \oplus D^{-}(-\varepsilon s), \quad (4.19)$$

$$D^{\varepsilon}(\varepsilon' s). \quad (4.20)$$

Нетрудно убедиться, что формулы (4.7), (4.16)–(4.20) исчерпывают все возможные невырожденные прямые суммы неприводимых представлений  $D^{\varepsilon}(\varepsilon' s)$  группы  $P(1, 3)$ , откуда и следует вывод, что уравнения (4.1), (4.2) с одним из дополнительных условий (4.8)–(4.12) (или без дополнительных условий) исчерпывают все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские уравнения для безмассовой частицы с произвольным спином  $s$ .

Исследуем свойства полученных уравнений относительно преобразований  $P$ ,  $C$  и  $T$ . Для этого воспользуемся следующей схемой [24]

$$\begin{array}{ccc}
 D^{+}(s) & \xleftrightarrow{P} & D^{+}(-s) \\
 \uparrow C & \swarrow & \searrow C \\
 & & \\
 D^{-}(s) & \xleftrightarrow{P} & D^{-}(-s)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 D^{\varepsilon}(s) & \xleftrightarrow{T} & D^{\varepsilon}(-s)
 \end{array}$$

где символ  $D^{+}(s) \xleftrightarrow{P} D^{+}(-s)$  означает, что операция пространственной инверсии преобразует пространство неприводимого представления  $D^{\varepsilon}(s)$  в пространство представления  $D^{\varepsilon}(-s)$  и т.д.

Из (4.7), (4.16)–(4.20) заключаем, что уравнения (4.1), (4.2)  $P$ -,  $C$ -,  $T$ -инвариантны; уравнения (4.1), (4.2) с дополнительным условием (4.8)  $T$ -инвариантны, но  $C$ -,  $P$ -,  $CP$ -неинвариантны; уравнения (4.1), (4.2), (4.9)  $T$ -,  $CP$ -инвариантны, но  $C$ -,  $T$ -неинвариантны; уравнения (4.1), (4.2), (4.10)  $P$ -,  $T$ -инвариантны, но  $C$ -неинвариантны; уравнения (4.1), (4.2), (4.11)  $C$ -,  $T$ -инвариантны, но  $P$ -неинвариантны; наконец, уравнения (4.1), (4.2), (4.12)  $T$ -инвариантны, но  $P$ -,  $C$ -,  $CP$ -неинвариантны.

Отметим, что уравнения (4.1), (4.2) с одним из дополнительных условий (4.8), (4.11) или (4.12) — неинвариантны относительно преобразований  $PCT$  и  $PT$ . Этот факт не противоречит известной  $CPT$ -теореме Паули–Людерса, поскольку дополнительные условия (4.8), (4.11), (4.12) в  $x$ -пространстве нелокальны.

В заключение этого раздела приведем явный вид всех возможных неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц со спином  $s = 1$ . Выбирая матрицы  $\tau$  и  $j_a$  из (4.3), (3.8) в форме (3.17) и представляя волновую функцию  $\Psi$  в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

а  $\varphi_\mu$  и  $\chi_\mu$  — однокомпонентные функции, приходим, согласно (4.1), (4.2), (4.6) к уравнениям для  $\varphi$  и  $\chi$  в форме

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\varphi} &= -\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t}, & \text{rot } \vec{\chi} &= -\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{\varphi} &= 0, & \text{div } \vec{\chi} &= 0, & \varphi_0 &= c_1, & \varphi_2 &= c_2, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — константы, которые, не умаляя общности, можно считать равными нулю.

Уравнения (4.23) совпадает с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля в вакууме.

Найдем теперь явный вид дополнительных условий (4.8)–(4.13), которые можно наложить на решения уравнений (4.23), не нарушив их ковариантности. Подставив (3.8), (3.17), (4.3) в (4.8)–(4.13), получаем

$$p(\vec{\varphi} - i\varepsilon' \vec{\chi}) = -\varepsilon \text{rot}(\vec{\varphi} - i\varepsilon' \vec{\chi}), \quad (4.24)$$

$$\vec{\varphi} = i\varepsilon \vec{\chi}, \quad (4.25)$$

$$\text{rot } \vec{\varphi} = i\varepsilon p \vec{\chi}, \quad \text{rot } \vec{\chi} = -i\varepsilon p \vec{\varphi}, \quad (4.26)$$

$$\text{rot } \vec{\varphi} = -\varepsilon p \vec{\varphi}, \quad \text{rot } \vec{\chi} = -\varepsilon p \vec{\chi}, \quad (4.27)$$

$$p(-\vec{\varphi} + i\varepsilon' \vec{\chi}) = -\varepsilon \text{rot}(\vec{\varphi} - i\varepsilon' \vec{\chi}), \quad p(\vec{\varphi} + i\varepsilon' \vec{\chi}) = 0. \quad (4.28)$$

Таким образом, *помимо уравнений Максвелла (4.23), для безмассовых частиц со спином 1 существует еще пять типов пуанкаре-инвариантных уравнений, которые имеют вид (4.23) с одним из дополнительных условий (4.24)–(4.28)*. Подчеркнем, что все дополнительные условия (4.24)–(4.28), за исключением (4.26), в  $x$ -пространстве имеют форму нелокальных (интегро-дифференциальных) уравнений. Отметим также, что уравнения (4.23), (4.26) эквивалентны (3.19).

### 5. Конечные преобразования операторов координаты и спина

Задание явного вида генераторов  $Q_p \in \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$  группы Пуанкаре однозначно определяет закон преобразования волновой функции при переходе к новой инерциальной системе координат

$$\Psi(t, \vec{x}) \rightarrow \Psi'(t, \vec{x}) = \exp(iQ_I \theta_I) \Psi(t, \vec{x}), \quad (5.1)$$

где  $\theta_I$  — параметры преобразования. При этом операторы  $\vec{N}$  физических величин (координаты, спина, импульса и т.д.) преобразуются следующим образом

$$\hat{N} \rightarrow \hat{N}' = \exp(iQ_I \theta_I) \hat{N} \exp(-iQ_I \theta_I). \quad (5.2)$$

Формула (5.2) в принципе дает исчерпывающий ответ о связи операторов динамических переменных в старой и новой системе координат и в случае, когда

генераторы  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  имеют локально ковариантную форму (2.2), конкретные вычисления с использованием (5.2) не вызывают никаких затруднений. Однако в представлении типа (1.1), (1.20), когда генераторы  $J_{0a}$  невозможно записать в виде суммы коммутирующих “спиновой” и “орбитальной” частей, вычисление явного вида преобразованных операторов  $\hat{N}'$  является нетривиальной задачей. В этом параграфе получен закон преобразований операторов координаты и спина частицы генерируемых операторами (1.1), (1.20) при  $k_1 = 2$ ,

$$P_0 = \sigma_1 m + 2\sigma_3 \vec{S} \cdot \vec{p} + (\sigma_1 - i\sigma_2) \frac{p^2 - 4(\vec{S} \cdot \vec{p})^2}{2m}, \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad (5.3)$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, P_0]_+,$$

где  $S_{ab}$  — матрицы, определенные в (1.2).

Тем самым решена задача для произвольного представления вида (1.1), (1.9), (1.20), поскольку генераторы (5.3) и (1.1), (1.9), (1.20) связаны преобразованием эквивалентности  $P_\mu \rightarrow V P_\mu V^{-1}$ ,  $J_{\mu\nu} \rightarrow V J_{\mu\nu} V^{-1}$ , где

$$V = \exp \left[ (\sigma_1 - i\sigma_2)(2 - k_1) \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{2m} \right] = 1 + (\sigma_1 - i\sigma_2)(2 - k_1) \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{2m}. \quad (5.4)$$

Генераторы  $J_{ab}$  (5.3) имеют явно ковариантную форму, следовательно, при трехмерных поворотах системы координат операторы  $x_a$  и  $S_{ab} = S_c$  преобразуются обычным образом (как векторы)

$$x'_a = x_a \cos \theta + \frac{1}{\theta} (x_b \theta_c - x_c \theta_b) \sin \theta, \quad (5.5)$$

$$S'_{ab} = S_{ab} \cos \theta - \frac{1}{\theta} S_{cd} \theta_d \sin \theta, \quad (a, b, c) \text{ — цикл } (1, 2, 3),$$

где  $\theta_a$  — параметры поворота,  $\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}$ .

Чтобы найти в явном виде закон конечных преобразований (5.2)  $x_a$  и  $S_{ab}$ , генерируемых операторами  $J_{0a}$ , воспользуемся тождеством Хаусдорфа–Камбела

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{A, B\}^n}{n!}, \quad \{A, B\}^n = [A, \{A, B\}^{n-1}]_-, \quad \{A, B\}^0 = B. \quad (5.6)$$

Принимая во внимание тот факт, что генераторы  $J_{0a}$  (5.3) на решениях уравнения (0.1) могут быть представлены в форме

$$J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + \eta_a, \quad (5.7)$$

где

$$\eta_a = -\frac{1}{2}[P_0, x_a]_- = i\sigma_3 S_a + \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2m} \left( i p_a - 2i[S_a, \vec{S} \cdot \vec{p}]_+ \right), \quad (5.8)$$

$$p_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0} = i \frac{\partial}{\partial t},$$

и полагая  $B_a = x_a$ ,  $A = iJ_{0b}v_b$ , где  $J_{0b}$  — генераторы (5.7), а  $v_b$  — параметры преобразования Лоренца, получаем по индукции

$$\{A, B\}^n = \frac{v_a(x_b v_b)v^n}{v^n} - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} \left( \frac{v_a(S_b v_b)v_n}{v^2} + D_n \right), \quad n = 2k, \quad (5.9)$$

$$\{A, B\}^n = x_0 \frac{x_a}{v} v^n + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{2m} \left( \frac{v_a}{v} v^n - 2D_n \right), \quad n = 2k + 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.10)$$

где

$$D_n = [S_b v_b, D_{n-1}]_+, \quad D_1 = [S_a, S_b v_b]_+, \quad v = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.9)–(5.11) в (5.6) и используя тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} D_n = \left[ S_a \operatorname{ch} v - i \frac{S_{ab} v_b}{v} \operatorname{sh} v - \frac{v_a(S_b v_b)}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) \right] \exp(2S_b v_b) - S_a, \quad (5.12)$$

получаем закон преобразования  $x_a$  в виде

$$\begin{aligned} x'_a = & x_a + \frac{v_a(x_b v_b)}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) - x_0 \frac{v_a}{v} \operatorname{sh} v + \\ & + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} \left\{ \frac{v_a(S_b v_b)}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) + \frac{1}{2} \frac{v_a}{v} \operatorname{sh} v + S_a - \right. \\ & \left. - \left[ S_a \operatorname{ch} v + i \frac{(\vec{S} \times \vec{v})_a}{v} \operatorname{sh} v - \frac{v_a(S_b v_b)}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) \right] \exp(2S_b v_b) \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Формула (5.13) задает искомый явный вид преобразованного оператора  $x'_a$ , поскольку входящая в (5.13) экспонента  $\exp(2S_b v_b)$  всегда может быть представлена в виде конечного ряда по степеням  $(S_b v_b)^n$

$$\exp(2S_b v_b) \equiv \sum_{\nu=-s}^s [\operatorname{ch}(2\nu v) + \operatorname{sh}(2\nu v)] \Lambda_\nu, \quad (5.14)$$

где  $\Lambda_\nu$  — операторы проектирования на подпространство собственных функций оператора  $S_b v_b$  [4]

$$\Lambda_\nu = \prod_{\mu \neq \nu} \frac{\frac{1}{v} S_b v_b - \mu}{\nu - \mu}, \quad \nu, \mu = -s, -s + 1, \dots, s. \quad (5.15)$$

Обратимся теперь к закону преобразования  $x_0$ . Полагая  $B = x_0$ ,  $A = iJ_{0b}v_b$ , получаем для (5.6) по индукции

$$\{A, B\}^n = x_0 v^n - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{2m} [(2S_b v_b)^n - v_n], \quad n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.16)$$

$$\{A, B\}^n = \frac{x_b v_b}{v} v^n - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{2m} [(2S_b v_b)^n - v^{n-1}(2S_b v_b)], \quad n = 2k + 1. \quad (5.17)$$

Подставив (5.16), (5.17) в (5.6), приходим к формуле

$$x'_0 = x_0 \operatorname{ch} v + \frac{(x_b v_b)}{v} \operatorname{sh} v - \frac{i\sigma_1 + \sigma_1}{2m} \left[ \exp(2S_b v_b) - \operatorname{ch} v - \frac{2S_b v_b}{v} \operatorname{sh} v \right]. \quad (5.18)$$

Из (5.13) и (5.18) видно, что  $x_\mu$  преобразуются по закону, отличному от преобразований Лоренца для четырех вектора; при этом величина интервала  $x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_a^2$  не сохраняется. Следовательно,  $x_\mu$  нельзя интерпретировать как инвариантный оператор координаты частицы.

Зная закон преобразования операторов  $x_\mu$ , нетрудно найти, как преобразуются операторы  $S_{ab}$ . Используя тождества

$$\begin{aligned} J'_{ab} &= \exp(iJ_{0c}v_c)J_{ab}\exp(-iJ_{0c}v_c) = \\ &= J_{ab}\operatorname{ch}v + \frac{v_c}{2v^2}(\varepsilon_{\alpha kc}J_{\alpha k}v_c)(\operatorname{ch}v - 1) + \frac{J_{0a}v_b - J_{0b}v_a}{v}\operatorname{sh}v, \\ p'_a &= p_a + \frac{v_a(p_b v_b)}{v^2}(\operatorname{ch}v - 1) + p_0 \frac{v_a}{v}\operatorname{sh}v \end{aligned} \quad (5.19)$$

получаем из (5.3), (5.13)

$$\begin{aligned} S'_{ab} &= \exp(iJ_{0c}v_c)S_{ab}\exp(-iJ_{0c}v_c) = J'_{ab} - x'_a p'_b + x'_b p'_a = \\ &= S_{ab}\operatorname{ch}v + \frac{v_c(S_d v_d)}{v^2}(\operatorname{ch}v - 1) + \frac{\eta_a v_b - \eta_b v_a}{v}\operatorname{sh}v + \\ &+ \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} \left[ \frac{S_{cd}v_d}{v^2}(p_b v_b) + (p_a v_b - v_a p_b) \frac{\varepsilon_{\alpha kl} v_l S_{\alpha k}}{2v^2} \right] (\operatorname{ch}v - 1) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(p_a v_b - v_a p_b)}{v}\operatorname{sh}v + S_{cd}p_d + \frac{S_{cd}v_d}{v}p_0\operatorname{sh}v - \left[ S_{cd}p_d\operatorname{ch}v + \right. \\ &+ \frac{S_{cd}v_d(v_c p_c)}{v^2}\operatorname{ch}v(\operatorname{ch}v - 1) + S_{cd}v_d p_0\operatorname{sh}v\operatorname{ch}v + \frac{i}{v}(S_{ac}v_c p_b - \\ &- S_{bc}v_c p_a)\operatorname{sh}v + \frac{i}{v^2}(S_{ac}v_c v_b - S_{bc}v_c v_a)(\operatorname{sh}v(\operatorname{ch}v - 1) + \operatorname{sh}^2 v p_0) - \\ &\left. - \frac{1}{2v^2}(v_a p_b - v_b p_a)\varepsilon_{kl n} S_{kl} v_n (\operatorname{ch}v - 1) \right] \exp(2S_b v_b), \quad S_d = \frac{1}{2}\varepsilon_{dkc} S_{kc}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

где  $\eta_a$  — оператор, заданный в (5.8),  $(a, b, c)$  — цикл  $(1, 2, 3)$ . Как видно из (5.20),  $S_{ab}$  преобразуется по закону, отличному от преобразований Лоренца для тензора второго ранга.

Определим ковариантные операторы координаты и спина частицы. Для этого перейдем к представлению, в котором генераторы группы Пуанкаре имеют локально ковариантную форму

$$\hat{J}_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad \hat{P}_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = p_\mu, \quad S_{0a} = \frac{i}{2}\sigma_3 \varepsilon_{abc} S_{bc}, \quad (5.21)$$

что достигается посредством преобразования

$$J_{\mu\nu} \rightarrow \hat{J}_{\mu\nu} = \hat{V} J_{\mu\nu} \hat{V}^{-1}, \quad (5.22)$$

где  $J_{\mu\nu}$  — генераторы (5.3), а

$$\hat{V} = \exp \left[ \frac{(\sigma_1 - i\sigma_2)}{2m} (2\vec{S} \cdot \vec{p} - p_0) \right]. \quad (5.23)$$

В представлении (5.21) ковариантные операторы координаты и спина, очевидно, можно выбрать в форме

$$\hat{X}_\mu = x_\mu, \quad \hat{S}_{\mu\nu} = s_{\mu\nu}. \quad (5.24)$$

С помощью преобразования, обратного (5.22), получаем явный вид этих операторов в представлении (5.3)

$$X_\mu = \hat{V}^{-1} \hat{X}_\mu \hat{V} = x_\mu + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} \xi_\mu, \quad \xi_a = S_{ab}, \quad \xi_0 = 1, \quad (5.25)$$

$$S_{ab} = \hat{V}^{-1} \hat{S}_{ab} \hat{V} = S_{ab} + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} S_{cd} p_d, \quad (5.26)$$

$$S_{0a} = i\sigma_3 S_{bc} - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} \left[ \vec{S} \cdot \vec{p} - p_0, S_{bc} \right]_+.$$

При переходе к новой инерциальной системе координат операторы  $X_\mu$  и  $S_{\mu\nu}$  преобразуются как ковариантные четырехвектор и тензор второго ранга

$$X'_a = X_a + \frac{v_a(v_b X_b)}{v^2} (\text{ch } v - 1) + \frac{v_a}{v} X_0 \text{sh } v, \quad (5.27)$$

$$X'_0 = X_0 \text{ch } v + \frac{X_b v_b}{v} \text{sh } v,$$

$$S'_{ab} = S_{ab} \text{ch } v + \frac{v_c(\varepsilon_{dkl} S_{dk} v_l)}{v^2} (\text{ch } v - 1) + \frac{(S_{0a} v_b - S_{0b} v_a) \text{sh } v}{v}, \quad (5.28)$$

$$S'_{0a} = S_{0a} \text{ch } v + \frac{v_a(S_{0b} v_b)}{v^2} (\text{ch } v - 1) + \frac{S_{ab} v_b}{v} \text{sh } v.$$

Операторы  $S_{\mu\nu}$ , очевидно, удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры  $O(1, 3)$ , а операторы  $X_\mu$  — каноническим перестановочным соотношениям

$$[p_\mu, X_\nu]_- = i g_{\mu\nu}, \quad [X_\mu, X_\nu]_- = 0. \quad (5.29)$$

Все это позволяет сделать вывод, что операторы  $X_\mu$  и  $S_{\mu\nu}$  (5.25), (5.26) можно интерпретировать как ковариантные операторы координаты и спина частицы.

В случае  $s = \frac{1}{2}$  операторы (5.25) принимают явно ковариантную форму

$$X_\mu = x_\mu + \frac{i}{2m} (1 + \gamma_4) \gamma_\mu, \quad (5.30)$$

где

$$\gamma_4 = \sigma_3, \quad \gamma_a = -2i\sigma_2 S_a, \quad \gamma_0 = \sigma_1 \quad (5.31)$$

матрицы Дирака.

В силу изложенного выше оператор (5.30) может быть выбран в качестве ковариантного оператора координаты дираковской частицы. Интересно отметить, что при таком определении оператор скорости

$$\dot{X}_\mu = -i[H_{\frac{1}{2}}, X_\mu]_- = (1 + \gamma_4) \gamma_0 \frac{p_a}{m}, \quad (5.32)$$

где  $H_{\frac{1}{2}}$  — гамильтониан Дирака

$$H_{\frac{1}{2}} = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 m \quad (5.33)$$

имеет сплошной спектр.

Подчеркнем, что полученный нами оператор (5.30) принципиально отличается от операторов координаты, предложенных Ньютоном и Вигнером [16] и Фолди и Вуйтхайзенем [17]. Это отличие состоит в том, что оператор (5.30) локален и преобразуется как ковариантный четырехвектор, в то время как операторы координаты, предложенные в [16, 17], принадлежат классу нелокальных интегральных операторов с нековариантным законом преобразования при переходе к новой инерциальной системе отсчета.

## 6. Обобщение на случай частицы во внешнем электромагнитном поле

Полученные нами уравнения движения свободных частиц произвольного спина допускают непротиворечие обобщение на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Ниже будет осуществлено такое обобщение, и будет показано, что при этом не возникает парадоксов с нарушением причинности, которые имеют место в других релятивистских уравнениях для частиц со спином [1–3, 18].

Будем исходить из системы уравнений первого порядка (2.19) или (2.20). Можно показать, что введение минимального электромагнитного взаимодействия непосредственно в уравнения (2.19) или в явно ковариантную систему (2.20) приводит к тому, что как уравнения (2.19), так и уравнения (2.20), становятся несовместными. Чтобы преодолеть эту трудность, мы запишем (2.19) в виде единого уравнения

$$\left[ \left( i \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}_s \right) \hat{P}_s + \varkappa(1 - \hat{P}_s) \right] \Psi(t, \vec{x}) = 0, \quad (6.1)$$

где  $\varkappa$  — произвольный параметр. Эквивалентность (6.1) и (2.19) следует из соотношений

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{H}_s, \hat{P}_s \right]_- = 0, \quad \hat{P}_s \cdot \hat{P}_s = \hat{P}_s. \quad (6.2)$$

Явноковариантная система (2.20) также может быть представлена в виде одного уравнения

$$\left[ B_s \left( \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu - m \right) + \varkappa(1 - B_s) \right] \Psi = 0, \quad (6.3)$$

$$B_s = \frac{1}{8ms} \left( \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu + m \right) \left( 1 + \Gamma_4^{(s)} \right) (S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 2s(s-1)),$$

поскольку

$$\left[ B_s, \left( \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu - m \right) \right]_- \Psi = 0, \quad B_s \cdot B_s = B_s. \quad (6.4)$$

Сделаем в (6.1) и (6.3) замену  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ , где  $A_\mu$  — вектор-потенциал электромагнитного поля, и покажем, что такая замена позволяет получить систему уравнений первого порядка, описывавших движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Поскольку уравнения (6.1) и (6.3) после замены  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu$  в конечном итоге приводят к одинаковым результатам, мы рассмотрим только уравнение (6.1), которое принимает вид

$$\left[ (\pi_0 - \mathcal{H}_s(\vec{\pi})) \hat{P}(\vec{\pi}) + \varkappa(1 - \hat{P}_s(\vec{\pi})) \right] \Psi(t, \vec{x}) = 0, \quad (6.5)$$

где

$$\mathcal{H}_s(\vec{\pi}) = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m, \quad \hat{P}_s(\vec{\pi}) = P_s + \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \frac{\left[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, P_s\right]_-}{2m}. \quad (6.6)$$

Умножив (6.5) на  $\hat{P}_s(\vec{\pi})$  и  $\left(1 - \hat{P}_s(\vec{\pi})\right)$  и используя тождества

$$\left[\pi_0 - \mathcal{H}_s(\vec{\pi}), \hat{P}_s(\vec{\pi})\right]_- \hat{P}_s(\vec{\pi}) = \frac{1}{4m}\Gamma_0^{(s)}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F^{\mu\nu}\hat{P}_s(\vec{\pi}), \quad (6.7)$$

$$F^{\mu\nu} = -i[\pi^\mu, \pi^\nu]_-, \quad \hat{P}_s(\vec{\pi}) \cdot \hat{P}_s(\vec{\pi}) = \hat{P}_s(\vec{\pi})$$

приходим к системе уравнений

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left\{\Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m + eA_0 + \frac{1}{2m}\Gamma_0^{(s)}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F^{\mu\nu}\right\}\Psi \equiv \mathcal{H}_s(\vec{\pi}, \pi_0)\Psi, \quad (6.8)$$

$$\left(P_s + \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \frac{\left[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, P_s\right]_-}{2m}\right)\Psi = \Psi, \quad (6.9)$$

которую, как и (2.19), можно записать в эквивалентной явно ковариантной форме

$$\left[\left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu - m\right) + \frac{1}{m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu\Gamma_\nu\right)F^{\mu\nu}\right]\Psi = 0, \quad (6.10)$$

$$\left(m + \Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu\right)\left(1 - \Gamma_\mu^{(s)}\right)\left[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 2s(s-1)\right]\Psi = 8ms\Psi. \quad (6.11)$$

Покажем, что уравнения (6.8), (6.9) (или (6.10), (6.11)) не приводят к парадоксам с нарушением причинности. Для этого преобразуем (6.10), (6.11) к такой форме, чтобы каждое решение системы удовлетворяло уравнению Фейнмана–Гелл–Манна, которое, как известно [19], описывает причинное распространение волн. Это достигается переходом к новой волновой функции

$$\Psi(t, \vec{x}) = V\Phi(t, \vec{x}), \quad (6.12)$$

где  $V$  — обратимый оператор

$$V = 1 + \frac{\lambda^-}{m}\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, \quad V^{-1} = 1 - \frac{\lambda^-}{m}\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, \quad \lambda^\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \Gamma_4^{(s)}\right). \quad (6.13)$$

Подставив (6.12), (6.13) в (6.9), (6.10) и используя тождество

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu\right)^2 = \pi_\mu\pi^\mu + i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}F^{\mu\nu} \quad (6.14)$$

получаем уравнения для  $\Phi(t, \vec{x})$

$$\left[\lambda^+ \left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu + \frac{1}{sm}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{m}\pi_\mu\pi^\mu\right) - m\right]\Phi(t, \vec{x}) = 0, \quad (6.15)$$

$$P_s \Phi = \Phi \quad \text{или} \quad S_{ab}^2 \Phi = s(s+1)\Phi. \quad (6.16)$$

Наконец, умножив (4.15) слева на оператор

$$F = m + \left( \Gamma_\mu^{(s)} \pi^\mu - \frac{1}{sm} \check{S}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{m} \pi_\mu \pi^\mu \right) \lambda^-, \quad (6.17)$$

где

$$\check{S}_{ab} = S_{ab}, \quad \check{S}_{0a} = iS_{bc}, \quad (a, b, c) \text{ — цикл } (1, 2, 3) \quad (6.18)$$

приходим к уравнению

$$\left( \pi_\mu \pi^\mu - m^2 - \frac{1}{2s} S_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \Phi(t, \vec{x}) = 0. \quad (6.19)$$

Формулы (6.16), (6.18), (6.19) задают уравнение Фейнмана–Гелл–Манна для частицы с произвольным спином. Решения  $\Phi(t, \vec{x})$  этого уравнения описывают причинное распространение волн с досветовой скоростью [19]. Таковы же, очевидно, свойства решений  $\Psi(t, \vec{x})$  уравнений (6.8), (6.9) и (6.10), (6.11), связанных с  $\Phi(t, \vec{x})$  преобразованием эквивалентности (6.12).

К этому результату можно прийти и другим путем, воспользовавшись критерием Вайтмана [20]. Умножив (6.10) на  $(\Gamma_\mu \pi^\mu + m)$ , получаем уравнение

$$(p_\mu p^\mu + B)\Psi = 0, \quad (6.20)$$

где  $B$  — дифференциальный оператор, содержащий производные не выше первого порядка и равный в отсутствие взаимодействия  $-m^2$ . Как показано в [20], это означает, что  $\Psi(t, \vec{x})$  описывает распространение волн с досветовой скоростью.

Таким образом, мы установили, что уравнения (6.10), (6.11) описывают движение заряженной релятивистской частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле и не приводят к парадоксам с нарушением причинности.

Отметим еще, что уравнения (2,20) могут быть получены из принципа наименьшего действия, если плотность лагранжиана выбрать в виде

$$L(x) = \left( m \bar{\Psi}' + i \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial x_\mu} \hat{\Gamma}_\mu^{(s)} \right) \left( 1 + \check{\Gamma}_4^{(s)} \right) \times \\ \times \left[ \check{S}_{\mu\nu} \check{S}^{\mu\nu} - 2s(s-1) \right] i \check{\Gamma}_\lambda^{(s)} \frac{\partial \Psi'}{\partial x_\lambda} + 8ms^2 \bar{\Psi}' \Psi', \quad (6.21)$$

где  $\Psi'$ ,  $\bar{\Psi}'$  —  $16s$ -компонентная волновая функция

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}' = \Psi'^+ i \check{\Gamma}_0^{(s)} \check{\Gamma}_5^{(s)}, \quad (6.22)$$

а  $\check{\Gamma}_\mu^{(s)}$ ,  $\check{S}_{\mu\nu}$  — матрицы размерности

$$\check{\Gamma}_k^{(s)} = \begin{pmatrix} \Gamma_k^{(s)} & 0 \\ 0 & \Gamma_k^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \check{\Gamma}_0^{(s)} = \begin{pmatrix} \Gamma_0^{(s)} & 0 \\ 0 & -\Gamma_0^{(s)} \end{pmatrix}, \\ \check{\Gamma}_5^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_0^{(s)} \\ \Gamma_0^{(s)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{S}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$

При этом для функции  $\Psi(t, \vec{x})$  получаем уравнения (2.20), а для  $\chi(t, \vec{x})$  — уравнения, комплексно сопряженные с (2.20). Сделав в (6.21) минимальную замену  $-i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x_\mu} - eA_\mu$ , приходим к уравнению (6.10), (6.11). Таким образом, уравнения (6.10), (6.11) допускают лагранжеву формулировку.

### 7. Разложение по степеням $\frac{1}{m}$

Гамильтониан  $\mathcal{H}_s(\vec{\pi}, \vec{\pi}_0)$  (6.8) может иметь как положительные, так и отрицательные собственные значения. Мы получим из (6.8), (6.9) уравнение для состояний с положительной энергией с помощью серии последовательных приближенных преобразований, подобно тому, как это было сделано Фолди и Вуйтхайзенем [17] для уравнения Дирака. При этом гамильтониан частицы с произвольным спином будет представлен в виде ряда по степеням  $\frac{1}{m}$ , удобным для вычислений по теории возмущения.

Основная трудность при диагонализации уравнений (6.8), (6.9) состоит в том, что необходимо найти преобразования одновременно приводящие к диагональной форме два различных уравнения. Мы диагоналируем сначала дополнительное условие (6.9), а затем, используя операторы, коммутирующие с преобразованным уравнением (6.9), приведем к диагональной форме уравнение (6.8).

Подвергнем волновую функцию  $\Psi(t, \vec{x})$  из (6.8), (6.9) преобразованию

$$\Psi \rightarrow \Psi' = V\Psi, \tag{7.1}$$

где  $V$  — обратимый оператор

$$\begin{aligned} V &= 1 + \frac{1}{2m} \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \left(\Gamma_a^{(s)}\pi_a - \Gamma_0^{(s)}k_1 S_a \pi_a\right), \\ V^{-1} &= 1 - \frac{1}{2m} \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \left(\Gamma_a^{(s)}\pi_a - \Gamma_0^{(s)}k_1 S_a \pi_a\right). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Поддействовав оператором (7.2) слева на (6.6), (6.7), получаем уравнения для  $\Psi'$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s(\vec{\pi}, A_0)\Psi' &= i \frac{\partial}{\partial t} \Psi', \\ \mathcal{H}'_s(\vec{\pi}, A_0) &= \Gamma_0^{(s)}m + k_1 \Gamma_4^{(s)}(\vec{S} \cdot \vec{\pi}) + \Gamma_0^{(s)} \left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right) \times \\ &\times \frac{1}{2m} \left(\pi^2 - k_1^2(\vec{S} \cdot \vec{\pi})^2 + \frac{1}{s} \vec{S}(\vec{H} - i(1 - k_1 s)\vec{E})\right) + eA_0, \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$P_s \Psi' = \Psi' \quad \text{или} \quad S_{ab} \Psi' = s(s+1)\Psi', \tag{7.4}$$

где  $H_a = -i[\pi_b, \pi_c]$  и  $E_a = -i[\pi_0, \pi_a]$  — напряженности магнитного и электрического полей,  $P_s$  — проектор, определенный в (2.18).

Из (7.4), (2.10), (2.11) заключаем, что, не умаляя общности, можно считать, что волновая функция  $\Psi'$  имеет  $2(2s+1)$  отличных от нуля компонент. Матрицы  $S_{ab}$  и коммутирующие с ними матрицы  $\Gamma_0^{(s)}, \Gamma_4^{(s)}$  на множестве таких функций всегда можно выбрать в виде

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} S_c & 0 \\ 0 & S_c \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0^{(s)} = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^{(s)} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

где  $S_c$  — матрицы, образующие представление  $D(s)$  алгебры  $O(3)$ ,  $I$  и  $0$  —  $(2s+1)$ -рядные единичная и нулевая матрицы. Подставив (7.5) в (7.3), получаем гамильтониан  $\mathcal{H}'_s(\vec{\pi}, A_0)$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_s(\vec{\pi}, A_0) = & \sigma_1 m + k_1 \sigma_3 (\vec{S} \cdot \vec{\pi}) + \\ & + (\sigma_1 - i\sigma_2) \frac{1}{2m} \left[ \pi^2 - k_1^2 (\vec{S} \cdot \vec{\pi})^2 + \frac{\vec{S}}{s} \cdot (\vec{H} - i(1 - k_1 s) \vec{E}) \right] + e A_0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Формула (7.6) обобщает гамильтониан свободной частицы произвольного спина (1.9) на случай взаимодействия с внешним электромагнитным полем. Таким образом, *используя явно ковариантные уравнения (6.10), (6.11), мы получили рецепт введения и взаимодействия в пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент, найденные в разделе 1.*

Задача о диагонализации системы (6.8), (6.9) сводится теперь к преобразованию гамильтониана (7.6) к диагональной форме. Как и в случае уравнения Дирака [17], такое преобразование можно осуществить только приближенно, для  $\pi_\mu \ll m$ . Используя для этой цели серию последовательности преобразований

$$\mathcal{H}'_s(\vec{\pi}, A_0) \rightarrow V_3 V_2 V_1 \mathcal{H}'_s(\vec{\pi}, A_0) V_1^{-1} V_2^{-1} V_3^{-1} = \mathcal{H}''_s(\vec{\pi}, A_0), \quad (7.7)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 = & \exp \left( -i \frac{\sigma_2}{m^3} \left\{ \frac{1}{12} (\vec{S} \cdot \vec{\pi})^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{8} \left[ \pi^2 - k_1^2 (\vec{S} \cdot \vec{\pi})^2 - \frac{\vec{S} \cdot \vec{H}}{s} + i \left( \frac{1}{s} - k_1 \right) \vec{S} \cdot \vec{E}, \pi_0 \right] \right\} \right), \\ V_2 = & \exp \left\{ \sigma_3 \frac{1}{4m^2} \left[ \pi^2 - k_1^2 (\vec{S} \cdot \vec{\pi})^2 - \frac{\vec{S} \cdot \vec{H}}{s} + i \left( \frac{1}{s} - k_1 \right) \vec{S} \cdot \vec{E} \right] \right\}, \\ V_3 = & \exp \left[ -i \sigma_2 \frac{k_1 (\vec{S} \cdot \vec{p})}{m} \right] \end{aligned} \quad (7.8)$$

и пренебрегая членами порядка  $\frac{1}{m^3}$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}''_s(\vec{\pi}, A_0) = & \sigma_1 \left( m + \frac{\pi^2}{2m} - e \frac{\vec{S} \cdot \vec{H}}{2sm} \right) + A_0 - \frac{1}{16m^2 s^2} \vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{\pi} - \vec{\pi} \times \vec{E}) - \\ & - \frac{1}{24m^2 s^2} \left[ \frac{1}{2} Q_{ab} \frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1) \operatorname{div} \vec{E} \right] + \\ & + \frac{i(2s-1)}{8m^2 s^2} \vec{S} \cdot (\vec{H} \times \vec{\pi} - \vec{\pi} \times \vec{H}) + \frac{1}{24m^2 s^2} Q_{ab} \frac{\partial H_a}{\partial x_b}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где  $Q_{ab}$  — тензор квадрупольного взаимодействия

$$Q_{ab} = 3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1). \quad (7.10)$$

На множестве функций, удовлетворяющих дополнительному условию  $\sigma_1 \Phi' = \Phi'$  гамильтониан (7.9) положительно определен и содержит слагаемые, соответствующие дипольному  $\left( -\frac{\vec{S} \cdot \vec{H}}{2sm} \right)$ , спин-орбитальному  $\left( -\frac{1}{16m^2 s^2} \vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{\pi} - \vec{\pi} \times \vec{E}) \right)$ ,

квадрупольному  $\left(-\frac{1}{48s^2m^2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b}\right)$  и дарвиновскому  $\left(-\frac{s(s+1)}{24s^2m^2}\operatorname{div}\vec{E}\right)$  взаимодействию частицы с полем. Два последние члена в (7.9) можно интерпретировать как магнитное спин-орбитальное и магнитное квадрупольное взаимодействия.

Приближенный гамильтониан (7.9) в точности совпадает с полученным в работе [21], в которой в качестве исходного уравнения использовалось уравнение Фейнмана–Гелл–Манна (6.19). В случае (7.9) совпадает с гамильтонианом Фолди и Вуйтхайзена [17], который является нерелятивистским пределом гамильтониана Дирака для электрона.

### 8. Релятивистская частица с произвольным спином в однородном магнитном поле

Рассмотрим систему уравнений (6.8), (6.9) для случая частицы в однородном магнитном поле. Не умаляя общности можно считать, что вектор напряженности этого поля  $\vec{H}$  параллелен третьей проекции импульса частицы  $p_3$ . Это означает, что компоненты тензора электромагнитного поля  $F^{\mu\nu}$  равны

$$F_{0a} = E_a = 0, \quad F_{23} = H_1, \quad F_{31} = H_2 = 0, \quad F_{12} = H_3 = H. \quad (8.1)$$

Из (8.1) следует, что  $\pi_\mu$  можно выбрать в виде

$$\pi_1 = p_1 - eHx_2, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3, \quad \pi_0 = i\frac{\partial}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Подставив (8.1), (8.2) в (6.6), (6.7) приходим к уравнениям

$$\mathcal{H}_s(\vec{\pi})\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad (8.3)$$

$$\mathcal{H}_s(\vec{\pi}) = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_0^{(s)}\vec{\pi}_a + \Gamma_0^{(s)}m + \frac{\Gamma_0^{(s)}}{2m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(i\left(\Gamma_1^{(s)}\Gamma_2^{(s)} - \frac{1}{s}S_{12}\right)H\right),$$

$$\hat{P}_s(\vec{\pi})\Psi \equiv \left\{P_s + \frac{1}{2m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, P_s\right]_-\right\}\Psi = 0. \quad (8.4)$$

Преобразуем  $\mathcal{H}_s(\vec{\pi})$  к такому виду, чтобы он содержал только коммутирующие величины. Это позволит нам, не решая уравнений движения (8.3), (8.4), определить спектр собственных значений гамильтониана (8.3).

Подвергнем волновую функцию  $\Psi$ , гамильтонианами  $\mathcal{H}_s(\vec{\pi})$  и проектор  $\hat{P}_s(\vec{\pi})$  преобразованию

$$\Psi \rightarrow \Psi' = V\Psi, \quad \mathcal{H}_s(\vec{\pi}) \rightarrow \mathcal{H}'_s(\vec{\pi}) = V\mathcal{H}_s(\vec{\pi})V^{-1}, \quad (8.5)$$

$$\hat{P}_s(\vec{\pi}) \rightarrow V\hat{P}_s(\vec{\pi})V^{-1} = \hat{P}'_s(\vec{\pi}),$$

где

$$V = \lambda^- + \frac{1}{\varepsilon}\lambda^+\Gamma_0^{(s)}\mathcal{H}_s(\vec{\pi}), \quad V^{-1} = \frac{1}{m}\left(\lambda^+\varepsilon + \mathcal{H}_s(\vec{\pi})\lambda^+\Gamma_0^{(s)}\right),$$

$$\varepsilon = \left(\pi^2 - \frac{1}{2}S_{12}H + m^2\right)^{1/2}, \quad \lambda^\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \Gamma_4^{(s)}\right).$$

Используя тождества

$$\lambda^-\Gamma_\mu^{(s)} = \Gamma_\mu^{(s)}\lambda^+, \quad (\lambda^\pm)^2 = \lambda^\pm, \quad \lambda^+\lambda^- = 0, \quad (8.6)$$

получаем

$$\mathcal{H}'_s(\vec{\pi}) = \Gamma_0^{(s)} \left( \pi^2 + m^2 - \frac{e}{s} S_{12} H \right)^{1/2}, \quad (8.7)$$

$$P_s \Psi' = \Psi' \quad \text{или} \quad S_{ab}^2 \Psi' = s(s+1) \Psi'. \quad (8.8)$$

Все операторы, входящие в определение (8.7) гамильтониана  $\mathcal{H}'_s(\vec{\pi})$ , коммутируют друг с другом и имеют такие собственные значения

$$\Gamma_0^{(s)} \Psi' = \varepsilon \Psi', \quad \varepsilon = \pm 1, \quad S_{12} H \Psi' = s_3 H \Psi', \quad s_3 = -s, -s+1, \dots, s, \quad (8.9)$$

$$\pi^2 \Psi' = [(2n+1)H + p_3^2] \Psi', \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

Формулы (8.9) следуют непосредственно из (2.4), (8.8), а соотношение (8.10) приведено, например, в [22].

Квадрат гамильтониана (8.7) и операторы (8.9), (8.10) имеют общую систему собственных функций  $\Psi'_{\varepsilon n s_3 p_3}$ . Отсюда заключаем, что собственные значения гамильтониана (8.7) равны

$$E_{\varepsilon n s_3 p_3} = \varepsilon \left[ m^2 + \left( 2n+1 - \frac{s_3}{s} \right) eH + p_3^2 \right]^{1/2}. \quad (8.11)$$

Соотношение (8.11) обобщает известную формулу [22] для уровней энергии электрона в однородном магнитном поле на случай частицы с произвольным спином  $s$ . Как видно из (8.11), значения энергии такой частицы действительны при любых  $s$ , в то время как уравнения Рариты–Швингера при решении аналогичной задачи приводят к комплексным значениям энергии [3].

Приведем для полноты явный вид собственных функций  $\Psi_{\varepsilon n s_3 p_3}$ . Выбирая матрицы  $\Gamma_\mu^{(s)}$ ,  $S_{ab}$  в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(s)} &= \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I} \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{I} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_a^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & -2\tau_a \\ 2\tau_a & 0 \end{pmatrix}, \\ S_{ab} &= \begin{pmatrix} S_{ab} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix}, \quad S_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab}^1 & 0 \\ 0 & S_{ab}^2 \end{pmatrix}, \quad \tau_a = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} S_{bc} - S_{4a} \right), \end{aligned} \quad (8.12)$$

где  $\hat{I}$  и  $\hat{0}$  —  $4s$ -рядные единичная и нулевая матрицы;  $S_{ab}$ ,  $S_{4a}$  — матрицы из представления  $D\left(s - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  алгебры  $O(4)$ , а  $S_{ab}^1$  и  $S_{ab}^2$  — матрицы, реализующие представления  $D(s)$  и  $D(s-1)$  алгебры  $O(3)$  соответственно, получаем

$$\Psi'_{\varepsilon n s_3 p_3} = \Psi_{n p_3} \begin{pmatrix} \Psi_{s_3} \\ \tilde{0} \\ \varepsilon \Psi_{s_3} \\ \tilde{0} \end{pmatrix}, \quad (8.13)$$

где  $\Psi_{s_3} - (2s + 1)$ -компонентная собственная функция оператора  $S_{12}$  (который всегда может быть выбран в диагональной форме)

$$\Psi_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{s-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Psi_{-s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.14)$$

$\tilde{0} - (2s - 1)$ -рядные нулевые столбцы и

$$\Psi_{np_3} = \exp(ip_1 x_1 + ip_3 x_3) \exp\left[-\frac{H}{2} \left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)^2\right] H_n\left[\sqrt{H} \left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)\right], \quad (8.15)$$

$H_n$  — полиномы Эрмита. Явный вид собственных функций исходного гамильтониана (8.8) может быть получен из (8.13)–(8.15) с помощью преобразования, обратного (8.5).

### 9. Четырехкомпонентное уравнение для бесспиновых частиц

Уравнения (2.20) определены для произвольных значений спина  $s$ , включая случай  $s = 0$ . При этой, однако, волновая функция  $\Psi$  имеет целых восемь компонент, и (2.20) не имеют никаких преимуществ перед хорошо известным пятикомпонентным уравнением Кеммера–Дэффина для безмассовых частиц.

В [24] было показано, что для описания свободной безмассовой частицы можно использовать обычное четырехкомпонентное уравнение Дирака. Ниже мы обобщаем результаты [24] на случай заряженной частицы во внешнем электромагнитной поле.

Рассмотрим уравнение вида

$$\left[ (1 + \gamma_4) \gamma_\mu p^\mu + \frac{1}{m} (1 + \gamma_4) p_\mu p^\mu - m \right] \Psi = 0, \quad (9.1)$$

где  $\gamma_\mu$  — четырехрядные матрицы Дирака.

Уравнение (9.1) явно ковариантно и эквивалентно обычному уравнению Дирака. Действительно, умножив (9.1) на  $(1 + \gamma_4)$  и  $(1 - \gamma_4)$ , получаем систему уравнений

$$(1 + \gamma_4)(\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi = 0, \quad (9.2)$$

$$(1 - \gamma_4)(p_\mu p^\mu - m^2)\Psi = 0. \quad (9.3)$$

Поддействовав на (9.2) слева оператором  $\gamma_\mu p^\mu + m$  и принимая во внимание тождества

$$(\gamma_\mu p^\mu)^2 = p_\mu p^\mu, \quad \gamma_4 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma_4, \quad (9.4)$$

получаем

$$\left[ \frac{1}{m} (1 - \gamma_4)(p_\mu p^\mu - m^2) + (1 - \gamma_4)(\gamma_\mu p^\mu - m) \right] \Psi = 0. \quad (9.5)$$

Складывая (9.5) и (9.2) и принимая во внимание (9.3), приходим к уравнению Дирака

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\Psi = 0, \quad (9.6)$$

которое, таким образом, является следствием (9.1). Уравнение (9.1), в свою очередь, легко получить из (9.6), умножив последнее на

$$\left\{ 1 + \gamma_4 + \frac{1}{m}(1 - \gamma_4)(\gamma_\mu p^\mu + m) \right\}.$$

Таким образом, в отсутствие взаимодействия уравнения (9.1) и (9.6) эквивалентны и могут быть интерпретированы как уравнения для частиц со спином  $s = \frac{1}{2}$  или  $s = 0$  [24]. Однако после введения взаимодействия уравнения (9.1) и (9.6) приводят к совершенно различным результатам. Уравнение (9.6) после минимальной замены  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ , как хорошо известно, описывает движение заряженной частицы со спином  $s = \frac{1}{2}$  во внешней электромагнитной поле. Что же касается (9.1), то это уравнение после введения взаимодействия, как будет видно ниже, следует интерпретировать как уравнение для бесспиновой частицы во внешнем поле.

Сделаем в (9.1) замену  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu$ . После умножения получившегося уравнения на  $(1 + \gamma_4)$  и  $(1 - \gamma_4)$  получаем вместо (9.2), (9.3) следующую систему

$$(1 + \gamma_4)(\gamma_\mu \pi^\mu - m)\Psi = 0, \quad (9.7)$$

$$(1 - \gamma_4)(\pi_\mu \pi^\mu - m^2)\Psi = 0. \quad (9.8)$$

Покажем, что эта система, подобно (9.2), (9.3), эквивалентна некоторому уравнению первого порядка. Подействовав на (9.7) оператором  $\left\{ 1 + \frac{1}{m}(\gamma_\mu \pi^\mu + m) \right\}$  и учитывая тождество

$$(\gamma_\mu \pi^\mu)^2 = \pi_\mu \pi^\mu - \frac{ie}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} \quad (9.9)$$

получаем вместо (9.6) уравнение

$$\left\{ \gamma_\mu \pi^\mu - m + (1 + \gamma_4) \frac{ie}{2m} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} \right\} \Psi = 0. \quad (9.10)$$

отличающиеся от уравнения Дирака для частицы со спином  $\frac{1}{2}$  во внешнем поле.

Покажем, что уравнение (9.10) описывает движение заряженной частицы со спином  $s = 0$ . Для этого сначала умножим (9.10) на  $\gamma_0$  и получим уравнение в форме Шредингера

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad (9.11)$$

$$H = \gamma_0 \gamma_a \pi_a + \gamma_0 m + eA_0 + \gamma_0(1 + \gamma_4) \frac{ie\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu}}{2m}.$$

Подвергая волновую функцию  $\Psi$  и гамильтониан  $H$  преобразованию

$$\Psi \rightarrow \Psi' = V\Psi, \quad H \rightarrow H' = VHV^{-1} - i\frac{\partial V}{\partial t}V^{-1}, \quad (9.12)$$

$$V = 1 + (1 - \gamma_4) \frac{\gamma_a \pi_a}{m}, \quad V^{-1} = 1 - (1 - \gamma_4) \frac{\gamma_a \pi_a}{m}, \quad (9.13)$$

получаем

$$H' = \gamma_0 m + \gamma_0 (1 + \gamma_4) \frac{\pi_a^2}{2m} + eA_0.$$

Выбрав матрицы  $\gamma_0$  и  $\gamma_4$  в виде

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad (9.14)$$

где  $\sigma_3, \sigma_1$  — двурядные матрицы Паули, запишем гамильтониан  $H'$  в форме

$$H' = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \quad H_{\pm} = \sigma_3 m + (\sigma_3 \pm i\sigma_3) \frac{\pi_a^2}{2m} + eA_0. \quad (9.15)$$

Обозначив  $\Psi' = V\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$ , где  $\Psi_{\pm}$  — двухкомпонентные столбцы, получаем для  $\Psi_+, \Psi_-$  два незацепляющихся уравнения

$$\left[ \sigma_3 m + (\sigma_3 \pm i\sigma_3) \frac{\pi_a^2}{2m} + eA_0 \right] \Psi_{\pm} = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\pm} \quad (9.16)$$

совпадающие с уравнениями Сакаты–Такетани для бесспиновой заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Таким образом мы убедились, что обобщенное уравнение Дирака (9.10) описывает движение заряженной частицы со спином 0 во внешнем электромагнитном поле. Это уравнение может быть использовано при решении конкретных физических задач наряду с другими известными уравнениями для бесспиновых частиц (Кеммера–Дэффина и Клейна–Гордона).

### Закключение

Обсудим коротко полученные результаты.

Для частицы с произвольным спином  $s$  и массой  $m$  найдены все возможные (с точностью до преобразований эквивалентности, осуществляемых чисельными матрицами) пуанкаре-инвариантные гамильтоновы уравнения движения вида (0.1), в которых гамильтонианы являются дифференциальными операторами второго порядка, а волновая функция  $\Psi(t, \vec{x})$  имеет  $2(2s+1)$  компонент. Полученные уравнения включают как частный случай уравнения Дирака для  $s = \frac{1}{2}$  и Тамма–Сакаты–Такетани для  $s = 0$  и  $s = 1$ .

Найдены также уравнения движения частицы произвольного спина, включающие производные не выше первого порядка. Эти уравнения имеют вид  $8s$ -компонентного уравнения Дирака с некоторым пуанкаре-инвариантным дополнительным условием, устраняющим лишние компоненты волновой функции (см. (2.20)). При обобщении на случай заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле уравнения (2.20) не приводят, в отличие от других явно ковариантных уравнений для высших спинов [1–3], к нарушению принципа причинности.

Другим достоинством уравнений (2.20) является их простая форма, которая не усложняется с ростом спина. Это позволяет решать различные физические задачи для произвольных значений  $s$ . Так, в настоящей работе точно решена задача о

движении релятивистской частицы произвольного спина в однородном магнитном поле.

В настоящей работе не исследовались вопросы, связанные с вторичным квантованием полученных уравнений. Отметим, что процедуру вторичного квантования диракоподобных уравнений (2.20) нетрудно осуществить в формализме Умеэавы–Такахати [25], используя представление (6.3).

Можно показать, что уравнения (2.20) инвариантны относительно операции зарядового сопряжения  $C$ , но неинвариантны относительно обращения времени  $T$  и отражения пространственных координат  $P$ .  $P$ -,  $C$ -,  $T$ -инвариантные уравнения для частиц произвольного спина могут быть получены из (2.20) путем удвоения числа компонент волновой функции и замены  $\Gamma_\mu^{(s)} \rightarrow \check{\Gamma}_\mu^{(s)}$  согласно (4.23).

Выражаем благодарность С.П. Онуфрийчуку за проверку основных формул настоящей работы.

### Дополнение

Приведем решение системы соотношений (1.14)

$$h_0^{(s)} \cdot h_0^{(s)} = 1, \quad (\text{Д.1а})$$

$$h_0^{(s)} h_1^{(s)} + h_1^{(s)} h_0^{(s)} = 0, \quad (\text{Д.1б})$$

$$h_1^{(s)} h_1^{(s)} + h_0^{(s)} h_2^{(s)} + h_2^{(s)} h_0^{(s)} = p^2, \quad (\text{Д.1в})$$

$$h_1^{(s)} h_2^{(s)} + h_2^{(s)} h_1^{(s)} = 0, \quad (\text{Д.1г})$$

$$h_2^{(s)} h_2^{(s)} = 0. \quad (\text{Д.1д})$$

Из (Д.1а), (1.8) видно, что не умаляя общности, можно положить

$$h_0^{(s)} = \sigma_1. \quad (\text{Д.2})$$

Действительно, согласно (1.8), (Д.1а), коэффициенты  $a_\mu^{(s)}$  должны удовлетворять условию

$$\left(a_1^{(s)}\right)^2 + \left(a_2^{(s)}\right)^2 + \left(a_3^{(s)}\right)^2 = 1, \quad a_0^{(s)} = 0 \quad (\text{Д.3а})$$

или

$$\left(a_0^{(s)}\right)^2 = 1, \quad a_1^{(s)} = a_2^{(s)} = a_3^{(s)} = 0. \quad (\text{Д.3б})$$

Условие (Д.3б) несовместно с (Д.1б)–(Д.1д), а матрица (1.8), (Д.3а) всегда может быть приведена к виду (Д.2) посредством преобразования  $h_0^{(s)} \rightarrow U_1 h_0^{(s)} U_1^{-1}$ , где

$$U_1 = \left[1 + \sigma_3 \sigma_\alpha a_\alpha^{(s)}\right] \left[2 \left(1 + a_1^{(s)}\right)\right]^{-1/2}, \quad a_1^{(s)} \neq -1, \quad \alpha = 1, 2. \quad (\text{Д.4})$$

Из (Д.2), (Д.1б), (1.8) следует, что

$$h_1^{(s)} = \left(b_2^{(s)} \sigma_2 + b_3^{(s)} \sigma_3\right) (\vec{S} \cdot \vec{p}). \quad (\text{Д.5})$$

Пусть  $(b_2^{(s)})^{-2} + (b_3^{(s)})^2 = k_1^2 \neq 0$ , тогда преобразование  $h_1^{(s)} \rightarrow U_2 h_1^{(s)} U_2^{-1}$ , где

$$U_2 = \left[ 1 + \sigma_3 \left( \sigma_2 b_2^{(s)} + \sigma_3 b_3^{(s)} \right) \right] \left[ 2k_1 \left( k_1 + b_3^{(s)} \right) \right]^{-1/2}, \quad b_3 \neq -k, \quad (Д.6)$$

приводит  $h_1^{(s)}$  (Д.5) к виду

$$h_1^{(s)} = \sigma_3 k_1 \vec{S} \cdot \vec{p}. \quad (Д.7)$$

Но тогда из (1.8), (Д.2), (Д.7), (Д.1в) получаем

$$h_2^{(s)} = \frac{1}{2} \sigma_1 \left[ p^2 - k_1^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 \right] + \sigma_2 \left[ c_2^{(s)} (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 + d_2^{(s)} p^2 \right] + \sigma_3 \left[ c_3^{(s)} (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 + d_3^{(s)} p^2 \right]. \quad (Д.8)$$

Подставив (Д.7), (Д.8) в (Д.1г), приходим к соотношению

$$c_3 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 + d_3 p^2 (\vec{S} \cdot \vec{p}) = 0. \quad (Д.9)$$

В случае  $s > 1$  операторы  $(\vec{S} \cdot \vec{p})^2$  и  $p^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})$  линейно независимы, и для выполнения (Д.9) необходимо положить  $c_3 = d_3 = 0$  и

$$h_2^{(s)} = \frac{1}{2} \sigma_1 \left[ p^2 - k_1^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 \right] + \sigma_2 \left[ c_2^{(s)} (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 + d_2^{(s)} p^2 \right]. \quad (Д.10)$$

Потребуем, чтобы оператор (Д.10) удовлетворял уравнению (Д.1д) и получим

$$\frac{1}{4} p^4 - \frac{1}{2} p^2 k_1^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 + \frac{1}{4} k_1^4 (\vec{S} \cdot \vec{p})^4 + \left( c_2^{(s)} \right)^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^4 + \left( d_2^{(s)} \right)^2 p^4 + 2c_2^{(s)} d_2^{(s)} p^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 = 0. \quad (Д.11)$$

При  $s > \frac{3}{2}$  операторы  $p^4$ ,  $(\vec{S} \cdot \vec{p})^4$  и  $p^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2$  линейно независимы. Но тогда из (Д.11) следует, что

$$c_2 = \mp i \frac{k_1^2}{2}, \quad d_2 = \pm \frac{i}{2}. \quad (Д.12)$$

Подставив (Д.12) в (Д.10), приходим к формуле

$$h_2^{(s)} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm i \sigma_2) \left[ p^2 - k_1^2 (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 \right]. \quad (Д.13)$$

Таким образом, мы показали, что с точностью до матричных преобразований (Д.4), (Д.6), все возможные решения системы соотношений (Д.1) для операторов (1.8) задаются формулами (Д.2), (Д.7), (Д.13) (если  $k_1 \neq 0$  и  $s > \frac{3}{2}$ ). Аналогично можно показать, что формулы (Д.2), (Д.7), (Д.13) задают все решения системы (Д.1) и для  $k_1 = 0$ ,  $s > \frac{3}{2}$ . Используя тождества

$$\begin{aligned} (\vec{S} \cdot \vec{p})^3 &= p^2 (\vec{S} \cdot \vec{p}), & s &= 1, \\ (\vec{S} \cdot \vec{p})^4 &= \frac{5}{2} (\vec{S} \cdot \vec{p})^2 p^2 - \frac{9}{16} p^4, & s &= \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (Д.14)$$

получаем решения (Д.1) для  $s = 1$  и  $s = \frac{3}{2}$  в виде (1.15)–(1.19).

1. Velo G., Zwanzinger D., *Phys. Rev.*, 1969, **186**, № 5, 2218;  
Velo G., *Nucl. Phys. B*, 1972, **43**, 389.
2. Jonson K., Sudarshan B.C.G., *Ann. Phys.*, 1961, **13**, 126;  
Tsai W., *Phys. Rev. D*, 1973, **7**, 1945.
3. Seetharaman M., Prabhakaran I., Mathews P.M., *Phys. Rev. D*, 1975, **12**, 458.
4. Фушич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, №2, 192–205;  
Fushchych W.I., Grishchenko A.L., Nikitin A.G., Preprint ITF-70-89E, Kiev, 1970, 26 p.
5. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Rep. Math. Phys.*, 1975, **8**, №1, 33–48;  
Никитин А.Г., *Укр. физ. журнал*, 1973, **18**, 1605; 1974, **19**, 1000.
6. Kolsrud M., *Physica Norwegica*, 1971, **5**, 169.
7. Weaver D.L., Hammer C.L., Good R.H., *Phys. Rev.*, 1964, **135**, 241;  
Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1966, **143**, 978;  
Mathews P.M., Ramankrishnan S., *Nuovo Cim.*, 1967, **50**, 2;  
Jayaraman I., *Nuovo Cim. A*, 1973, **13**, 877; 1973, **14**, 343.
8. Guertin R.F., *Ann. Phys.*, 1974, **88**, 504; 1975, **91**, 386.
9. Тамм И.Е., *ДАИ СССР*, 1940, **29**, 551;  
Taketani M., Sakata S., *Proc. Phys. Math. Soc. (Japan)*, 1940, **22**, 757.
10. Guertin R.F., Spin- $\frac{1}{2}$  equation with indefinite metric, Preprint, Rice University, Houston, Texas, 1975.
11. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, № 2;  
Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
12. Швeбер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, И.Л., М., 1963, С. 114.
13. Lomont I.S., *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 1710;  
Moses H.E., *Nuovo Cim. Suppl.*, 1958, **7**, 1.
14. Bludman S.A., *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 1163.
15. Lomont I.S., Moses H.E., *Phys. Rev.*, 1960, **118**, 337;  
Dowker I.S., *Proc. Roy. Soc. A*, 1967, **293**, 351.
16. Hewton T.D., Wigner E.P., *Rev. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 400;  
см. также [12], С. 69.
17. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
18. Wightman A.S., in: *Partial Differential Equations* (D.O. Spencer, Ed.), Vol.23, P. 141, Am. Math. Soc. providence, R.I., 1973.
19. Hurley W.I., *Phys. Rev. D*, 1971, **4**, 3605.
20. Wightman A.S., in *Studies in Mathematical Physics*, edited by E.H. Lieb, B. Simon, Princeton, 1976.
21. James K.R., *Proc. Phys. Soc. (London)*, 1968, **1**, 334.
22. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., *Квантовая электродинамика*, Н., М., 1969, С. 142.
23. Nelson T.J., Good R.H., *Phys. Rev.*, 1969, **179**, 1445;  
Santhanam T.S., Tekumalla A.R., *Lett. Nuovo Cim.*, 1972, **3**, 1060; 1973, **6**, 99;  
Simon M.T., *Lett. Nuovo Cim.*, 1971, **2**, 616;  
Seetharaman M., Simon M.T., Mathews P.M., *Nuovo Cim. A*, 1972, **12**, 788.
24. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321–330;  
Fushchych W.I., Grishchenko A.L., *Lett. Nuovo Cim.*, 1970, **4**, № 20, 927–928; Preprint ITF-70-88E, Kiev, 1970, 22 p;  
Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1973, **7**, № 11, 439–442.
25. Takahashi I., *An introduction to a field quantization*, Pergamon Press, New York, 1969.

# On the new invariance groups of the Dirac and Kemmer–Duffin–Petiau equations

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

In works [1–6] the canonical-transformation method has been proposed for the investigations of the group properties of the differential equations of the quantum mechanics. This method essence in that the system of differential equation is first transformed to the diagonal or Jordan form and then the invariance algebra of the transformed equation is established. The explicit form of this algebra basis elements for the starting equations is found by the inverse transformation.

The main distinguishing feature of this method from the intensively developed during last years classical Lie method [7, 8] is that the basis elements of the invariance algebra of the corresponding equations do not belong to the class of the differential operators, but are as a rule integrodifferential operators. The new invariance algebras of the Dirac [1, 2]<sup>1</sup>, Maxwell [2], Klein–Gordon [3], Kemmer–Duffin–Petiau (KDP) and Rarita–Schwinger [4] equations have been found just in the class of integrodifferential operators.

The aim of this note is to establish the Dirac and the KDP equation invariance algebras in the class of differential operators. The theorems given below (which establish new group properties of the Dirac and of the KDP equations) are proved with the help of the canonical-transformation method.

To establish an invariance of the equation

$$L(p_0, p_1, p_2, p_3)\Psi(x_0, \mathbf{x}) \equiv L\Psi = 0, \quad p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1)$$

under the set of transformations  $\Psi \rightarrow \Psi'_A = Q_A\Psi$  is to found a set of operators  $Q \equiv \{Q_A\}$  such that

$$[L, Q_A]_- \Psi = 0, \quad \forall Q_A \in Q, \quad (2)$$

where  $\Psi$  is a function which satisfies eq. (1). Condition (2) may be written in the operator form

$$[L, Q_A]_- = F \cdot L, \quad (3)$$

where  $F$  is some set of operators, which are defined in the space of equation (1) solutions.

**Theorem 1.** *The Dirac equation*

$$L_{\frac{1}{2}}\Psi \equiv (\gamma_\mu p^\mu + m)\Psi = 0 \quad (4)$$

---

Lettere al Nuovo Cimento, 1977, **19**, № 9, P. 347–352.

<sup>1</sup>The results of the work [2] have been generalized by Jayaraman (*J. Phys. A*, 1976, **9**, 1181) to the case of the equation without redundant components for any spin. See also [1].

is invariant under the 16-dimensional Lie algebra  $A_{16}$ , whose basis elements are the differential operators

$$P_\mu = p_\mu = i \frac{p}{\partial x^\mu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{i}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu, \quad (5)$$

$$Q_{\mu\nu} = i \gamma_\mu \gamma_\nu + \frac{i}{m} (1 + i \gamma_4) (\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu), \quad \gamma_4 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \quad (6)$$

**Proof.** If one does not ask himself about the way to found the operators (6) (the operators (5), which form the  $P_{1,3}$  algebra, are well-known), the theorem validity may be established by direct verification. Indeed, one obtains by direct calculation that  $Q_{\mu\nu}$  satisfies the invariance condition (3)

$$[Q_{\mu\nu}, L_{\frac{1}{2}}]_- = F_{\mu\nu}^{\frac{1}{2}} L_{\frac{1}{2}}, \quad F_{\mu\nu}^{\frac{1}{2}} = \frac{i}{m} (\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu) \quad (7)$$

and form together with  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  the Lie algebra

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu]_- &= 0, & [P_\lambda, J_{\mu\nu}]_- &= i(g_{\lambda\mu} P_\nu - g_{\lambda\nu} P_\mu), & [P_\lambda, Q_{\mu\nu}]_- &= 0, \\ [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]_- &= i(g_{\mu\lambda} J_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} J_{\mu\lambda} - g_{\mu\sigma} J_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda} J_{\mu\sigma}), & & & & \\ [Q_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]_- &= \frac{1}{2} [Q_{\mu\nu}, Q_{\lambda\sigma}]_- = i(g_{\mu\lambda} Q_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} Q_{\mu\lambda} - g_{\mu\sigma} Q_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda} Q_{\mu\sigma}). \end{aligned} \quad (8)$$

But such calculations are very cumbersome. A more elegant and constructive way, which shown the method to obtain the operators (6) is to transform eq. (4) to the diagonal form. After such a transformation the theorem statements become obvious ones.

Such a transformation may be carried out in two steps. First eq. (4) is multiplied by the invertible differential operator

$$\begin{aligned} W &= 1 - \frac{1}{m} \gamma_\mu p^\mu - \frac{1}{2m^2} (1 + i \gamma_4) p_\mu p^\mu, \\ W &= 1 + \frac{1}{m} \gamma_\mu p^\mu - \frac{1}{2m^2} (1 - i \gamma_4) p_\mu p^\mu. \end{aligned} \quad (9)$$

As a result one obtains the equation

$$W L_{\frac{1}{2}} \Psi = 0, \quad (10)$$

which is equivalent to the starting eq. (4). Then with the help of the isomeric operator

$$V = \exp \left[ \frac{1}{2m} (1 + i \gamma_4) \gamma_\mu p^\mu \right] \equiv 1 + \frac{1}{2m} (1 + i \gamma_4) \gamma_\mu p^\mu \quad (11)$$

one reduces eq. (10) to the diagonal form

$$L' \Phi \equiv V (W L_{\frac{1}{2}}) V^{-1} \Phi = \left[ \lambda^+ m + \frac{\lambda^-}{m} (p_\mu p^\mu - m^2) \right] \Phi = 0, \quad (12)$$

where  $\Phi = V \Psi$ ,  $\lambda^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm i \gamma_4)$ .

Equation (12) is equivalent to the starting eq. (4) and contains the only matrix  $\gamma_4$ , which may be taken in the diagonal form without loss of generality. So it is evident

that the matrices  $Q'_{\mu\nu} = i\gamma_\mu\gamma_\nu$  commute with the operator  $L_{\frac{1}{2}}$ . These matrices satisfy the commutation relations of the Lie algebra of the  $SU_2 \otimes SU_2$  group and satisfy the relations (8) together with the generators  $P'_\mu = VP_\mu V^{-1} = P_\mu$  and  $J'_{\mu\nu} = VJ_{\mu\nu}V^{-1} = J_{\mu\nu}$ .

To complete the proof it is sufficient to find the explicit form of the matrices  $Q'_{\mu\nu}$  in the starting  $\Psi$ -representation. Calculating  $Q_{\mu\nu} = V^{-1}Q'_{\mu\nu}V$ , one obtains the operators (6). The theorem is proved.

**Corollary 1.** If one makes in (4), (9)–(12) the substitution

$$\gamma_\mu p^\mu \rightarrow \gamma_\mu = (p_\mu - eA_\mu)\gamma_\mu, \quad p_\mu p^\mu \rightarrow \pi_\mu \pi^\mu - \frac{ie}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu F_{\mu\nu},$$

where  $A_\mu$  is the vector potential, and  $F_{\mu\nu}$  is the tensor of the electromagnetic field, the transformations (9)–(12) establish the one-to-one correspondence between the solutions of the Dirac and of the Zaitsev–Gell–Mann equations [9].

**Corollary 2.** The above founded operators  $Q_{\mu\nu}$  may be used to find the constants of motion for the particle interacting with external field. For instance the operator the  $Q = \varepsilon_{abc}Q_{bc}(\boldsymbol{\pi})(H_a - iE_a)$  is the constant of motion for a particle moving in the homogeneous constant magnetic field  $\mathbf{H}$  and the electric field  $\mathbf{E}(Q_{bc}(\boldsymbol{\pi}))$  is obtained from (6) by the substitution  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu$ .

**Corollary 3.** In theorem 1 the invariance condition of eq. (4) is formulated by the language of Lie algebras, i.e. on the infinitesimal level. The natural question arises: what sort of finite transformations are generated by  $Q_{\mu\nu}$ ? Using the explicit form of the generators (6), one obtains these transformations in the form

$$\begin{aligned} \Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) &= \exp[iQ_{ab}\theta_{ab}]\Psi(x) = (\cos\theta_{ab} - \gamma_a\gamma_b \sin\theta_{ab})\Psi(x) + \\ &+ \frac{1}{m}(1 + i\gamma_4)\sin\theta_{ab} \left( \gamma_a \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_b} - \gamma_b \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_a} \right), \\ \Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) &= \exp[iQ_{0a}\theta_{0a}]\Psi(x) = (\cosh\theta_{0a} - i\sinh\theta_{0a}\gamma_0\gamma_a)\Psi(x) + \\ &+ \frac{i}{m}(1 + i\gamma_4)\sinh\theta_{0a} \left( \gamma_0 \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_a} - \gamma_a \frac{\partial\Psi(x)}{\partial x_0} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x_\mu \rightarrow x'_\mu &= \exp[iQ_{ab}\theta_{ab}]x_\mu \exp[-iQ_{ab}\theta_{ab}] = x_\mu + \frac{1}{m}(1 + i\gamma_4)\sin\theta_{ab} \times \\ &\times (\gamma_a g_{\mu b} - \gamma_b g_{\mu a})(\cos\theta_{ab} - \gamma_a\gamma_b \sin\theta_{ab}), \\ x_\mu \rightarrow x'_\mu &= \exp[iQ_{0a}\theta_{0a}]x_\mu \exp[-iQ_{0a}\theta_{0a}] = x_\mu + \frac{i}{m}(1 + i\gamma_4)\sinh\theta_{0a} \times \\ &\times (\gamma_0 g_{\mu a} - \gamma_a g_{\mu 0})(\cosh\theta_{0a} - i\gamma_0\gamma_a \sinh\theta_{0a}), \end{aligned}$$

where  $\theta_{\mu\nu} = -\theta_{\nu\mu}$  are the six transformation parameters (there is no sum by  $a, b$ ). Transformations (13) together with the Lorentz transformations form the 16-parameter invariance group of the Dirac equation.

In the quantum field theory not only the Dirac equation (4) but the system of two four-component equations for the two independent functions  $\Psi$  and  $\bar{\Psi}$  is considered usually. Such a system is equivalent to one eight-component Dirac equation

$$(\Gamma_\mu p^\mu + m)\Psi(x_0, \mathbf{x}) = 0, \quad (14)$$

where  $\Gamma_\mu$  are  $(8 \times 8)$ -dimensional matrices, which satisfy together with  $\Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$  the Clifford algebra (one can see details e.g. in [5]).

The system of eq. (14) has the higher symmetry in comparison with the four-component Dirac equation. It is shown in [5] that the additional invariance algebra of eq. (4) (apart from  $P_{1,3}$ ) is the Lie algebra of the  $O_6$ -group. This result admits the following strengthening:

**Theorem 2.** *Equation (14) is invariant under the 40-dimensional Lie algebra  $A_{40}$ . The basis elements of this algebra have the form*

$$\begin{aligned}
 P_\mu &= p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}, & J_{\mu\nu} &= x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{i}{2} \Gamma_\mu \Gamma_\nu, \\
 \tilde{Q}_{mn} &= i \Gamma_m \Gamma_n + \frac{i}{m} (1 + i \Gamma_6) (\Gamma_m \Gamma_n - \Gamma_n \Gamma_m), & m, n &= 1, 2, \dots, 5, \\
 \tilde{\tilde{Q}}_{mn} &= \left[ \Gamma_6 + \frac{i}{m} (1 + i \Gamma_6) \Gamma_\mu p^\mu \right] \tilde{Q}_{mn},
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

where, by the definition,

$$p_{a+3} \Psi(x_0, \mathbf{x}) = -i \frac{\partial \Psi(x_0, \mathbf{x})}{\partial x_{a+3}} \equiv 0.$$

**Proof** may be carried out in full analogy with the proof of theorem 1. We only draw attention to the fact, that  $Q_{mn}$  satisfies the Lie algebra of the group  $SU_4$ .

Let us now consider the group properties of the KDP equation, which describes the particles with spin  $s = 1$ . This equation has the form

$$L_1 \Psi(x_0, \mathbf{x}) = 0, \quad L_1 = \beta_\mu p^\mu + m, \tag{16}$$

where  $\beta_\mu$  are the ten-row KDP matrices.

It follows from the above that the KDP equation has to possess the more high symmetry than eq. (4) do. This conclusion is supported by the following

**Theorem 3.** *The KDP equation is invariant under the 26-dimensional Lie algebra  $A_{26}$ , basis elements of which belong to the class of differential operators and have the form*

$$\begin{aligned}
 P_\mu &= p_\mu = i \frac{\partial}{\partial x^\mu}, & J_{\mu\nu} &= x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + i[\beta_\mu, \beta_\nu]_-, \\
 \lambda_a &= [c_{ab}, c_{ac}]_+, & \lambda_{a+3} &= c_{bc}, & \lambda_7 &= -i[c_{12}c_{23}c_{31} - c_{23}c_{31}c_{12}], \\
 \lambda_8 &= -\frac{i}{\sqrt{3}}(c_{12}c_{23}c_{31} + c_{23}c_{31}c_{12} - 2c_{31}c_{12}c_{23}), & \lambda_{8+a} &= c_{ab}c_{0b}, \\
 \lambda_{11+a} &= ic_{0a}, & \lambda_{15} &= (c_{12}c_{23}c_{02} - c_{23}c_{31}c_{03}), \\
 \lambda_{16} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(c_{12}c_{23}c_{02} + c_{23}c_{31}c_{03} - 2c_{31}c_{12}c_{01}),
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

where

$$\begin{aligned}
 c_{\mu\nu} &= i[\beta_\mu, \beta_\nu]_- + \frac{1}{m}(a_\mu p_\nu - a_\nu p_\mu), & (a, b, c) &= \text{cycl}(1, 2, 3), \\
 a_\mu &= i[\beta_5, \beta_\mu]_- + i\beta_\mu, & \beta_5 &= \frac{1}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

**Proof.** First we shall show, that the operators  $\lambda_f$  satisfy the invariance condition (3). By direct verification one obtains

$$[c_{\mu\nu}, L_1]_- = F_{\mu\nu}^1 L - 1, \quad F_{\mu\nu}^1 = (L_1 - 2m) \frac{i}{m^2} (\beta_\mu p_\nu - \beta_\nu p_\mu). \quad (19)$$

It follows from eq. (19) that the operators  $c_{\mu\nu}$  (and hence all  $\lambda_f$ ) satisfy eq. (3).

The operators (17b) satisfy the commutation relations of the Lie algebra of the  $SU_3 \otimes SU_3$  group. This fact may be verified immediately, but the more simple way is to make previously the transformation  $\lambda \rightarrow V\lambda_f V^{-1} = \lambda'_f$ , where

$$V = \exp \left[ \frac{i}{m} a_\mu p^\mu \right], \quad c_{\mu\nu} \rightarrow c'_{\mu\nu} = V c_{\mu\nu} V^{-1} = i[\beta_\mu, \beta_\nu]_-. \quad (20)$$

By means of eq. (20) it is not difficult to make sure that the operators  $\lambda'_f$  and  $p'_\mu = V p_\mu V^{-1} = p_\mu$ ,  $J'_{\mu\nu} = V J_{\mu\nu} V^{-1} = J_{\mu\nu}$  form the Lie algebra. The theorem is proved.

In conclusion let us note that the main part of the theorems 1, 2, 3 (i.e. the invariance of eqs. (4), (14), (16) under the corresponding algebras) may be proved also by the transformation  $L_s \rightarrow \tilde{V} L_s \tilde{V}^{-1}$ , where  $\tilde{V}$  is the integrodifferential operator

$$\tilde{V} = \exp \left[ i \frac{S_{4a} p_a}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{m} \right] \exp \left[ \frac{S_{ab} p_c}{p} \operatorname{arctgh} \frac{p}{E} \right]. \quad (21)$$

The preference of this transformation is that it may be easily generalized for the case of an arbitrary spin, but the basis elements  $Q_{\mu\nu}$  of the new invariance algebra have to be integrodifferential operators (as like as (21)). Thus for the Dirac equation one obtains

$$Q_{ab} = i\gamma_a \gamma_b + \frac{i}{m} (\gamma_a p_b - \gamma_b p_a) (1 + i\gamma_4 \hat{\varepsilon}), \quad Q_{0a} = i\hat{\varepsilon} Q_{bc},$$

where  $\hat{\varepsilon}$  is the integrodifferential operator of energy sign

$$\hat{\varepsilon} = \frac{H^D}{|H^D|} = (\gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 m) (m^2 + p^2)^{-1/2}.$$

1. Fushchych W.I., *Theor. Math. Fiz.*, 1971, **7**, № 1, 3–12 (in Russian); Preprint ITF-70-32E, Kiev, 1970 (in English).
2. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508–512.
3. Fushchych W.I., *DAN USSR*, 1976, **230**, № 3, 570–573 (in Russian).
4. Nikitin A.G., Segeda Yu.N., Fushchych W.I., *Theor. Math. Fiz.*, 1976, **29**, № 1, 82–94 (in Russian).
5. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **6**, № 4, 133–137.
6. Fushchych W.I., Segeda Yu.N., *Ukrainian Math. J.*, 1976, **28**, № 6, 844–849 (in Russian).
7. Ovsianikov L.V., The group properties of equations, Novosibirsk, 1962; Ibrahimov N.H., *DAN USSR*, 1969, **185**, 1226 (in Russian).
8. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, 802; Andersson R.L., Kumei S., Wulfam C.E., *Phys. Rev. Lett.*, 1972, **28**, 988; Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 499.
9. Zaitsev G.A., *JETP*, 1955, **28**, 524 (in Russian); *DAN USSR*, 1957, **113**, 1248 (in Russian); Feynman R.P., Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 193.

# О группах инвариантности одного класса счетной системы уравнений первого порядка с частными производными

В.И. ФУЩИЧ, С.П. ОНУФРИЙЧУК

В работах [1–3] предложен метод канонических преобразований для изучения групповых свойств дифференциальных уравнений квантовой механики, который отличается от классического метода Ли. Основное отличие состоит в том, что базисные элементы алгебры инвариантности того или иного уравнения могут быть интегродифференциальными операторами, в то время как в методе Ли такие операторы не могут возникать по самой постановке задачи.

С помощью канонических преобразований установлены новые группы инвариантности, отличные от групп Лоренца и Пуанкаре, для уравнений Максвелла и Дирака [1, 2, 4], Клейна–Гордона [3] и Кеммера–Дэффина [5]. Все эти уравнения можно представить как конечную систему уравнений первого порядка в частных производных вида

$$A_\mu p^\mu \Psi(t, x_1, x_2, x_3) + B\Psi(t, x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (1)$$

где по повторяющемуся индексу  $\mu = 0, 1, 2, 3$  подразумевается суммирование;  $A_\mu, B$  — конечные квадратные матрицы, удовлетворяющие определенным свойствам;  $\Psi$  — вектор-столбец той же размерности, что и  $A_\mu, B$ ;

$$p_0 = i\partial/\partial t, \quad p_a = -i\partial/\partial x_a, \quad a = 1, 2, 3.$$

Цель настоящей работы изучить методом канонических преобразований групповые свойства уравнений типа (1) в том случае, когда коэффициенты  $A_\mu, B$  являются бесконечномерными матрицами специального вида. Будут установлены новые группы (алгебры) инвариантности для бесконечной системы типа (1), которые описывают релятивистскую систему с бесконечным числом степеней свободы (по спиновым индексам).

Далее будут рассматриваться такие бесконечные системы (1), коэффициенты которых являются квадратичными функциями от операторов (матриц), удовлетворяющих коммутационным соотношениям алгебры Гейзенберга

$$[\hat{q}_a, \hat{q}_b]_- = iC_{ab}, \quad a, b = 1, 2, \dots, 8, \quad (2)$$

где  $C_{ab}$  — матричные элементы восьмимерной матрицы

$$C = \begin{pmatrix} O_4 & I_4 \\ -I_4 & O_4 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Хорошо известно, что перестановочные соотношения Гейзенберга (2) могут быть реализованы либо в виде бесконечных матриц, либо в виде операторов умножения на независимую переменную и операторов дифференцирования. В первом случае приходим к представлению Гейзенберга, во втором — к представлению Шредингера. Так как работать с бесконечными матрицами крайне неудобно, в дальнейшем используем представление Шредингера. Это означает, что величины  $A_\mu, B$  в (1) есть некоторые функции от некоммутирующих операторов  $\hat{q}_a$ .

Рассмотрим уравнение первого порядка в частных производных с операторными коэффициентами (или бесконечными матрицами) вида

$$i \frac{\partial \Psi(\tau, x, q)}{\partial \tau} = (\beta_\mu p^\mu + \beta_5 \varkappa) \Psi(\tau, x, q), \quad (4)$$

где операторные коэффициенты  $\beta_\mu$  являются следующими функциям от  $\hat{q}_a$ :

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{4} (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2 + \hat{q}_4^2 - \hat{q}_5^2 - \hat{q}_6^2 - \hat{q}_7^2 - \hat{q}_8^2), \\ \beta_1 &= \frac{1}{4} (\hat{q}_1^2 - \hat{q}_2^2 - \hat{q}_3^2 + \hat{q}_4^2 + \hat{q}_5^2 - \hat{q}_6^2 - \hat{q}_7^2 + \hat{q}_8^2), \\ \beta_2 &= \frac{1}{2} (-\hat{q}_1 \hat{q}_2 + \hat{q}_3 \hat{q}_4 - \hat{q}_5 \hat{q}_6 + \hat{q}_7 \hat{q}_8), \\ \beta_3 &= \frac{1}{2} (\hat{q}_1 \hat{q}_3 + \hat{q}_2 \hat{q}_4 + \hat{q}_5 \hat{q}_7 + \hat{q}_6 \hat{q}_8), \\ \beta_5 &= -\frac{1}{2} (\hat{q}_1 \hat{q}_5 + \hat{q}_2 \hat{q}_6 + \hat{q}_7 \hat{q}_3 + \hat{q}_8 \hat{q}_4), \end{aligned} \quad (5)$$

$\tau$  — собственное время,  $\varkappa$  — произвольный параметр,  $x \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)$  — точка в 4-мерном пространстве Минковского,  $q \equiv (q_1, q_2, q_3, q_4)$ ,  $-\infty < q_i < \infty$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $q_i$  — собственные значения операторов  $\hat{q}_i$ . В дальнейшем “крышку” над операторами  $\hat{q}_a$  будем опускать.

Уравнение (4) является обобщением известных релятивистских уравнений Майорана [6], Намбу [7], Дирака [8], описывающих физические системы с бесконечным числом спиновых и массовых состояний.

Уравнение (4), как и уравнение Майорана [6], инвариантно относительно преобразований из группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ . Выясним теперь такой вопрос: существуют ли более широкие (или другие) группы инвариантности уравнения (4), чем группа  $P(1, 3)$ ? Положительный ответ на этот вопрос дает

**Теорема 1.** *Уравнение (4) инвариантно относительно 16-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются операторами:*

$$P_\mu = p_\mu = i g_{\mu\nu} \partial / \partial x_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad (6)$$

$$L_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}(p), \quad (7)$$

где  $g_{\mu\nu}$  — метрический тензор с компонентами  $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$ ,

$g_{\mu\nu} = 0$ , если  $\mu \neq \nu$ ; компоненты тензорных операторов  $S_{\mu\nu}$  равны

$$\begin{aligned} S_{01} &= \frac{1}{2}(q_1q_5 - q_2q_6 - q_3q_7 + q_4q_8), & S_{02} &= \frac{1}{2}(-q_1q_6 - q_2q_5 + q_3q_8 + q_4q_7), \\ S_{03} &= \frac{1}{2}(q_1q_7 + q_2q_8 + q_3q_5 + q_4q_6), & S_{12} &= \frac{1}{2}(-q_1q_6 + q_2q_5 - q_3q_8 + q_4q_7), \\ S_{13} &= \frac{1}{2}(q_1q_7 - q_2q_8 - q_3q_5 + q_4q_6), & S_{23} &= \frac{1}{2}(-q_1q_8 - q_2q_7 + q_3q_6 + q_4q_5), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \frac{(L - \varkappa)}{LL_0^2}(p_\mu S_{\nu\rho} p^\rho - p_\nu S_{\mu\rho} p^\rho) - \frac{1}{L}(p_\mu S_{5\nu} - p_\nu S_{5\mu}), \quad (9)$$

$$L \equiv (p_\mu p^\mu + \varkappa^2)^{1/2}, \quad (10)$$

$$L_0 \equiv (p_\mu p^\mu)^{1/2}. \quad (11)$$

**Доказательство.** Если не ставить вопрос о том, каким способом найдены операторы (7), то в справедливости теоремы можно убедиться непосредственной проверкой. Однако это слишком громоздко и утомительно. Более короткий и конструктивный путь, указывающий способ нахождения операторов (7), состоит в том, чтобы, как и в случае конечномерных уравнений [1–5], преобразовать уравнение (4) к каноническому (диагональному) виду. Такое преобразование осуществляется при помощи унитарного оператора

$$W = \exp \left\{ -i \frac{S_{5\mu} p^\mu}{L_0} \Theta \right\}, \quad \Theta = \arctg \frac{L_0}{\varkappa}, \quad (12)$$

где компоненты векторного оператора  $S_{5\mu}$  имеют вид

$$\begin{aligned} S_{50} &= \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + q_7^2 + q_8^2), \\ S_{51} &= \frac{1}{4}(q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 - q_5^2 + q_6^2 + q_7^2 - q_8^2), \\ S_{52} &= \frac{1}{2}(-q_1q_2 + q_3q_4 + q_5q_6 - q_7q_8), \\ S_{53} &= \frac{1}{2}(q_1q_3 + q_2q_6 - q_5q_7 - q_6q_8). \end{aligned} \quad (13)$$

После преобразования (12) уравнение (4) приводится к виду

$$i \frac{\partial \Phi(\tau, x, q)}{\partial \tau} = \beta_5 L \Phi(\tau, x, q), \quad \Phi(\tau, x, q) = W(p) \Psi(\tau, x, q). \quad (14)$$

Так как операторы  $S_{\mu\nu}$  коммутируют с оператором  $\beta_5$ , то уравнение (14) инвариантно относительно преобразований, генерируемых операторами  $S_{\mu\nu}$ . Для завершения доказательства остается только найти явный вид операторов  $S_{\mu\nu}$  в  $\Psi$ -представлении. Вычисляя  $L_{\mu\nu} \equiv W^{-1} S_{\mu\nu} W$ , получаем операторы (7).

**Замечание 1.** Операторы (6), (7) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} + g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} L_{\mu\rho}), \quad (15)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}). \quad (16)$$

**Замечание 2.** Если в уравнении (4) положить  $\varkappa = 0$  и на функцию  $\Psi$  наложить пуанкаре-инвариантное условие

$$i \frac{\partial \Psi(\tau, x, q)}{\partial \tau} = m \Psi(\tau, x, q), \quad (17)$$

где  $m$  — фиксированный параметр, то система уравнений (4), (17) совпадает с обобщенным уравнением Майорана в форме Намбу [7]. Теорема 1 сохраняет силу и в этом случае.

Если же теперь операторы  $\beta_\mu$ ,  $S_{\rho\sigma}$  выбрать в представлении Дирака [8], то из системы уравнений (4), (17) получим обычное уравнение Майорана в форме Дирака [8]

$$(\beta_\mu p^\mu - m)\Psi(x, q_1, q_2) = 0. \quad (18)$$

Используя результаты работ [1, 4], можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 2.** Если на множество решений уравнения (4) наложить дополнительное условие  $p_\mu p^\mu \Psi > 0$  (или  $p_\mu p^\mu < 0$ ), то такое уравнение с дополнительным условием инвариантно относительно алгебры Ли группы  $SO(1, 5)$  (или  $SO(2, 4)$ ).

Из изложенного выше ясно, что метод канонических преобразований, который широко использовался Н.Н. Боголюбовым при построении теорий сверхтекучести и сверхпроводимости [9], весьма эффективно работает и при исследовании групповых свойств дифференциальных уравнений.

В заключение хотим выразить благодарность А.Г. Никитину за полезные советы и дискуссии.

1. Фушич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, № 1, 3–12; Препринт Ин-та теор. физ. АН УССР № 32Е Киев, 1970, 17 с.
2. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508–512.
3. Фушич В.И., *ДАН*, 1976, **230**, № 3, 570–573.
4. Фушич В.И., Сегеда Ю.Н., *Укр. мат. журн.*, 1976, **28**, № 6, 844–849.
5. Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фушич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1976, **29**, № 1, 82–94.
6. Majorana E., *Nuovo Cimento*, 1932, **9**, № 2, 335;  
Fradkin D.M., *Am. J. Phys.*, 1966, **34**, 314.
7. Nambu Y., *Supplement of the Progress of Theoretical Physics (Japan)*, 1966, **12**, № 37–38, 368.
8. Dirac P.A.M., *Proc. Roy. Soc. London A*, 1971, **322**, 435;  
Dirac P.A.M., *Proc. Roy. Soc. London A*, 1972, **328**, 1.
9. Боголюбов Н.Н., *Изв. АН СССР, сер. физ.*, 1947, **11**, 67.

# О новой алгебре инвариантности свободного уравнения Шредингера

В.И. ФУЩИЧ, Ю.Н. СЕГЕДА

В [1, 2] установлено, что максимальной кинематической группой инвариантности свободного уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = H \Psi(t, \mathbf{x}); \quad H = \frac{p_a^2}{2m}, \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (1)$$

является 12-параметрическая некомпактная группа Ли, содержащая в качестве подгруппы группу Галилея. Базисные элементы алгебры Ли этой группы инвариантности (максимальной кинематической алгебры инвариантности) являются дифференциальными операторами 1-го порядка.

В [3] найдена алгебра инвариантности уравнения (1) в классе дифференциальных операторов 2-го порядка, содержащая, кроме элементов максимальной кинематической алгебры инвариантности, еще симметричные квадратичные формы от элементов алгебры Галилея. В связи с этими результатами возникает естественный вопрос: существует ли алгебра инвариантности уравнения (1) в других классах операторов?

Одним из авторов настоящей заметки показано [4–6], что уравнения Максвелла, Дирака и Клейна–Гордона обладают дополнительной инвариантностью, отличной от лоренц-инвариантности. При этом важно подчеркнуть, что базисные элементы этой новой алгебры инвариантности являются интегродифференциальными операторами. Этот результат говорит о том, что имеется возможность искать новую алгебру инвариантности уравнения (1) в классе интегродифференциальных операторов.

Ниже дан положительный ответ на поставленный выше вопрос.

Задача о нахождении алгебры инвариантности уравнения (1) состоит в описании и явном построении всевозможных (в том или ином классе) операторов  $Q_A$ , удовлетворяющих условию

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - H, Q_A \right]_- \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2)$$

где  $\{A\}$  — некоторое множество индексов.

**Теорема.** Алгеброй инвариантности уравнения Шредингера (1) является алгебра Ли, изоморфная алгебре Ли группы Лоренца  $SO(1, 3)$ .

**Доказательство.** Как уже упоминалось, условия (2) выполняются для базисных элементов алгебры Ли группы Галилея

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \\ G_a = t p_a - m x_a, \quad M = m E, \quad [x_a, p_b] = i \delta_{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3,$$

$E$  — единичный оператор.

Рассмотрим такой интегриродифференциальный оператор

$$J_{0a} = \frac{1}{2m}(pG_a + G_ap) = t\tilde{p}_a - \frac{1}{2}(x_ap + px_a), \quad (3)$$

$$\tilde{p}_a \equiv p_ap/m; \quad p = (p_a^2)^{1/2} = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы  $\{J_{ab}, J_{0a}\}$  удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы  $SO(1, 3)$ :

$$[J_{ab}, J_{cd}]_- = i(\delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bc}J_{ad} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc}),$$

$$[J_{ab}, J_{0c}]_- = i(\delta_{ac}J_{0b} - \delta_{bc}J_{0a}), \quad [J_{0a}, J_{0b}]_- = -iJ_{ab}.$$

Так как условия (2) выполняются для операторов  $p_a$  и для операторов  $G_a$ , очевидно, что оно будет выполняться и для функций  $J_{0a}$  от этих операторов. Установлением этого факта и доказана теорема.

Приведенный результат, конечно, не означает, что уравнение (1) инвариантно относительно однородных преобразований Лоренца. Он означает лишь то, что на множестве решений уравнения (1) реализуется какое-то представление алгебры Ли группы  $SO(1, 3)$ , базисные элементы которой задаются формулами (3). Последний факт вытекает из того, что операторы  $J_{0a}$  порождают конечные преобразования координаты и импульса, отличные от преобразований Лоренца. Действительно,

$$x'_a = \exp(iJ_{0b}\theta_b)x_a \exp(-iJ_{0c}\theta_c) = x_a - (\mathbf{n}\mathbf{x})n_a +$$

$$+ t \left[ \frac{p'_a - p_a}{m} - \frac{(\mathbf{p}\mathbf{n})p}{mp'} + \frac{(\mathbf{p}\mathbf{n})n_a}{m} \right] + \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{n}\mathbf{x})n_a \frac{p}{p'} + \frac{p}{p'} (\mathbf{n}\mathbf{x})n_a \right],$$

$$x'_0 = t' = t, \quad p'_a = pn_a \operatorname{sh} \theta + (pn)n_a \operatorname{ch} \theta,$$

$$p' = p \operatorname{ch} \theta + (pn) \operatorname{sh} \theta, \quad (pn) = \pm p,$$

где  $n_a = \theta_a/\theta$ ,  $\theta = (\theta_a^2)^{1/2}$ ,  $n_a^2 = 1$ .

Авторы благодарят А.Г. Никитина за полезные дискуссии.

1. Hagen C.R., *Phys. Rev. D*, 1972, **5**, 377.
2. Niederer U., *Helv. Phys. Acta*, 1972, **45**, № 5, 802.
3. Boyer C.P., Kalnins E.G., Miller W. jr., *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, № 3, 499.
4. Фушич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
5. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508–509.
6. Фушич В.И., *ДАН*, 1976, **230**, № 3, 570–573.

# О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных

В.И. ФУЩИЧ

In this work there have been described in details a non-Lie method of the investigation of symmetry properties of the systems of partial differential equations. Conditions which are required for arbitrary system of differential equations to be invariant under the group  $U(2)$  are found. Dual symmetry of the Dirac and Maxwell equations is established. These equations have shown to be invariant under the transformations that don't change a time.

## Введение

Почти сто лет назад выдающийся норвежский математик Софус Ли создал теорию непрерывных групп. Он же предложил основные идеи и методы теоретико-группового анализа дифференциальных уравнений.

Не ставя перед собой задачи об исследовании групповых свойств дифференциальных уравнений, Г. Лоренц [1] и А. Пуанкаре [2] получили один из наиболее фундаментальных результатов в этой области, сыгравший революционизирующую роль в физике. Именно Г. Лоренц в 1904 г., не будучи знакомым с только что созданной теорией С. Ли, нашел преобразования, относительно которых уравнения Максвелла инвариантны в случае отсутствия зарядов и токов.

Пуанкаре [2, 3], обобщая и дополняя результаты Лоренца, показал, что уравнения Максвелла и в случае присутствия зарядов и токов инвариантны относительно тех же преобразований, если при этом плотности электрических зарядов и тока преобразуются соответствующим образом. Именно в этих статьях Пуанкаре впервые установил и детально изучил одно из самых важных свойств этих преобразований — групповую структуру, назвав эти преобразования именем Лоренца.

Из этого результата следуют все основные законы сохранения формулы релятивистской механики (правило сложения скоростей, формулы для энергии и импульса и т.д.). Здесь уместно подчеркнуть, что в работах Пуанкаре впервые был предложен теоретико-групповой подход для построения и анализа физической теории. В работах Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна построены основы новой механики и новой электродинамики<sup>1</sup>.

Бейтмен [4] и Куингам [5] в 1909 г. доказали, что уравнения Максвелла инвариантны относительно конформной группы  $C_4$ , содержащей в качестве подгруппы группу Лоренца. Совсем недавно было показано, что эта группа является максимальной группой инвариантности в смысле С. Ли. (О современном развитии идей и методов теории Ли см. книги Л.В. Овсянникова [6] и Н.Х. Ибрагимова [7] и цитируемую там литературу).

---

Теоретико-групповые методы в математической физике, Сб. науч. тр., Отв. ред. Ю.А. Митропольский, В.И. Фушич, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, С. 5–44.

<sup>1</sup>Принцип относительности, Сб. работ классиков релятивизма / Составитель А.А. Тяпкин. — М.: Атомиздат, 1973. — 480 с.

В работах [8, 9] для исследования групповых свойств дифференциальных уравнений релятивистской квантовой механики предложен нелиевский метод. С его помощью удалось обнаружить ранее неизвестную дополнительную  $SU(2) \otimes SU(2)$  — группу инвариантности уравнений Максвелла (см. [10]). Этот метод получил дальнейшее развитие и применение в работах [11–23]. Во второй статье настоящего сборника результаты Бейтмана [4], Кунигама [5] и только что упомянутый результат [11] объединены и усилены, т.е. доказано, что группой инвариантности уравнения Максвелла является группа  $C_4 \otimes GL(2) \otimes Gl(2)$ .

Для дальнейшего важно сразу же указать на ограниченность метода С. Ли. Как известно, он основан на инфинитезимальном подходе, поэтому алгебра инвариантности того или иного дифференциального уравнения ищется только в классе операторов первого порядка. Из сказанного ясно, что для отыскания новых алгебр, а значит и новых групп, инвариантности уравнений, которые в принципе не могут быть найдены с помощью классического метода С. Ли, необходимо существенно расширить класс операторов первого порядка. На основе этой идеи и были получены новые результаты [8–22] для многих систем дифференциальных уравнений.

Данная работа является дальнейшим развитием и обобщением нелиевского подхода к системам дифференциальных уравнений, встречающихся в квантовой механике. В ней, в частности, доказана теорема, устанавливающая при каких условиях произвольная однородная система дифференциальных уравнений в частных производных инвариантна относительно группы  $GL(2)$ .

Большой интерес представляет также задача, в некотором смысле обратная к рассматриваемой в настоящей статье: описать все уравнения инвариантные относительно заданной группы. В списке литературы, начиная со ссылки [29] приведены некоторые работы, выполненные в Институте математики АН УССР, которые посвящены описанию дифференциальных и интегродифференциальных уравнений, инвариантных относительно групп движения релятивистской и нерелятивистской квантовой механики.

### § 1. Нелиевский метод

В этом параграфе сформулирован нелиевский алгоритм вычисления алгебр инвариантности для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

**1.** Большинство уравнений математической физики имеет вид  $n$  уравнений с  $k$  неизвестными функциями  $\Psi_1(x), \Psi_2(x), \dots, \Psi_k(x)$ . В приложениях, особенно в квантовой теории, часто встречаются однородные линейные системы первого и второго порядков, которые могут быть записаны в виде

$$\hat{L}(x, \hat{p})\Psi(x) = \{A_{\mu\nu}(x)\hat{p}^\mu\hat{p}^\nu + A_\alpha(x)\hat{p}^\alpha + B(x)\}\Psi(x) = 0, \quad (1)$$

где  $A_{\mu\nu}(x)$ ,  $A_\alpha(x)$ ,  $B(x)$  — квадратные матрицы порядка  $k$ ;  $x \in R^n$ ,  $\hat{p}_\mu = ig^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ ,  $g^{\mu\nu}$  — метрический тензор с компонентами  $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = \dots = -g^{nn} = 1$ , по повторяющимся индексом подразумевается суммирование от 0 до  $n$ .

Будем предполагать, что элементы матриц  $A$ ,  $B$  и компоненты вектора-столбца  $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n\}$  являются бесконечно дифференцируемыми функциями, принадлежащими  $C_0^\infty(R^n)$ .

Типичным примером уравнения вида (1) является система Дирака

$$\hat{L}(\hat{p})\Psi(x) = (\gamma_\mu \hat{p}^\mu - m)\Psi(x) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $x \in R^4$  — пространство Минковского,  $\Psi(x)$  — вектор-столбец с четырьмя компонентами  $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4\}$ , зависящими от  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ ;  $m$  — постоянный коэффициент,  $\gamma_\mu$  — четыре матрицы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда–Дирака

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (3)$$

$\gamma_4 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$  — антиэрмитова матрица,  $\gamma_0$  — эрмитова матрица.

Для отыскания алгебры инвариантности уравнения (2) удобно представить его в шредингеровой форме

$$i \frac{\partial \Psi(t, x_1, x_2, x_3)}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) \Psi(t, x_1, x_2, x_3), \quad (4)$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) = \gamma_0 \gamma_a \hat{p}_a + \gamma_0 \gamma_4 m, \quad a = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Общепринятый гамильтониан Дирака получается из гамильтониана (5) с помощью унитарного преобразования

$$\hat{\mathcal{H}}^D = U \hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) U^\dagger = \gamma_0 \gamma_a \hat{p}_a + \gamma_0 m, \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \gamma_4). \quad (6)$$

Гамильтониан Дирака (5) является эрмитовым (даже существенно самосопряженным) оператором в гильбертовом пространстве  $H = (L^2(R^3))^4$ , где квадрат нормы вектора задается формулой

$$\|\Psi\|^2 = \int |\Psi(x)|^2 dx, \quad |\Psi(x)|^2 = \Psi^\dagger(x) \Psi(x) = \sum_{i=1}^4 |\Psi_i|^2.$$

**Определение 1.** Уравнение (1) инвариантно относительно некоторого множества операторов  $\hat{Q} = \{\hat{Q}_\lambda\} = \{\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \dots, \hat{Q}_N\}$ , если выполняются условия

$$\hat{L}(x, \hat{p}) \hat{Q}_A \Psi(x) = 0, \quad A = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (7)$$

В этом определении, конечно, предполагается, что область значений операторов  $\hat{Q}_A$ , заданных на множестве всех решений  $\Omega$  уравнения (1), принадлежит области определения оператора  $\hat{L}(x, \hat{p})$ . Условие (7), которое в дальнейшем будем называть условием инвариантности уравнения (1), означает, что операторы  $\hat{Q}_A$  отображают одно решение в другое, т.е. множество  $\Omega$  инвариантно относительно операторов  $\hat{Q}_A$ .

Иногда удобно условие инвариантности представить в виде коммутатора или антикоммутатора:

$$[\hat{L}(x, \hat{p}), \hat{Q}_A]_- \Psi = 0, \quad (8)$$

$$[\hat{L}(x, \hat{p}), \hat{Q}_A]_+ \Psi = 0, \quad (9)$$

где  $\Psi$  — произвольное решение уравнения (1).

В операторной форме условие (8) можно записать в виде

$$[\hat{L}(x, \hat{p}), \hat{Q}_A]_- = B_A \hat{L}(x, \hat{p}), \quad (10)$$

где  $B_A$  — некоторый оператор.

**Определение 2.** Если совокупность операторов  $\{\hat{Q}_A\}$  образует векторное пространство с лиевским законом умножения, то будем говорить, что уравнение (1) инвариантно относительно алгебры Ли.

Если операторы  $\{\hat{Q}_A\}$  являются базисными элементами алгебры инвариантности, то это означает, что выполняются соотношения

$$[\hat{Q}_A, \hat{Q}_B]_- = f_{ABC} \hat{Q}_C, \quad (11)$$

где  $f_{ABC}$  — структурные константы алгебры.

Теперь задачу отыскания лиевской алгебры инвариантности уравнений типа (1) можно сформулировать очень просто: требуется описать (по возможности наиболее широкой) класс операторов  $\{\hat{Q}_A\}$ , удовлетворяющих соотношениям (8), (11).

В дальнейшем главный упор делаем не на группы инвариантности уравнений, а на алгебры инвариантности. Группу инвариантности отыскиваем по найденной алгебре.

**2.** В инфинитезимальном классическом подходе С. Ли эта задача сводится к описанию операторов первого порядка вида

$$\hat{Q}_A = \xi_A^\mu(x, \Psi) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta_A^r(x, \Psi) \frac{\partial}{\partial \Psi_r}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n; \quad r = 0, 1, \dots, k, \quad (12)$$

удовлетворяющих соотношениям (8), (11), т.е. к описанию соответствующих функций  $\xi_A^\mu$  и  $\eta_A^r$ .

В настоящее время это направление группового анализа дифференциальных уравнений (ДУ) получило существенное развитие в работах Л.В. Овсянникова и его учеников и последователей. Ими разработаны и применены алгоритмы вычисления групп инвариантности для многих уравнений механики сплошных сред. Последние достижения в этой области подробно охарактеризованы в книге [6].

**3.** В подходе Ли основной акцент делается на групповой стороне задачи, поскольку существенно используются инфинитезимальные преобразования. Нас будет интересовать, прежде всего, алгебраическая сторона вопроса. Такое смещение акцентов из группы на алгебру позволяет обнаружить ограниченность постановки и метода С. Ли. Ограниченность его в следующем.

Во-первых, ДУ может быть инвариантно относительно некоторой совокупности операторов  $\{Q_A\}$ , которые *a priori* не принадлежат конечной алгебре Ли. Например, они могут образовывать алгебру Клиффорда, Йордана, супералгебру и т.д. Во-вторых, искомые операторы  $\hat{Q}_A$  в формуле (11) не всегда представимы в виде (12).

Отсюда ясно, что задачу об исследовании алгебраических свойств ДУ можно обобщить по меньшей мере в таких двух направлениях: 1) отказаться от требования (11), т.е. от условия, чтобы операторы  $\{\hat{Q}_A\}$  принадлежали алгебре Ли; 2) существенно расширить класс искомых операторов  $\hat{Q}_A$ , удовлетворяющих соотношениям (11), т.е. искать решения коммутационных соотношений (10), (11), например, в классе псевдодифференциальных или интегродифференциальных операторов.

Именно в этом последнем направлении, который мы назовем нелиевским подходом, и были получены первые результаты для уравнений Дирака и Максвелла.

Главный и самый трудный вопрос, возникающий в связи с нелиевским подходом к исследованию алгебраических свойств ДУ, состоит в следующем: каким способом конструктивно описать (вычислить) операторы  $\hat{Q}_A$ , не являющиеся операторами первого порядка, относительно которых множество решений ДУ остается инвариантными? То есть, необходимо указать метод вычисления операторов  $\{\hat{Q}_A\}$ . Очевидно, что алгоритм Ли для этих целей непригоден.

Нелиевский метод исследования теоретико-групповых свойств систем ДУ в частных производных предложен в работе [8, 9]. Он состоит из следующих этапов: 1) система ДУ с помощью невырожденного преобразования приводится к каноническому (или диагональному) виду, т.е. проводится максимальное расщепление системы ДУ на независимые (автономные) подсистемы; 2) находится алгебра инвариантности (АИ) преобразованного уравнения; 3) если операторы  $\{\hat{Q}_A\}$  АИ удовлетворяют коммутационным соотношениями (11), то устанавливается, какое представление алгебры Ли реализуют эти операторы в пространстве решений; 4) с помощью обратного преобразования находится АИ исходного уравнения; 5) по АИ вычисляется группа инвариантности ДУ.

**4.** В основе сформулированного алгоритма лежит одна из древних и, видимо, самых плодотворных и эффективных идей в теории дифференциальных уравнений — преобразования независимых и зависимых переменных. Приведем подробное описание этого алгоритма.

Для наших целей важную роль будет играть понятие символа оператора  $\hat{L}(x, \hat{p})$ . Символом оператора  $\hat{L}$  уравнения (1) является матрица вида

$$L(x, p) = A_{\mu\nu}(x)p^\mu p^\nu + A_\alpha(x)p^\alpha + B(x), \quad (13)$$

зависящая от переменных  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$ . В более общем случае символ оператора  $\hat{L}$  обычно определяется с помощью преобразования Фурье (подробно о символах см., например, в [24]):

$$\hat{L}(x, \hat{p})\Psi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{D(p)} L(x, p)e^{i(x,p)}\tilde{\Psi}(p)dp, \quad (14)$$

где  $\tilde{\Psi} \in C_0^\infty(R^n)$ ,  $\tilde{\Psi}(p) = F\Psi(x)$  — Фурье-образ  $\Psi(x)$ ,  $F$  — унитарный оператор Фурье, отображающий вектор из гильбертова пространства  $H$  в  $\tilde{H}$ ;  $\tilde{\Psi}(p) \in \tilde{H}$ ;  $D(p)$  — область интегрирования;

$$(x, p) = g^{\mu\nu}x_\mu p_\nu = g^{00}x_0 p_0 + g^{11}x_1 p_1 + \dots + g^{nn}x_n p_n.$$

Связь между символом  $L(x, p)$  и его оператором  $\hat{L}(x, \hat{p})$  задается формулами

$$\hat{L}(x, \hat{p}) = F^{-1}L(x, p)F, \quad (15)$$

$$L(x, p) = F\hat{L}(x, \hat{p})F^{-1}. \quad (16)$$

Формулы (15), (16) указывают путь реализации первого шага алгоритма. Действительно, поскольку  $L(x, p)$  для уравнения (1) является переменной матрицей, то задача о расщеплении уравнения (1) на максимальное число незацепляющихся уравнений редуцируется к следующей матричной задаче: посредством некоторого невырожденного преобразования  $W$  привести к диагональной или жордановой

форме матрицу (13) для произвольных  $p$  из  $D(p)$ . Известно, что диагонализация произвольной постоянной матрицы — это очень трудная проблема, имеющая решение только для специального класса матриц. В случае переменной матрицы проблема приводимости матриц к каноническому виду существенно усложняется. Кроме того, для отыскания явного вида операторов  $\{\hat{Q}_A\}$  нам необходимо знать явный вид операторов  $W$  и  $W^{-1}$ , диагонализирующих (или приводящих к виду Жордана) матрицу  $L(x, p)$ .

Условие инвариантности (7) в терминах символов имеет вид

$$L(x, p)Q_a\tilde{\Psi}(p) = 0, \quad (17)$$

$$Q_a = F\hat{Q}_AF^{-1}. \quad (18)$$

При этом, конечно, нужно предполагать или доказывать, что  $Q_A\tilde{\Psi}(p) \in \tilde{H}$ , если  $\tilde{\Psi} \in \tilde{H}$ .

Рассмотрим случай, когда существует невырожденное преобразование  $W(x, p)$ , приводящее матрицу к диагональному виду:

$$L' = WLW^{-1} = \begin{pmatrix} f_1(x, p) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(x, p) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_n(x, p) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

В этом случае приходим к такому результату: если функции  $f_1(x, p), f_2(x, p), \dots, f_n(x, p)$  одновременно инвариантны относительно преобразований

$$x' = \varphi(x, p), \quad p' = \varphi_p(x, p), \quad (20)$$

образующих группу Ли, то уравнения (1) инвариантны относительно той же группы.

Преобразования вида (20) будем называть геометрическими преобразованиями. Помимо геометрических преобразований уравнение (17) может быть инвариантным относительно чисто матричных преобразований, т.е. преобразований над компонентами вектор-функции  $\tilde{\Psi}(p)$ . Условия, когда такая инвариантность возможна, даются следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Если матрица  $L'$  имеет двукратное собственное значение, то уравнение (1) инвариантно относительно четырехмерной алгебры Ли группы  $GL(2)$ .*

**Доказательство.** Не умаляя общности, можем считать, что  $f_1 = f_2$ , тогда с матрицей  $L'(x, p)$  коммутирует следующий набор четырех независимых матриц:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где  $\sigma_0$  — единичная двухрядная матрица;  $\sigma_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) — двухрядные матрицы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Ли группы  $SU(2)$ :

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c,$$

$\varepsilon_{abc}$  — антисимметричный тензор,  $\varepsilon_{123} = 1$ .

Операторы  $\hat{Q}_A$ , коммутирующие с оператором  $\hat{L}(x, \hat{p})$  исходного уравнения (1), вычисляются по формулам

$$\hat{Q}_a = F^{-1}(W^{-1}Q'_A W)F = (WF)^{-1}Q_a WF, \quad (22)$$

$$\hat{Q}_A = \hat{W}^{-1}\hat{Q}'_A \hat{W}, \quad \hat{W} = F^{-1}WF. \quad (23)$$

Очевидно, что операторы  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ , построенные по матрицам (21) с помощью формул (22), (23), удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры  $GL(2)$ :

$$[\hat{Q}_a, \hat{Q}_b]_- = 2i\varepsilon_{abc}\hat{Q}_c, \quad [\hat{Q}_4, \hat{Q}_a]_- = 0, \quad a, b, c = 1, 2, 3. \quad (24)$$

**Замечание 1.** При приведении символа  $L(x, p)$  к диагональному виду и применении формул (22), (23) необходимо учитывать следующее. В символах  $L(x, p)$ ,  $W(x, p)$  переменные  $x$  и  $p$  являются коммутирующими величинами. Для операторов, вследствие некоммутативности  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$ , ситуация существенно усложняется. Этого усложнения иногда удается избежать, если оператор исходного уравнения можно представить в виде формально симметричного оператора

$$\hat{K} = \hat{L}(x, \hat{p}) + \hat{L}^*(\hat{p}, x).$$

Очевидно, что если  $\hat{L}$  не зависит от  $x$ , то такие усложнения не возникают. В дальнейшем будут рассматриваться операторы  $\hat{L}$ , не зависящие от  $x$ .

**Замечание 2.** Если матрица  $L'$  имеет более чем два кратных собственных значения, то алгебра инвариантности уравнения (1) будет шире алгебры  $GL(2)$ . Иначе говоря, чем больше кратность собственных значений матрицы  $L'$ , тем шире алгебра инвариантности уравнения (1).

**Замечание 3.** В том случае, когда матрица  $L(x, p)$  не может быть приведена к диагональному виду посредством невырожденного преобразования, ее следует привести к форме Жордана. Применение этой формы существенно облегчает задачу отыскания алгебры инвариантности.

Зная алгебру инвариантности, по формулам

$$x'_\mu = \exp\{i\hat{Q}_a\theta_A\}x_\mu \exp\{-i\hat{Q}_B\theta_B\}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n, \quad (25)$$

$$\Psi'(x) = \exp\{i\hat{Q}_A\theta_A\}\Psi(x) \quad (26)$$

находим преобразования для зависимых и независимых переменных, относительно которых уравнения (1) инвариантны. Здесь  $\theta_A$  — параметры группы инвариантности.

**Замечание 4.** Теорема 1 остается верной и в том случае, когда матрица  $L'$  имеет жорданову форму, один из блоков которой является диагональной матрицей с двумя совпадающими элементами.

Приведенный алгоритм может быть успешно применен и к некоторым нелинейным уравнениям, если последние с помощью обратимого преобразования сводятся к линейным уравнениям.

Чаще всего  $L(x, p)$ , встречающиеся в задачах квантовой механики, являются матрицами высокого порядка и содержат малое число ненулевых элементов. Поэтому имеет, видимо, смысл создать вычислительные программы для приведения таких разреженных матриц к канонической форме.

В заключение следует отметить, что применение и полная реализация описанного алгоритма к конкретным системам дифференциальных уравнений в частных производных, встречающихся в математической и теоретической физике, представляет собой отдельную, иногда весьма трудную, задачу.

## § 2. Теоретико-алгебраический анализ уравнения Дирака

Применим описанный алгоритм к уравнению (4). Детальное рассмотрение этого алгоритма для уравнения Дирака существенно для нас потому, что его изложение содержит все элементы, присущие уравнениям и более общего вида, исследованным в настоящем сборнике.

1. Прежде всего применим теорему 1 к уравнению (4). Символ гамильтониана Дирака

$$\mathcal{H}(p) = \gamma_0(\gamma_a p_a + \gamma_4 m), \quad -\infty < p_a < \infty, \quad (27)$$

не зависит от переменной  $x$ . Это обстоятельство значительно упрощает задачу реализации первого шага алгоритма — приведение матрицы  $\mathcal{H}(p)$  к диагональному виду. Поскольку матрицы  $\gamma_\mu$  между собой не коммутируют, то невозможно привести их одновременно к диагональному виду. Можно, конечно, выбрать явное представление для матриц Дирака и, записав  $\mathcal{H}(p)$  в виде одной матрицы, попытаться привести ее к диагональному виду. Это действительно нетрудно сделать, но мы поступим иначе.

Воспользуемся свойством символа гамильтониана Дирака, а именно:

$$\mathcal{H}^2(p) = (p_a^2 + m^2) \hat{I}, \quad (28)$$

где  $\hat{I}$  — единичная четырехрядная матрица. В силу эрмитовости матрицы  $\mathcal{H}(p)$  для произвольных действительных  $p_a$  и условия (28) с помощью некоторого невырожденного преобразования  $W(p)$  матрица  $\mathcal{H}$  приводится к диагональному виду

$$\mathcal{H}'(p) = W(p)\mathcal{H}(p)W^{-1}(p) = \gamma_0 E, \quad (29)$$

где

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2)^{1/2}. \quad (30)$$

Принимая во внимание явную структуру  $\mathcal{H}'(p)$  и используя теорему 1, приходим к следующему результату.

**Теорема 2.** Уравнение (4) инвариантно относительно алгебры Ли группы  $GL \otimes GL(2) \supset SU(2) \otimes SU(2)$ .

Приведенное краткое доказательство одного из результатов работ [8, 9] обладает тем недостатком, что явно не указаны матрицы  $W(p)$ , а значит и операторы  $\hat{W}(\hat{p})$ , с помощью которых находятся базисные элементы  $\{\hat{Q}_A\}$  алгебры Ли группы

$GL(2)$ . Имеется много матриц, приводящих  $\mathcal{H}(p)$  к диагональному виду. Воспользовавшись предыдущей теоремой, легко описать целый класс невырожденных матриц, приводящих  $\mathcal{H}(p)$  к диагональному виду.

Обозначим через  $V(p)$  какую-то одну из множества матриц, диагонализующих  $\mathcal{H}(p)$ .

**Теорема 3.** Произвольное невырожденное преобразование  $W(p)$ , приводящее  $\mathcal{H}(p)$  к виду (29), задается формулой

$$W(p) = V \cdot T, \quad W^{-1} = T^{-1}V^{-1}. \quad (31)$$

Здесь  $T$  — произвольная невырожденная матрица, принадлежащая алгебре  $GL(2) \otimes GL(2)$ .

**Доказательство.** Для доказательства достаточно заметить, что  $GL(2) \otimes GL(2)$  является максимальной алгеброй, коммутирующей с матрицей  $\mathcal{H}(p)$ .

**Замечание 5.** Все известные в литературе преобразования (в том числе и исторически первое преобразование Прайса–Фолди–Воутхойзена [25, 26] и многие другие), диагонализующие гамильтониан Дирака, имеют структуру (31).

**2.** Как пример такого преобразования можно выбрать переменную матрицу вида (см. [8, 9]):

$$W(p) = \exp \left\{ \frac{\pi}{4} \frac{\gamma_0 \mathcal{H}(p)}{E} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{\gamma_0 \mathcal{H}}{E} \right), \quad (32)$$

$E \neq 0$  для всех  $-\infty < p_a < \infty$ . По формуле (15) находим унитарное интегральное преобразование

$$\hat{W}(\hat{p}) = F^{-1}W(p)F = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \gamma_0 \frac{\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})}{\hat{E}(\hat{p})} \right\}, \quad (33)$$

где  $\hat{E}(\hat{p}) = (p_a^2 + m^2)^{1/2}$  — псевдодифференциальный оператор. Ввиду того, что символ  $W(p)$  не зависит от  $x$ , формула (33) получается из (32) простой заменой переменных  $p_a$  операторы  $\hat{p}_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}$ .

Действуя оператором  $\hat{W}(\hat{p})$  слева на уравнение (4), получаем

$$i \frac{\partial \Phi(t, x_1, x_2, x_3)}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}) \Phi(t, x_1, x_2, x_3), \quad (34)$$

$$\hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}) = \hat{W}(\hat{p}) \hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) W^{-1}(\hat{p}) = \gamma_0 \hat{E}(\hat{p}), \quad (35)$$

$$\Phi(t, \vec{x}) = \hat{W}(\hat{p}) \Psi(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Уравнение (34) представляет собой расщепленную систему четырех псевдодифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Phi_a(t, \vec{x})}{\partial t} &= \hat{E}(\hat{p}) \Phi_a(t, \vec{x}), & a &= 1, 2, \\ i \frac{\partial \Phi_{a+2}(t, \vec{x})}{\partial t} &= -\hat{E}(\hat{p}) \Phi_a(t, \vec{x}), & a &= 1, 2. \end{aligned} \quad (37)$$

Очевидно, что с оператором  $\hat{\mathcal{H}}'(\hat{p})$  коммутируют такие восемь матриц:

$$S_{kl} = \frac{i}{4}(\gamma_k \gamma_l - \gamma_l \gamma_k), \quad k, l = 1, 2, 3, 4, \quad S_{05} = \gamma_0, \quad S_{00} = \hat{I}. \quad (38)$$

Эти матрицы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [S_{kl}, S_{nr}]_- &= i(g_{kr} S_{ln} - g_{nk} S_{lr} + g_{ln} S_{kr} - g_{lr} S_{nk}), \\ [S_{kl}, S_{50}]_- &= 0, \quad [S_{kl}, S_{00}]_- = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Матрицы  $S_{kl}$  образуют базис шестимерной алгебры Ли группы  $O(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)$ . Вычисляя собственные значения операторов Казимира алгебры  $O(4)$ , нетрудно показать, что эти матрицы реализуют следующее представление:

$$D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes D\left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (40)$$

Базисные элементы  $\{\hat{Q}_A, A = 1, 2, \dots, 8\} = \{\hat{S}_{kl}(\hat{p}), \hat{S}_{50}(\hat{p}), \hat{S}_{00}\}$  алгебры  $GL(2) \oplus GL(2) \supset O(4)$ , относительно которой исходное уравнение (4) инвариантно, вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \hat{S}_{kl}(\hat{p}) &= \hat{W}^{-1}(\hat{p}) S_{kl} \hat{W}(\hat{p}) = S_{kl} + \hat{\Sigma}_{kl}(\hat{p}), \\ \hat{\Sigma}_{kl}(\hat{p}) &= (S_{5k} \hat{p}_l - S_{5l} \hat{p}_k) \left\{ \hat{E}^{-1}(\hat{p}) - 2i S_{5r} \hat{p}_r \hat{E}^{-2}(\hat{p}) \right\}, \\ \hat{S}_{05}(\hat{p}) &= \frac{\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})}{\hat{E}(\hat{p})}, \quad S_{00} = \hat{I}, \quad k, l, r = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (41)$$

Из формулы (41) видно, что базисные элементы алгебры являются интегродифференциальными операторами. Вся интегральность в формулах (41) содержится в операторе  $\hat{E}(\hat{p})$ , который является корнем квадратным из положительного оператора  $\hat{E}^2 = p_a^2 + m^2$ .  $\hat{E}(\hat{p})$  можно задавать как с помощью символа, так и с помощью формулы

$$\hat{E}(\hat{p})\Psi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ip(x-y)} (p_a^2 + m^2)^{1/2} \Psi(y) dp dy.$$

Подытожим все сказанное в виде следующего утверждения.

**Теорема 4.** Алгеброй инвариантности уравнения Дирака является восьмимерная алгебра  $GL(2) \otimes GL(2)$ , базисные элементы которой задаются интегродифференциальными операторами (41).

**3.** Хорошо известно, что уравнение Дирака инвариантно относительно алгебры Пуанкаре  $P(1, 3)$ , базисные элементы  $\{\hat{Q}_A\} = \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$  которой задаются дифференциальными операторами первого порядка:

$$\begin{aligned} P_\mu &= \hat{p}_\mu = -ig^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \\ J_{\mu\nu} &= x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_-. \end{aligned} \quad (42)$$

Нетрудно проверить, что совокупность операторов (41) и (42) не образует алгебры Ли.

Итак, уравнение Дирака обладает двумя типами симметрии: с одной стороны, имеется инвариантность относительно 10-мерной алгебры  $P(1, 3)$ , обусловленная инвариантностью относительно пространственно-временных преобразований, с другой, — инвариантность относительно 8-мерной алгебры (41), обусловленная инвариантностью относительно преобразований компонент вектор-функции  $\Psi(x)$ .

Возникает естественное желание объединить эти две симметрии, т.е. найти 18-мерную алгебру  $G$  инвариантности уравнения (2), содержащую в качестве подалгебры алгебры  $P(1, 3)$  и  $GL(2) \otimes GL(2)$ . В работе [19] такое объединение осуществлено.

**Теорема 5 [9].** *Алгеброй инвариантности уравнения Дирака является 18-мерная алгебра Ли, базисные элементы которой задаются дифференциальными операторами (42) и интегродифференциальными операторами*

$$\hat{Q}_{ab} = S_{ab} + \hat{\xi}_{ab}(\hat{p}), \quad a, b = 1, 2, 3, \quad \hat{Q}_{0a} = i\hat{S}_{05}(\hat{p})\hat{Q}_{bc}, \quad (43)$$

$$\hat{\xi}_{ab} = \frac{i}{m}(\gamma_a \hat{p}_b - \gamma_b \hat{p}_a) \{1 + i\gamma_4 \hat{S}_{05}(\hat{p})\}. \quad (44)$$

Доказательство этой теоремы осуществляется с помощью конкретной реализации указанного алгоритма. Интегральный оператор, расщепляющий систему (2) на четыре независимых уравнения, имеет вид

$$\hat{W}(\hat{p}) = \exp \left\{ i \frac{S_{4a} \hat{p}_a}{\hat{p}} \arctg \frac{\hat{p}}{m} \right\} \exp \left\{ \frac{S_{ab} \hat{p}_c}{\hat{p}} \arctg \frac{\hat{p}}{\hat{E}(\hat{p})} \right\},$$

$$\hat{p} = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}.$$

Все приведенные выше результаты верны и для произвольного пуанкаре-инвариантного ДУ, описывающего свободное движение частицы со спином  $s > \frac{1}{2}$ . Существует только одно пуанкаре-инвариантное уравнение движения для частицы и античастицы с нулевой массой и спином  $s = \frac{1}{2}$ , а именно двухкомпонентная система Вейля

$$i \frac{\partial \chi(t, \vec{x})}{\partial t} = \sigma_a \hat{p}_a \chi(t, \vec{x}), \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix},$$

не обладающая дополнительной симметрией  $SU(2) \otimes SU(2)$ .

Уравнение Максвелла (в вакууме) дополнительно инвариантно относительно группы  $GL(2) \otimes GL(2)$ .

Сформулированные выше теоремы можно перенести (и усилить) и на системы более общего вида, например системы уравнений с постоянными матрицами

$$(S_{n+1, \mu} \hat{p}^\mu + S_{n+1, n+2}) \Psi(x) = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, n, \quad (45)$$

где матрицы  $S_{n+1, \mu}$ ,  $S_{n+1, n+2}$  вместе с матрицами  $S_{\mu\nu}$ ,  $S_{\mu, n+2}$  реализуют произвольное конечномерное представление алгебры Ли группы  $O(1, n+2)$ . В класс уравнений вида (45) входит система уравнений Максвелла в  $(1+n)$ -мерном пространстве Минковского:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\nu\alpha}(x)}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\alpha\mu}(x)}{\partial x_\nu} = 0, \quad \frac{F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (46)$$

Для бесконечной системы ДУ вида (45) описанный алгоритм работает так же эффективно (см. [18]).

**4.** Уравнения Дирака и Максвелла принадлежат к гиперболическим системам. Они, как мы показали, обладают  $O(4)$ -симметрией. Выясним теперь такой вопрос: обладают ли такой же симметрией ультрагиперболические и эллиптические системы уравнений?

Рассмотрим уравнения типа Дирака в четырехмерном пространстве Минковского, где длина вектора задается формулой

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2, \quad x_0 = t. \quad (47)$$

В этом пространстве уравнение типа Дирака имеет вид

$$(\gamma_0 \hat{p}_0 - \gamma_1 \hat{p}_1 - \gamma_2 \hat{p}_2 - i\gamma_3 \hat{p}_3) \Psi(x) = m\Psi(x). \quad (48)$$

Система (48), как и обычные уравнения Дирака и Максвелла, заданные в  $(1+n)$ -мерном пространстве Минковского, обладает тем важным свойством, что из нее с помощью исключения неизвестных функций получаем одно и то же дифференциальное уравнение второго порядка для всех компонент  $\Psi_k$  вектор-функции  $\Psi$ :

$$(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2) \Psi_k(x) = m^2 \Psi_k(x). \quad (49)$$

Именно это свойство уравнений типа Дирака и Максвелла является истинной первопричиной дополнительной  $O(4)$ -симметрии. В других терминах это означает, что характеристические многообразия (формы) одни и те же для обоих типов уравнений.

**Теорема 6.** Уравнение (48) инвариантно относительно алгебры  $O(4)$ .

Доказательство не приводим, так как оно аналогично доказательству теоремы 4. Оператор невырожденного преобразования, расщепляющий систему (48) на четыре независимых псевдодифференциальных уравнения

$$\gamma_4 (\hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2)^{1/2} \Phi(t, \vec{x}) = m^2 \Phi(t, \vec{x}), \quad (50)$$

имеет вид

$$\hat{W}(\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \gamma_4 \frac{\gamma_0 \hat{p}_0 - \gamma_1 \hat{p}_1 - \gamma_2 \hat{p}_2 - \gamma_3 \hat{p}_3}{(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2)^{1/2}} \right\}, \quad \Phi(t, \vec{x}) = \hat{W}(\hat{p}) \Psi(t, \vec{x}). \quad (51)$$

Эллиптическая система ДУ вида

$$(\gamma_0 \hat{p}_0 - i\gamma_1 \hat{p}_1 - i\gamma_2 \hat{p}_2 - i\gamma_3 \hat{p}_3) \Psi = m\Psi \quad (52)$$

обладает той же симметрией, что и уравнение (22).

Если из системы (52) найти уравнения для компонент вектор-функции  $\Psi$ , то получим для каждой компоненты  $\Psi_k$  уравнение Гельмгольца в четырехмерном пространстве

$$(\hat{p}_0^2 + \hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2) \Psi_k(x) = m^2 \Psi_k(x). \quad (53)$$

Вкратце резюмировать сказанное в этом пункте можно так: уравнения (2), (48), (52) инвариантны относительно различных пространственно-временных (геометрических) преобразований, но все они обладают одной и той же (негеометрической)  $O(4)$ -симметрией.

Рассмотренные нами системы являются уравнениями гиперболического и эллиптического типа. Существуют и параболические системы ДУ, обладающие  $O(4)$ -симметрией (см. [26]).

Нетрудно выписать систему ДУ, которая не обладает никакой геометрической симметрией, но обладает негеометрической симметрией.

Для полноты упомянем, что нелиевский алгоритм был применен к более сложным системам, чем уравнения Дирака.

Рассмотрим систему уравнений первого порядка вида

$$(\beta_\mu \hat{p}^\mu - m) \Psi(t, \vec{x}) = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (54)$$

где постоянные матрицы  $\beta_\mu$  удовлетворяют алгебре

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\nu \beta_\lambda \beta_\mu = \beta_\mu g_{\nu\lambda} + \beta_\nu g_{\lambda\mu}. \quad (55)$$

Система (54), известная в литературе как уравнения Кеммера–Деффина–Петье (КДП), представляет собой систему пяти уравнений, если неприводимое представление алгебры (55) реализовать матрицами  $5 \times 5$ , либо систему десяти уравнений, если неприводимое представление алгебры (55) реализовать матрицами  $10 \times 10$ . Матрицы  $\beta_\mu$  вырождены и обладают большим числом нулей.

Оператор  $\hat{L} = \beta_\mu \hat{p}^\mu$  в том случае, когда матрицы  $\beta_\mu$  реализуют пятимерное представление алгебры (55), имеет трехмерное нуль-пространство. Если матрицы  $\hat{L}$  реализуют 10-мерное представление, то оператор  $\hat{L}$  имеет четырехмерное нуль-пространство.

В работе [14] доказано, что уравнение КДП обладает  $SU(3)$ -симметрией.

**5.** В заключение этого параграфа укажем на несколько уравнений, для которых интересно и важно (с физической точки зрения) применить описанный алгоритм.

1. Уравнения Максвелла в различных средах.
2. Уравнения теории гравитации.
3. Уравнения статистической физики — уравнения Больцмана, Фоккера–Планка, Власова, Боголюбова.
4. Уравнение Ламе.
5. Уравнение, описывающее распространение волн в кристалле:

$$\varepsilon_{klmn}(x) \frac{\partial^2 \Psi_l(t, \vec{x})}{\partial x_n \partial x_m} = \rho(x) \frac{\partial^2 \Psi_k(t, \vec{x})}{\partial t^2}.$$

6. Уравнения типа Дирака с потенциалами, например

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu \hat{p}^\mu + \gamma_\mu x^\mu (1 + \lambda x_\alpha x^\alpha) - m\} \Psi(x) &= 0, \\ \{\gamma_\mu \hat{p}^\mu - \lambda_1 J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + \lambda_2 \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} J^{\mu\nu} J^{\alpha\beta}\} \Psi(x) &= 0, \end{aligned}$$

$\lambda_1, \lambda_2$  — некоторые параметры.

7. Интегро-дифференциальное уравнение вида

$$i \frac{\partial \Psi(t, \vec{x})}{\partial t} = \left\{ a_1 (\vec{S} \vec{\hat{p}}) + a_2 \frac{(\vec{S} \vec{\hat{p}})^2}{\hat{p}^2} + a_3 \frac{(\vec{S} \vec{\hat{p}})^3}{\hat{p}^3} \right\} \Psi(t, \vec{x}),$$

$$\hat{p} \Psi \neq 0, \quad \hat{p} \equiv (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2)^{1/2}.$$

Если в этом уравнении матрицы  $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$  реализуют представление  $D(1, 0) \oplus D(0, 1)$  алгебры Ли группы  $SU(2) \otimes SU(2)$ ,  $a_1 = \sigma_2$  — матрица Паули размерности  $6 \times 6$  и  $a_2 = a_3 = 0$ , то такое уравнение совпадает с уравнением Максвелла. Представляет так же интерес исследовать уравнение типа Максвелла с нелинейным членом

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sigma_2 (\vec{S} \vec{p}) \Psi + \lambda (\Psi^+ \Psi) \Psi,$$

где  $\Psi$  — вектор-столбец, компонентами которого являются вектора электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей,  $\Psi^+ = (E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3)$  — вектор-строка.

### 8. Система уравнений

$$i \frac{\partial \Psi(t, \vec{x})}{\partial t} = \left\{ \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2}{2m} + a_0(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) + a_1(S_1 \hat{p}_1 + S_2 \hat{p}_2 + S_3 \hat{p}_3) + \right. \\ \left. + a_2(S_1 \hat{p}_1 + S_2 \hat{p}_2 + S_3 \hat{p}_3)^2 + a_3(S_1 \hat{p}_1 + S_2 \hat{p}_2 + S_3 \hat{p}_3)^3 \right\} \Psi(t, \vec{x}).$$

Эту систему можно рассматривать как определенное обобщение известного скалярного уравнения Шредингера, описывающего движение частицы со спином в нерелятивистской квантовой механике. Если положить параметры  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ , такое уравнение совпадает с уравнением Шредингера, описывающим движение бесспиновой частицы. В квантовой механике, построенной на основе этой системы уравнений, энергия свободной частицы, обладающей спином  $s$ , определяется формулой

$$E(p, s) = \frac{p^2}{2m} + a_0 \vec{S}^2 + a_1 \vec{S} \vec{p} + a_2 (\vec{S} \vec{p})^2 + a_3 (\vec{S} \vec{p})^3. \quad (56)$$

Для бесспиновых частиц  $s = 0$  эта формула совпадает с общепринятой формулой для энергии частицы в квантовой механике

$$E(p) = \frac{\vec{p}^2}{2m}.$$

Особенность формулы (56) состоит в том, что спиновые  $s$  и импульсные переменные  $\vec{p}$  входят в нее на равных правах, т.е. имеется симметрия между импульсом и спином. Общепринятая формулировка нерелятивистской квантовой механики не обладает такой симметрией. Если спин частицы, как это принято считать, есть такая же степень свободы, как и координата частицы, то формула (56) отражает этот факт.

### 9. Система уравнений второго порядка

$$\left\{ A_{\mu\nu}(x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + A_\mu(x^2) \frac{\partial}{\partial x^\mu} + B(x^2) \right\} \Psi(x) = f(x^2),$$

где  $A_{\mu\nu}(x^2)$ ,  $A_\mu(x^2)$ ,  $B(x^2)$  — квадратные матрицы, зависящие от  $x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ ,  $f(x^2)$  — заданная вектор-функция.

## 10. Система шести обыкновенных уравнений четвертого порядка

$$\lambda \frac{d^4 \vec{x}_1}{dt^4} + \lambda_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = F_1 \left( \vec{x}_1, \vec{x}_2, \frac{d\vec{x}_1}{dt}, \frac{d\vec{x}_2}{dt}, \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2}, \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} \right),$$

$$\lambda \frac{d^4 \vec{x}_2}{dt^4} + \lambda_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = F_2 \left( \vec{x}_1, \vec{x}_2, \frac{d\vec{x}_1}{dt}, \frac{d\vec{x}_2}{dt}, \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2}, \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} \right).$$

Эту систему следует рассматривать как обобщение уравнений Ньютона для двух взаимодействующих частиц. Системы такого типа могут быть получены из обобщенного уравнения Эйлера–Лагранжа, впервые предложенного М.В. Остроградским [28]. Функция Лагранжа в механике Остроградского зависит от производных произвольного порядка.

Геометрическая группа инвариантности этой системы уравнений, порожденная преобразованиями в пространстве  $E(3) \otimes E(1)$ , значительно шире группы Галилея — десятипараметрической группы движений классической механики. Кроме того, эта система уравнений при определенных  $F_1$  и  $F_2$  обладает негеометрической группой инвариантности.

11. Бесконечная цепочка линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = (a_1 + a_2) \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2,$$

.....

$$m_n \frac{d^2 \vec{x}_n}{dt^2} = a_n \vec{x}_{n-1} + (a_n + a_{n+1}) \vec{x}_n + a_{n+1} \vec{x}_{n+1},$$

.....

$n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $m_1, m_1, a_1, a_2, \dots, a_n$  — постоянные величины.

## 12. Система обыкновенных ДУ

$$\sum_{k=0}^N A_k(t) \frac{d^k X(t)}{dt^k} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

$A_k(t)$  — переменные матрицы.

## 13.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{x}) = \left\{ \lambda \gamma_0 m + \lambda_1 \hat{p}^2 + \lambda_2 (\gamma_1 \hat{p}_1^2 + \gamma_2 \hat{p}_2^2 + \gamma_3 \hat{p}_3^2) \right\} \Psi(t, \vec{x}) + \lambda_3 \Psi^+ \Psi.$$

## 14.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \vec{x}) = \left\{ m + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \lambda_1 (\gamma_1 \hat{p}_2 \hat{p}_3 + \gamma_2 \hat{p}_3 \hat{p}_1 + \gamma_3 \hat{p}_1 \hat{p}_2) \right\} \Psi(t, \vec{x}) +$$

$$+ \lambda_2 \Psi^+ \gamma_0 \Psi + \lambda_3 \Psi^+ \Psi,$$

$$\left\{ \gamma_0 p_0^2 + \sqrt{2} p_0 (\gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_3 p_3) + i \gamma_4 p_a^2 \right\} \Psi(t, \vec{x}) -$$

$$- m^2 \Psi(t, \vec{x}) - \lambda \Psi^+ \gamma_0 \Psi = 0.$$

15.

$$(\gamma_0 \hat{p}_0^2 - \gamma_1 \hat{p}_1^2 - \gamma_2 \hat{p}_2^2 - \gamma_3 \hat{p}_3^2) \Psi(t, \vec{x}) = m^2 \Psi(t, \vec{x}) + \lambda \Psi^+ \gamma_0 \Psi.$$

16.

$$\left\{ \Gamma_0 \hat{p}_0^2 - \Gamma_1 \hat{p}_1^2 - \Gamma_2 \hat{p}_2^2 - \Gamma_3 \hat{p}_3^2 - \sqrt{2} (\Gamma_4 \hat{p}_1 \hat{p}_2 + \Gamma_5 \hat{p}_1 \hat{p}_3 + \Gamma_6 \hat{p}_2 \hat{p}_3) \right\} \Psi(t, \vec{x}) = m^2 \Psi(t, \vec{x}) + \lambda \Psi^+ \gamma_0 \Psi.$$

Здесь  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_6$  — базисные элементы алгебры Клиффорда. Нижайшее неприводимое представление этой алгебры реализуется восьмимерными матрицами. В этом случае  $\Psi$  — вектор-столбец с компонентами  $\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_8\}$ . При  $\lambda = 0$  эта система не эллиптическая, не параболическая и не гиперболическая, т.е. это система уравнений промежуточного типа. Она инварианта, как и система (15), относительно негеометрических преобразований, образующих группу  $U(2) \otimes U(2)$ .

17. Уравнения для специальных функций. Для исследования групповых свойств произвольного обыкновенного дифференциального уравнения (в том числе и уравнений для специальных функций) следует поступить следующим образом: заменить одно обыкновенное дифференциальное уравнение высокого порядка эквивалентной системой ДУ первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

затем воспользоваться тем известным фактом, что система обыкновенных ДУ эквивалентна одному линейному ДУ с частными производными первого порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial \Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial t} + F_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0.$$

Групповые свойства этого уравнения в частных производных можно изучить с помощью лиевского или нелиевского метода.

Отметим также, что, воспользовавшись указанной эквивалентностью, можно решить и обратную задачу группового анализа, описать всевозможные системы обыкновенных ДУ, инвариантные относительно групп движений нерелятивистской и релятивистской механики (групп Галилея и Пуанкаре). При решении обратной задачи можно использовать методы работ [28–46]. Более подробно все эти вопросы будут рассмотрены в других наших публикациях.

18. Интегро-дифференциальная система вида

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = a_1 \text{rot } \vec{E} + a_2 \sqrt{\hat{p}_a^2} \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = b_1 \text{rot } \vec{H} + b_2 \sqrt{\hat{p}_a^2} \vec{H}.$$

Если в этом уравнении положить  $a_2 = b_2 = 0$ ,  $a_1 = -1$ ,  $b_1 = 1$  и добавить условие  $\text{div } \vec{D} = 0 = \text{div } \vec{B}$ ,  $\vec{B} = \vec{H}$ ,  $\vec{D} = \vec{E}$ , то оно совпадет с уравнением Максвелла в вакууме. В этом случае, когда  $a_1 = b_1 = 0$ ,  $a_2 = b_2 = 1$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ,  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ , уравнение инвариантно относительно 10-мерной алгебры Пуанкаре (геометрическая симметрия) и алгебры Ли группы  $U(3) \otimes U(3)$  (негеометрическая симметрия).

Следует отметить, что для исследования групповых свойств такой псевдодифференциальной системы совершенно не пригоден лиевский метод, несмотря на то,

что уравнение обладает очевидной симметрией относительно группы трехмерных вращений и сдвигов.

19. Система уравнений четвертого порядка

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 \vec{E} &= a_0 \vec{H} + c_0 \vec{E} + a_1 \operatorname{rot} \vec{H} + c_1 \operatorname{rot} \vec{E} + \\ &+ a_2 \hat{p}_a^2 \vec{H} + c_2 \hat{p}_a^2 \vec{E} + a_4 (\hat{p}_a^2)^2 \vec{H} + c_4 (\hat{p}_a^2)^2 \vec{E}, \\ \hat{p}_0 \vec{H} &= b_0 \vec{E} + d_0 \vec{H} + b_1 \operatorname{rot} \vec{E} + d_1 \operatorname{rot} \vec{H} + \\ &+ b_2 \hat{p}_a^2 \vec{E} + d_2 \hat{p}_a^2 \vec{H} + b_4 (\hat{p}_a^2)^2 \vec{E} + d_4 (\hat{p}_a^2)^2 \vec{H},\end{aligned}$$

где  $a, b, c, d$  — постоянные величины или функции от инвариантов электромагнитного поля  $z_1 = \vec{E}\vec{H}$  и  $z_2 = \vec{E}^2 - \vec{H}^2$ . К этим уравнениям можно добавить условия типа  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$  или другие граничные условия, диктуемые конкретной физической задачей.

20. Система уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}(\hat{p}_0^2 - \hat{p}_a^2) \vec{E} &= f_1(z_1, z_2) \vec{E} + f_2(z_1, z_2) \vec{H}, \\ (\hat{p}_0^2 - \hat{p}_a^2) \vec{H} &= g_1(z_1, z_2) \vec{E} + g_2(z_1, z_2) \vec{H}.\end{aligned}$$

21. Уравнения

$$\hat{p}_\mu^2 \vec{E} = 0, \quad \hat{p}_\mu^2 \vec{H} = 0,$$

со всевозможными дополнительными условиями (например, типа  $\operatorname{div} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{E}$ ), при которых вся система уравнений будет совместна и инвариантна относительно конформной группы, или группы Лоренца, или других групп преобразований в четырехмерном пространстве.

22. Уравнение Дирака в кривом пространстве

$$\gamma^\mu(x) \nabla_\mu \Psi(t, x) = m \Psi(t, x), \quad [\gamma_\mu(x), \gamma_\nu(x)]_+ = 2g_{\mu\nu}(x).$$

*Замечание к задаче 4.* С помощью нелиевского метода можно показать, что, в случае отсутствия массовых сил в уравнении Ламе, алгеброй инвариантности его является 10-мерная алгебра Пуанкаре. На самом деле это уравнение инвариантно относительно более широкой алгебры — 15-мерной конформной алгебры. При этом базисные элементы собственно конформной подалгебры являются некоторыми функциями базисных элементов алгебры Пуанкаре. Более подробно этот вопрос будет освещен в другом месте.

*Замечание к задаче 17.* Уравнения для специальных функций — уравнения второго порядка. Поэтому весьма эффективным способом установления алгебр инвариантности таких уравнений может служить идея факторизации оператора второго порядка в виде произведения двух операторов (операторов рождения и уничтожения) первого порядка. Оказывается, что в большинстве случаев эта идея конструктивно работает и дает простой алгоритм вычисления нетривиальных алгебр инвариантности уравнений для специальных функций.

Для всестороннего изучения теоретико-групповых свойств перечисленных уравнений естественно воспользоваться как лиевским, так и нелиевским методом. Такой синтез особенно плодотворен для систем дифференциальных уравнений.

### § 3. Двойственная инвариантность уравнений релятивистской квантовой механики

В работах [11, 12, 17] установлено, что уравнения Максвелла, Дирака, Клейна–Гордона–Фока (КГФ) и многие другие уравнения релятивистской квантовой механики инвариантны относительно пространственных и временных преобразований, не совпадающих с преобразованиями Лоренца. Важно подчеркнуть, что при этих преобразованиях временная координата не изменяется:  $t' = t$ . Ниже рассмотрим подробно эту нелоренцовскую инвариантность для уравнений КГФ.

1. Известно, что уравнение (КГФ)

$$\hat{L}\varphi(x) = 0, \quad \hat{L} = \hat{p}_0^2 - \hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2 - m^2 \quad (57)$$

инвариантно относительно группы Пуанкаре. В терминах алгебры Ли это значит, что для десяти операторов  $\{Q_A\} \equiv \{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$  удовлетворяется условие инвариантности (7). Эти базисные элементы алгебры  $P(1, 3)$  имеют явную структуру:

$$P_\mu^I = \hat{p}_\mu = ig^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad J_{\mu\nu}^I = x_\mu \hat{p}_\nu - x_\nu \hat{p}_\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (58)$$

Операторы (58) порождают преобразования Лоренца:

$$x'_\mu = \exp\{iJ_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta}\}x_\mu \exp\{-iJ_{\gamma\delta}\theta_{\gamma\delta}\} = \Lambda_\mu^\nu x_\nu, \quad (59a)$$

$$x'_\mu = \exp\{iP_\alpha a_\alpha\}x_\mu \exp\{-iP_\nu a_\nu\} = x_\mu + a_\mu,$$

$$p'_\mu = \exp\{iJ_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta}\}p_\mu \exp\{-iJ_{\gamma\delta}\theta_{\gamma\delta}\} = \Lambda_\mu^\nu p_\nu, \quad \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1, 2, 3. \quad (59б)$$

Здесь  $\theta_{\alpha\beta}$  — шесть действительных параметров, задающих общее преобразование Лоренца;  $a_\nu$  — четыре действительных параметра, задающих группу трансляций в 4-мерном пространстве Минковского;  $\Lambda_\mu^\nu$  — элементы матрицы Лоренца  $\Lambda$ .

Квадратичные формы в конфигурационном  $R^4(x)$  и импульсном  $R^4(p)$  пространствах

$$S(t, \vec{x}) = x_0^2 - x_a^2 = (x'_0)^2 - (x'_a)^2 = S(t', \vec{x}'), \quad (60)$$

$$S(p_0, \vec{p}) = p_0^2 - p_a^2 = (p'_0)^2 - (p'_a)^2 = S(p'_0, \vec{p}') = m^2 \quad (61)$$

инвариантны относительно преобразований (59).

Выясним такой вопрос: существует ли алгебра инвариантности уравнения КГФ, которая бы для пространственных  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  и временной переменной  $x_0 = t$  порождала геометрические преобразования, отличные от преобразований (59a)?

На поставленный вопрос имеется отрицательный ответ, если алгебру инвариантности уравнения (57) искать в классе операторов первого порядка. Это значит, что в подходе Ли такая алгебра не может быть найдена. Однако в более общем подходе (см. § 1), когда ищется алгебра инвариантности в классе интегродифференциальных операторов, существует положительный ответ на поставленный вопрос (теорема 7).

С помощью стандартной замены

$$\hat{p}_0\varphi = \varkappa\psi, \quad \varphi = \psi_2, \quad \hat{p}_0\varphi \neq 0, \quad (62)$$

где  $\varkappa$  — постоянная величина, введенная из размерностных соображений, уравнение (57) сводится к эквивалентной системе двух уравнений первого порядка относительно временной производной:

$$\hat{p}_0\psi(t, \vec{x}) = \hat{\mathcal{H}}\psi(t, \vec{x}), \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) = \frac{1}{2\varkappa} \left( \hat{E}^2 + \varkappa^2 \right) \sigma_1 - i\sigma_2 \left( \hat{E}^2 - \varkappa^2 \right), \quad \hat{E} = (\hat{p}_a^2 + m^2)^{1/2}, \quad (64)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Теорема 7.** Уравнение (63) инвариантно относительно 10-мерной алгебры Ли с базисными элементами:

$$\begin{aligned} P_0^{II} &= \hat{\mathcal{H}}(\hat{p}), & P_a^{II} &= \hat{p}_a, & J_{ab}^{II} &= J_{ab} = x_a \hat{p}_b - x_b \hat{p}_a, \\ J_{0a}^{II} &= x_0 \hat{p}_a - \frac{1}{2} x_a \hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) + \hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) x_a + \xi^{II}(\hat{p}), \\ \xi^{II} &= -i \hat{p}_a \frac{\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})}{2\hat{E}^2}, & a, b, c &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (65)$$

которая порождает нелоренцовские преобразования

$$x'_a = \exp\{iJ_{ab}\theta_{0b}\} x_a \exp\{-iJ_{0c}\theta_{0c}\} \neq \Lambda_a^\mu x_\mu, \quad (66)$$

$$t' = \exp\{iJ_{0b}\theta_{0b}\} t \exp\{-iJ_{0c}\theta_{0c}\} = t. \quad (67)$$

**Доказательство.** Формулы (65) задают явную структуру операторов  $\{Q_A\} \equiv \{P_0^{II}, P_a^{II}, J_{ab}^{II}, J_{0a}^{II}\}$ , поэтому в справедливости первой части теоремы можно убедиться непосредственной проверкой условий (7) и (11). Условие инвариантности в данном случае имеет вид

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{\mathcal{H}}(\hat{p}), Q_A \right]_- \psi(t, \vec{x}) = 0, \quad A = 1, 2, \dots, 10. \quad (68)$$

Более простой и элегантный путь доказательства, указывающий метод нахождения операторов (65), состоит в реализации алгоритма § 1 для уравнения (63).

С помощью невырожденного преобразования (см. [12])

$$\hat{W}(\hat{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \sigma_3 \frac{\mathcal{H}(\hat{p})}{\hat{E}(\hat{p})} \right], \quad (69)$$

уравнение (63) преобразуется к двум незацепляющимся уравнениям

$$i \frac{\partial \Phi(t, \vec{x})}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}) \Phi(t, \vec{x}), \quad (70)$$

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{p}) = \sigma_3 \hat{E}(\hat{p}), \quad \hat{W}(\hat{p})\psi = \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Условие инвариантности для уравнения (70) имеет вид

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}), Q'_A \right]_- \Phi = 0. \quad (72)$$

Теперь легко убедиться, что операторы

$$\begin{aligned} P_0^{(2)} &= \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}) = \sigma_3 \hat{E}, & P_a^{(2)} &= \hat{p}_a, & J_{ab}^{(2)} &= J_{ab}, \\ J_{0a}^{(2)} &= x_a \hat{p}_a - \frac{1}{2} \{ x_a \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}) + \hat{\mathcal{H}}'(\hat{p}) x_a \}, & x_0 &= t \end{aligned} \quad (73)$$

удовлетворяют условию (72) и образуют 10-мерную алгебру Пуанкаре. Явная структура операторов (65), удовлетворяющих, очевидно, условию (68), получается из операторов (73) с помощью формулы (23), т.е.

$$P_a^{II} = \hat{W}^{-1} \hat{\mathcal{H}}' W, \quad P_a^{II} = P_a^{(2)}, \quad J_{ab}^{II} = J_{ab}^{(2)}, \quad J_{0a}^{II} = \hat{W}^{-1} J_{0a}^{(2)} \hat{W}. \quad (74)$$

Осталось показать, что операторы (65) порождают нелоренцовские преобразования (66), (67) и что при этих преобразованиях время не изменяется. Последний факт является следствием соотношений

$$[x_0, J_{0a}^{II}]_- = 0, \quad [x_a, J_{0b}^{II}]_- \neq -i g_{ab} x_0. \quad (75)$$

Здесь же сразу заметим, что аналогичные операторы из алгебры (58) приводят к совершенно другим соотношениям:

$$[x_0, J_{0a}^I]_- = i P_a^I, \quad [x_a, J_{0b}^I]_- = -i g_{ab} x_0. \quad (76)$$

Соотношения (76) говорят о том, что операторы (58) порождают лоренцовские преобразования, при которых время, конечно, изменяется. Теорема 7 доказана.

**Следствие 1.** Квадратичная форма (60) неинвариантна относительно преобразований (66), (67).

**Следствие 2.** Если с помощью операторов (65) найти соответствующие формулы преобразования для энергии  $\hat{E}$  и импульса  $\hat{p}_a$  частицы, то такие преобразования совпадут с обычными преобразованиями Лоренца, а значит относительно них форма (61) инвариантна.

Из приведенного следует такой общий вывод. Уравнение КГФ, как и всякое пуанкаре-инвариантное уравнение для свободной частицы с фиксированной массой (или нулевой), обладает двойственной (дуальной) инвариантностью. С одной стороны, оно инвариантно относительно преобразований Лоренца, сохраняющих квадратичные формы как в конфигурационном (60), так и в импульсном (61) пространствах. С другой стороны, уравнения КГФ инвариантны относительно преобразований (66), (67), которые не сохраняют формы (60). Причина такой дуальности (57) заключена в двойственной природе оператора  $i \frac{\partial}{\partial t}$ . В пространстве  $L^2(-\infty, \infty)$  он обладает сплошным спектром, лежащим на всей действительной оси. Однако в пространстве решений уравнения (57) или (63) он имеет такой же спектр, как и оператор  $\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})$ . Спектр оператора  $\hat{\mathcal{H}}(\hat{p})$  лежит так же на действительной оси, но имеет лауну на интервале  $(-m, m)$ .

Примером релятивистского уравнения, не обладающего двойственной симметрией указанного типа, может служить уравнение с собственным временем (см. [12]):

$$\frac{\partial^2 \varphi(\tau, t, \vec{x})}{\partial \tau^2} = (\hat{p}_0^2 - \hat{p}_a^2) \varphi(\tau, t, \vec{x}). \quad (77)$$

В (77) оператор  $\hat{p}_0$  входит “на равных правах” с операторами  $\hat{p}_a$ , а значит временная переменная действительно никак не выделена по сравнению с пространственными переменными. Уравнение (77), в отличие от КГФ, не описывает движение частицы с фиксированной массой, поскольку спектр оператора  $\hat{p}_0^2 - \hat{p}_a^2$  сплошной и лежит на всей действительной оси.

**Замечание 6.** Уравнение (70), кроме алгебры (73), инвариантно относительно алгебры (58).

Для установления дуальной инвариантности уравнения Дирака (4) (теоремы типа 7) нужно дословно повторить доказательство теоремы 7. При этом необходимо воспользоваться преобразованием (33) и уравнением (8). Очевидно, что уравнение (34) инвариантно относительно алгебры (73), в которой сделана замена двухмерной матрицы  $\sigma_3$  на четырехмерную матрицу  $\gamma_0$ . В квантовой теории часто рассматривают, кроме системы (34), еще и сопряженную к ней систему. Алгеброй инвариантности такой 8-мерной системы является, например, алгебра Ли группы  $O(6) \supset U(2) \otimes U(2)$  [8, 9, 19].

1. Lorentz G.A., Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light, *Proc. Acad. Sci.*, Amsterdam, 1904, **6**, 809–830.
2. Poincare H., Sur la dynamique de l'electron, *Comptes Rendus Acad. Sci.*, 1905, **140**, 1504–1506.
3. Poincare H., Sur la dynamique de l'electron, *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo*, 1906, **21**, 129–160.
4. Bateman H., The transformation of the electro-dynamical equations, *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223–264.
5. Cunningham E., The Principle of Relativity in Electromagnetics on Extension thereof, *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77–97.
6. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
7. Ибрагимов Н.Х., Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений, Новосибирск, Наука, 1967, 59 с.
8. Fushchych W.I., On additional invariance of relativistic equations of motion, Preprint 70-32E, Kiev, Institute Theoretical Physics, 1970, 16 p.
9. Фушчиц В.И., О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения, *Теор. и мат. физика*, 1971, **7**, № 1, 3–12.
10. Fushchych W.I.,  $P$ ,  $T$ ,  $C$ -properties of the Poincaré invariant equations for massive particles, *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **6**, № 4, 135–137.
11. Fushchych W.I., On the additional invariance of the Dirac and Maxwell equations, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508–512.
12. Фушчиц В.И., О дополнительной инвариантности уравнения Клейна–Гордона–Фока, *ДАН СССР*, 1976, **230**, № 3, 570–573.
13. Фушчиц В.И., Сегеда Ю.Н., О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики, *Укр. мат. журн.*, 1976, **28**, № 6, 844–849.
14. Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фушчиц В.И., О дополнительной инвариантности уравнений Кеммера–Дэффина и Рариты–Швингера, *Теор. и мат. физика*, 1976, **29**, № 1, 82–92.

15. Сегеда Ю.Н., О дополнительной инвариантности уравнений Максвелла, В кн.: Краевые задачи электродинамики проводящих сред, Киев, 1976, 218–224.
16. Фушич В.И., Сегеда Ю.Н., О новой алгебре инвариантности уравнения Шредингера, *ДАН СС-СР*, 1977, **232**, № 4, 801–802.
17. Фушич В.И., Групповые свойства дифференциальных уравнений квантовой механики, В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний (посвященной 60-летию акад. АН УССР Ю.А. Митропольского), Киев, 1977, 75–87.
18. Фушич В.И., Онуфрийчук С.П., О группах инвариантности одного класса счетной системы уравнений первого порядка с частными производными, *ДАН СССР*, 1977, **235**, № 5, 1056–1059.
19. Fushchych W.I., Nikitin A.G., On the tew invariance group of the Dirac and Kemmer–Duffin–Petiau equations, *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, **19**, № 9, 347–352.
20. Фушич В.И., Никитин А.Г., О группе инвариантности квазирелятивистского уравнения движения, *ДАН СССР*, 1978, **238**, № 1, 46–49.
21. Fushchych W.I., Nikitin A.G., On the invariance groups of relativistic equations for the external fields, *Lett. Nuovo Cimento*, 1978, **21**, № 16, 541–546.
22. Фушич В.И., Никитин А.Г., Пуанкаре-инвариантные уравнения движения для частиц произвольного спина, *Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ)*, 1978, **9**, вып. 3, 501–553.
23. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Conformal invariance of relativistic equations for arbitrary spin particles, *Letters in Mathematical Physics*, 1978, **2**, 471–475.
24. Шубин М.А., Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория, М., Наука, 1978, 280 с.
25. Pryce M.H.L., The mass-centre in the restricted theory of relativity and its connection with the quantum theory of elementary particles, *Proc. Roy. Soc. London*, 1946, **195**, № 1040, 62–81.
26. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., On the Dirac theory of spin  $\frac{1}{2}$  particles and its non-relativistic limit, *Phys. Rev.*, 1950, **78**, № 1, 29–36.
27. Салогуб В.А., Сокур Л.П., О групповых свойствах некоторых галилеевски-инвариантных систем дифференциальных уравнений, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978.
28. Остроградский М.В., Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметической задаче, Полное собр. тр.: В 3-х т., Киев, Изд. АН УССР, 1961, т. 2, 139–233.
29. Фушич В.И., Кривский И.Ю., О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского, Препринт ИТФ-68-72, Ин-т теор. физики, 1968, 38 с.
30. Фушич В.И., О представлениях группы де Ситтера, *Украинский физический журнал*, 1966, **9**, 907–909.
31. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., On representation of the inhomogeneous de Sitter group and equation in five-dimensional Minkovsky space, *Nuclear Physics B*, 1969, **14**, № 2, 321–330.
32. Кривский И.Ю., Романенко Г.Д., Фушич В.И., Уравнения типа Кеммера–Дэффина в пятимерном пространстве Минковского, *Теор. и мат. физика*, 1969, **1**, № 2, 242–250.
33. Fushchych W.I., On the CP-noninvariant equations for the particles with zero mass, *Nuclear Physics B*, 1970, **21**, 321–330.
34. Фушич В.И., Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I, *Теор. и мат. физика*, 1971, **4**, № 3, 360–382.
35. Сокур Л.П., Фушич В.И., Об уравнениях движения, инвариантных относительно группы  $P(1, n)$ . II, *Теор. и мат. физика*, 1971, **6**, № 3, 348–362.
36. Фушич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., О релятивистских уравнениях движения без “лишних” компонент, *Теор. и мат. физика*, 1971, **8**, № 2, 192–205.
37. Никитин А.Г., Релятивистские уравнения движения для системы с переменным спином, *Укр. физ. журн.*, 1973, **18**, № 10, 1605–1614.
38. Никитин А.Г., О нерелятивистском пределе уравнений без лишних компонент, *Укр. физ. журн.*, 1974, **19**, № 6, 1000–1005.

39. Fushchych W.I., On a motion equation for two particles in relativistic quantum mechanics, *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **10**, № 4, 163–167.
40. Fushchych W.I., Nikitin A.G. On the Poincaré-invariant equations for particles with variable spin and mass, *Reports on Math. Phys.*, 1975, **8**, № 1, 33–48.
41. Фушич В.И., Никитин А.Г., Юрик И.И., Редукция представлений группы движений  $(n + 1)$ -мерного пространства Минковского по группе Пуанкаре, Препринт 75.5, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1975, 32 с.
42. Фушич В.И., Никитин А.Г., Дифференциальные уравнения движения первого и второго порядка для частиц с произвольным спином, Препринт 77.1, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1977, 48 с.
43. Никитин А.Г., Фушич В.И., Пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнение для частиц произвольного спина, *Теор. и мат. физика*, 1978, **34**, № 3, 319–333.
44. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., On the Galilean-invariant equations for particles with arbitrary spin in non-relativistic mechanics, *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, **14**, № 13, 483–488.
45. Fushchych W.I., Nikitin A.G., On the Galilean-invariant equations for particles with arbitrary spin, *Lett. Nuovo Cimento*, 1976, **16**, № 3, 81–85.
46. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., On the non-relativistic motion equation in the Hamiltonian form for arbitrary spin particles, *Reports on Math. Phys.*, 1978, **13**, № 2, 175–185.
47. Федорчук В.М., Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера, Препринт 78.18, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 33 с.
48. Онуфрийчук С.П., Пуанкаре-ковариантные счетные системы дифференциальных уравнений первого порядка, Препринт 78-29, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978, 36 с.

# О группе инвариантности квази-релятивистского уравнения движения

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

В работе [1] была поставлена задача о нахождении группы инвариантности дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{x}) = H(p) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad H(p) = a_0 + \frac{a_2}{2} p^2 + \frac{a_4}{8} p^4, \quad (1)$$

где  $a_1, a_2, a_4$  — постоянные коэффициенты,

$$p^2 = p_a^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad p^4 = (p_a^2)^2, \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}.$$

Уравнение (1) является естественным обобщением уравнения Шредингера для свободной частицы (совпадая с последним при  $a_2 = a_4 = 0$ ), частично учитывающим релятивистские эффекты. Нетрудно убедиться, что это уравнение не инвариантно ни относительно группы Галилея, ни относительно группы Лоренца.

В настоящей статье установлена двадцатипараметрическая группа Ли, допускаемая уравнением (1); найден явный вид преобразований волновой функции  $\Psi(t, \mathbf{x})$ , оставляющих (1) инвариантным; выведена формула, устанавливающая зависимость массы частицы от ее скорости; предложено уравнение движения для частицы с произвольным спином, инвариантное относительно найденной группы.

Обозначим через  $\{Q_A\}$  базисные элементы алгебры Ли некоторой группы  $G$ . Уравнение (1) инвариантно относительно группы  $G$ , если выполняются условия [2]

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - H(p), Q_A \right]_- \Psi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (2)$$

для всех  $Q_A \in \{Q_A\}$ ,  $\{A\}$  — некоторое множество индексов.

**Теорема.** Уравнение (1) инвариантно относительно 20-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются операторами

$$\begin{aligned} P_0 &= i \frac{\partial}{\partial t}, & P_a &= p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, & I, \\ J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a, & a, b &= 1, 2, 3, & G_a &= t V_a - x_a, \\ V_a &= i [H(p), x_a]_- = p_a \left( a_2 + \frac{1}{2} a_4 p^2 \right), & P_{ab} &= -a_4 \left( p_a p_b + \frac{1}{2} \delta_{ab} p^2 \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $I$  — единичный оператор.

**Доказательство.** Воспользовавшись тождествами

$$[H(p), V_a]_- = \left[ i \frac{\partial}{\partial t}, x_b \right]_- = 0,$$

непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что все операторы (3) удовлетворяют условию (2). Операторы  $P_0, P_a, P_{ab}, V_a, I$  коммутируют между собой и совместно с операторами  $J_{ab}, G_a$  удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
 [J_{ab}, J_{cd}]_- &= i(\delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ad}), & [J_{ab}, P_0]_- &= 0, \\
 [J_{ab}, G_c]_- &= i(\delta_{ac}G_b - \delta_{bc}G_a), & [P_a, G_b]_- &= i\delta_{ab}I, & [G_a, G_b]_- &= 0, \\
 [J_{ab}, P_c]_- &= i(\delta_{ac}P_b - \delta_{bc}P_a), & [V_a, G_b]_- &= i(P_{ab} - \delta_{ab}a_2I), & (4) \\
 [P_0, G_a]_- &= iV_a, & [J_{ab}, P_{cd}]_- &= i(\delta_{ac}P_{bd} + \delta_{bd}P_{ac} - \delta_{bc}P_{ad} - \delta_{bd}P_{ac}), \\
 [J_{ab}, V_c]_- &= i(\delta_{ac}V_b - \delta_{bc}V_a), & [G_a, P_{bc}]_- &= ia_4(\delta_{ab}P_c + \delta_{bc}P_a + \delta_{ac}P_b),
 \end{aligned}$$

т.е. образуют алгебру Ли. Теорема доказана.

Подчеркнем, что генераторы (3) принадлежат классу дифференциальных операторов третьего порядка. Это означает, что найденная нами алгебра инвариантности уравнения (1) не может быть получена в классическом подходе Ли, в котором, как хорошо известно,  $Q_A$  задаются дифференциальными операторами первого порядка.

Используя явный вид (3) найденных операторов  $Q_A$ ,  $Q_A \supset P_0, P_a, P_{ab}, G_a, J_{ab}, V_a$ , можно найти группу инвариантности уравнения (1), т.е. найти преобразования координат  $x_a$  импульса  $P_a$  и волновой функции  $\Psi(t, \mathbf{x})$ , оставляющие (1) инвариантным. Не вдаваясь в детали довольно громоздких вычислений, приведем окончательный результат:

$$P_a \rightarrow P'_a = WP_aW^{-1} = R_{ab}P_b + u_a, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 x_a \rightarrow x'_a &= Wx_aW^{-1} = R_{ab}x_b + (V'_a - R_{ab}V_b)t - \\
 &- b_a - a_2\lambda_a + R_{ab}R_{cd}R_{bd}\lambda_c - a_4(R_{ab}P_b\lambda_{cc} + 2\lambda_{ab}R_{bc}P_c),
 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 V_a \rightarrow V'_a &= WV_aW^{-1} = R_{ab}V_b - R_{ac}R_{bd}R_{cd}u_b + \\
 &+ a_2u_a + \frac{1}{2}a_4 [R_{ab}P_bu_c^2 + 2u_aR_{bc}P_cu_b + u_a u_c^2],
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 \Psi(t, x_a) \rightarrow \Psi'(t, x_a) &= W\Psi(t, x_a) = \exp[if(t, \mathbf{x})] \times \\
 &\times \exp \left[ iR_{ab}R_{cd}P_{bd} \left( \frac{1}{2}tu_a u_c + u_a \lambda_c + \lambda_{ac} \right) \right] \times \\
 &\times \exp[iR_{ab}V_b(tu_a + \lambda_a) - ia_2R_{ab}P_b u_a] \times \\
 &\times \Psi \left( t - a, R_{ab}x_b - b_a - ta_2u_a - \right. \\
 &\left. - a_4 \left[ \frac{1}{2}tu_a u_c^2 + u_a \lambda_{bb} + 2\lambda_{ab}u_b + u_a u_b \lambda_b + \frac{1}{2}\lambda_a u_c^2 \right] \right),
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 W &= \exp \left( \frac{i}{2}J_{ab}\theta_{ab} \right) \cdot \exp(iP_{ab}\lambda_{ab}) \times \\
 &\times \exp(iV_a\lambda_a) \cdot \exp(iG_a u_a) \cdot \exp(iP_a b_a - iP_0 a),
 \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\theta_{ab}$ ,  $\lambda_{ab}$ ,  $u_a$ ,  $b_a$ ,  $a$  — произвольные действительные параметры преобразования,  $R_{ab}$  — оператор трехмерного поворота,

$$R_{ab} = \delta_{ab} + i \frac{\theta_{ab}}{\theta} \sin \theta + \frac{\theta_{ac} \theta_{cb}}{\theta^2} (\cos \theta - 1), \quad \theta = \left( \frac{1}{2} \theta_{ab}^2 \right)^{1/2},$$

$f(t, \mathbf{x})$  — фазовый множитель

$$f(t, \mathbf{x}) = -x_a u_a - \frac{1}{2} a_2 t u_a^2 - \frac{1}{8} a_4 t (u_a^2)^2 + C,$$

$C$  — произвольная постоянная.

Для волновой функции в импульсном пространстве получаем из (9) закон преобразования в виде

$$\begin{aligned} \Phi'(k, \omega) &= \int d^3x dt \exp(i\omega t - ik_b x_b) \Psi'(t, \mathbf{x}) = \\ &= \exp(ik'_a b_a - i\omega'_a + iC) \Phi(k', \omega'), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$k'_a = R_{ab} k_b + u_a, \quad \omega' = \frac{1}{2} a_2 (k'_a)^2 + \frac{1}{8} a_4 [(k'_a)^2]^2. \quad (11)$$

Формулы (5)–(11) при  $\lambda_a = \lambda_{ab} = a_4 = 0$ ,  $a_2 = (2m)^{-1}$ ,  $u_a = mv_a$  задают преобразование Галилея, а в случае произвольных  $\lambda_a$ ,  $\lambda_{ab}$ ,  $a_2$ ,  $a_4$  могут рассматриваться как определенные обобщения этого преобразования. Существенное отличие преобразований (5)–(11) от преобразований Галилея состоит в том, что оператор  $x'_a$  выражается не только через оператор  $x_a$  и соответствующие параметры преобразования, но также и через оператор скорости частицы  $V_a$ . Формулы (5), (6), (8), (10) указывают на явную несимметрию между импульсным и координатным пространством.

Приведем пример уравнения, инвариантного относительно алгебры (4) и описывающего движение частицы с произвольным спином. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{x}) &= H(s, p) \Psi(t, \mathbf{x}), \\ H(s, p) &= \sigma_1 a_0 + 2\sigma_3 S p - (\sigma_1 - i\sigma_2)(a_0)^{-1} 2(Sp)^2 + \frac{a_2}{2} p^2 + \frac{a_4}{8} p^4, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\Psi(t, \mathbf{x})$  есть  $2(2s+1)$ -компонентная функция,  $S_a = \begin{pmatrix} s_a & 0 \\ 0 & s_a \end{pmatrix}$ ,  $s_a$  — матрицы, реализующие неприводимое представление  $D(s)$  алгебры  $O(3)$ ,  $\sigma_a$  суть  $2(2s+1)$ -рядные матрицы Паули, коммутирующие с  $S_a$ . Операторы  $P_a$ ,  $P_0$ ,  $P_{ab}$ ,  $J_{ab}$ ,  $G_a$ , удовлетворяющие алгебре (4), на множестве решений уравнения (12) задаются формулами

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab},$$

$$V_a = p_a \left( a_2 + \frac{1}{2} a_4 p^2 \right), \quad P_{ab} = -a_4 \left( p_a p_b + \frac{1}{2} \delta_{ab} p^2 \right),$$

$$G_a = t V_a - x_a + (\sigma_2 - i\sigma_1)(a_0)^{-1} S_a.$$

В заключение приведем формулы, устанавливающие связь между импульсом и скоростью частицы, описываемой уравнением (1) в случае  $a_2 a_4 > 0$ . Из (3) имеем

$$V_a = a_2 p_a \left( 1 + \frac{a_4}{2a_2} p^2 \right).$$

Решая это кубическое уравнение относительно  $p_a$ , получаем

$$\begin{aligned} p_a &= m V_a, & m &= m_0 \frac{3}{\mathcal{V}} \sin \left[ \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\mathcal{V}}{\sqrt{1 - \mathcal{V}^2}} \right], \\ m_0 &= \frac{1}{a_2}, & \mathcal{V} &= \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} \sqrt{-\frac{a_4}{a_2^3}} V, & V &= (V_a^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Формула (13) дает зависимость массы частицы  $m$  от скорости.

Соотношения (13) определены для  $1 - \mathcal{V}^2 > 0$ , откуда заключаем, что скорость частицы в квантовой механике, базирующейся на уравнении (1), должна быть ограничена условием  $V \leq \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} \sqrt{-\frac{a_4}{a_2^3}}$  (в естественной системе единиц  $\hbar = c = 1$ ).

Отметим, что полученные результаты обобщаются на случай дифференциальных уравнений вида (1) произвольного конечного порядка, когда

$$H(p) = \sum_{n=0}^N a_{2n} p^{2n}, \quad N < \infty.$$

1. Фушич В.И., В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний, Киев, Наукова думка, 1977, 238–246.
2. Фушич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1971, **7**, № 1, 3–12; *ДАН*, 1976, **230**, № 3, 571–573; Никитин А.Г., Сегеда Ю.Н., Фушич В.И., *Теор. и мат. физ.*, 1976, **29**, № 1, 82–94.

# On the non-relativistic motion equations in the Hamiltonian form

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN, V.A. SALOGUB

The Galilean-invariant equations for particles with arbitrary spins have been obtained, which describe properly the spin-orbit and the Darwin interactions of a particle with an external field. The Hagen–Hurley non-relativistic equations have been reduced to the Hamiltonian form.

## 1. Introduction

It has been noted in many books and papers (see e.g. [2, 8, 10, 12, 13, 16]) that the Galilean invariant non-relativistic equations for particles with spins do not give the complete description of the particle movement in external electromagnetic fields, because such equations (of Pauli, or Levi–Leblond [16], of Hagen–Hurley [10, 12, 13]) do not take into account the spin-orbit and the Darwin interactions. It is generally accepted to think [16] that such interactions are truly relativistic effects, and, for instance, if the particle spin  $s = 1/2$ , only the Dirac relativistic equation describes them naturally. In our just published paper [7] this widespread opinion has been refuted, i.e. the Galilean invariant equations for the particles with the lowest spins  $s = 1/2, 1, 3/2$  had been derived, which lead to the spin-orbit and to the Darwin interactions by the standard substitution  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ . In [6] the analogous equations have been obtained for a non-relativistic particle with any spin.

Peculiarity of such equations is that they have not redundant (unphysical) components unlike other known non-relativistic equations for arbitrary spin particles [10, 12, 13]. The wave function in the equations [7] has only  $2(2s + 1)$  components, and the energy operator has both positive and negative eigenvalues.

The present work has the two principal aims: first, to obtain the Galilean invariant equations for the particles with any spin in the Hamiltonian form without negative energy eigenvalues, which naturally describes not only the dipole, but also the spin-orbit and the Darwin interactions; and secondly, to establish the Hamiltonian form of the non-relativistic Levi–Leblond–Hagen–Hurley (LHH) equations.

## 2. The Hamiltonian form of the equations with redundant components

Galilean-invariant first-order wave equation for the particle with spin  $s = \frac{1}{2}$  had been obtained by Levi–Leblond [16]. Then Hagen and Hurley [10, 12, 13] have obtained such equations for arbitrary spin particles.

It is convenient for our purposes to write the LHH equations [10, 12, 13] in the form

$$\begin{aligned}
 & [\beta_\mu p_\mu + (1 - \beta_0)2m] \Psi(t, \vec{x}) = 0, \\
 & \mu = 0, 1, 2, 3, \quad p_a = i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad p_0 = i \frac{\partial}{\partial t},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

where  $\Psi(t, \vec{x})$  is the  $(6s+1)$  component wave function, and  $\beta_\mu$  are the matrices having the following structure:

$$\beta_0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_a = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} 0 & S_a & K_a^\dagger \\ S_a & 0 & 0 \\ K-a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

and  $I$  is the  $(2s+1)$ -dimensional unit matrix,  $S_a$  are the  $(2s+1)$ -dimensional matrices, which realize the irreducible representation of the algebra  $O(3)$ ,  $K_a$  are the matrices with  $(2s-1)$  rows and  $(2s+1)$  columns, satisfying the condition

$$S_a S_b + K_a^\dagger K_b = i s \varepsilon_{abc} S_c + s^2 \delta_{ab}. \quad (2.3)$$

The peculiarity of equations (2.1) in comparison with the Dirac relativistic equation is that even for  $s = 1/2$  the matrix  $\beta_0$  is singular. Therefore some difficulties arise in reducing the LHH equations to the Hamiltonian form. The analogous problems take place also in the relativistic Proca, Kemmer–Duffin, and Bhabha equations [1, 11, 15, 18, 19].

In works [1, 11, 15, 18], the Kemmer–Duffin equation

$$\left( \tilde{\beta}_\mu p_\mu + m \right) \Psi = 0, \quad (2.4)$$

where  $\tilde{\beta}_\mu$  are  $(10 \times 10)$ -Kemmer–Duffin matrices, has been reduced to the form

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi, \quad H = \left( \tilde{\beta}_0 \tilde{\beta}_a - \tilde{\beta}_a \tilde{\beta}_0 \right) p_a + \tilde{\beta}_0 m, \quad (2.5)$$

$$\left[ \left( 1 - \tilde{\beta}_0^2 \right) m + \tilde{\beta}_a p_a \tilde{\beta}_0^2 \right] \Psi = 0, \quad a = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

where  $H$  is the Kemmer–Duffin particle Hamiltonian, and (2.6) is the subsidiary condition, which removes the redundant components of the wave function  $\Psi$ .

The form (2.1) of the non-relativistic equations [10, 12, 13] shows that the methods of works [1, 11] may be used to reduce the LHH equations to the Schrödinger form

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi. \quad (2.7)$$

Our task is to find the exact form of the Hamiltonian  $H$ .

The matrices  $\beta_0$  and  $(1 - \beta_0)$  are the projectors on the subspaces of upper and lower components of the wave function  $\Psi$ . They satisfy the conditions

$$\beta_0^2 = \beta_0, \quad (1 - \beta_0) \beta_a = \beta_a \beta_0. \quad (2.8)$$

In order to reduce equation (2.1) to the form (2.7) we first multiply (2.1) by  $(1 - \beta_0)$ . Using (2.8), one obtains

$$(1 - \beta_0) \Psi = -\frac{\beta_a p_a}{m} \beta_0 \Psi, \quad (2.9)$$

or after the multiplication by  $p_0$ ,

$$(1 - \beta_0) p_0 \Psi = -\frac{\beta_a p_a}{2m} \beta_0 p_0 \Psi. \quad (2.10)$$

On the other hand, multiplying (2.1) by  $\beta_0$ , one obtains

$$\beta_0 p_0 \Psi = -\beta_0 \beta_a p_a \Psi. \tag{2.11}$$

Substituting (2.11) into (2.10) and adding the result to (2.11), we come to the equation

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[ (1 - \beta_0) \frac{(\beta_a p_a)^2}{2m} - \beta_a p_a - (1 - \beta_0) 2m \right] \Psi. \tag{2.12}$$

Equation (2.12) with the additional condition (2.10) is completely equivalent to (2.1). Thus we have reduced the LHH equations to the Hamiltonian form.

### 3. Transition to the diagonal representation

Equations (2.12), (2.10) as well as equation (2.1) are invariant with respect to the Galilei group  $G$ . Indeed, on the set  $\{\Psi\}$  of the solutions of these equations the following representation of the algebra  $G$  is realized:

$$\begin{aligned} P_0 = p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ G_a = t p_a - m x_a + \lambda_a, \quad \lambda_a = -\frac{i}{2} \beta_a \beta_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

where the matrices  $S_{ab}$  realize the direct sum  $D(s) \oplus D(s) \oplus D(s - 1)$  of the algebra  $O(3)$  representations. One can readily see that the generators (3.1) are non-Hermitian with respect to the usual scalar product

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger \Psi_2. \tag{3.2}$$

The aim of this section is to transform equations (2.12), (2.10) and the operators (3.1) to such a form that the wave function  $\Psi(t, \vec{x})$  has only  $2s+1$  non-zero components and the generators of the Galilei group representation are Hermitian with respect to (3.2). It is achieved by the transformation to the new wave function

$$\Psi \rightarrow \Psi' = V \Psi, \quad V = \exp \left( -i \frac{\vec{\lambda} \vec{p}}{m} \right). \tag{3.3}$$

The transformed generators (3.1) take the form

$$\begin{aligned} P'_a = V P_a V^{-1}, \quad J'_{ab} = V J_{ab} V^{-1} = J_{ab}, \\ P'_0 = V P_0 V^{-1} = p_0, \quad G'_a = V G_a V^{-1} = t p_a - m x_a. \end{aligned} \tag{3.4}$$

These operators are apparently Hermitian in the scalar product (3.2). Equations (2.12), (2.10) after the transformation (3.4) have been reduced to the diagonal form

$$\frac{p_a^2}{2m} \Psi' = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi', \tag{3.5}$$

$$(1 - \beta_0) \Psi' = 0. \tag{3.6}$$

It follows from (3.6), (2.2) that the wave function  $\Psi'$  has only  $2s + 1$  non-zero components. Thus condition (2.10) (which is equivalent to (3.6) serves to remove  $4s$  redundant components from the  $(6s + 1)$  component wave function  $\Psi(t, \vec{x})$ .

One can use the operator (3.3) to construct the positive definite scalar product on the set of the solutions of equations (2.12), (2.10). Indeed, it follows from the hermiticity of the operators (3.4) with respect to (3.2) that the generators (3.4) are Hermitian with respect to

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger M \Psi_2, \quad (3.7)$$

where

$$M = V^\dagger V = 1 - \frac{i}{m}(\vec{\lambda}\vec{p} - \vec{\lambda}^\dagger\vec{p}) + \frac{(\vec{\lambda}^\dagger\vec{p}) \cdot (\vec{\lambda}\vec{p})}{m^2}. \quad (3.8)$$

For the case  $s = 1/2$  the transformation operator (3.3) and the metric operators (3.8) have the form

$$V = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} & I \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} I \left(1 + \frac{p_a^2}{m^2}\right) & -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} \\ -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{m} & I \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

where  $\sigma_a$  are the usual Pauli matrices.

It follows from the above that the transformation (3.3) may be considered as the non-relativistic analog of the Foldy-Wouthuysen transformation [3].

Equation (2.10) is not the only Galilean invariant condition which can be added to (2.12) in order to remove the redundant components of the wave function  $\Psi$ . For instance, one can use for this purpose the subsidiary condition of the form

$$\left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \left( H - \frac{(\vec{\beta}\vec{p})^2}{4m} + m \right), \left[ \left( H - \frac{(\vec{\beta}\vec{p})^2}{4m} + m \right)^2 \right]^{-1/2} \right] \right\} \Psi = 0. \quad (3.10)$$

Equations (2.12), (3.10), as (2.12), (2.6), are Galilean invariant and can be reduced to the diagonal form (3.5), (3.6) by the unitary transformation

$$\Psi \rightarrow U\Psi, \quad U = \frac{2m + (1 - 2\beta_0)\beta_a p_a}{\sqrt{4m^2 + (\beta_a p_a)^2}}. \quad (3.11)$$

On the set of the solutions of equations (2.12), (3.10) the Galilei group generators have the form

$$P_0 = i\frac{\partial}{\partial t}, \quad P_a = p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad (3.12)$$

$$G_a = t p_a - m X_a, \quad X_a = x_a + [U^\dagger, x_a]_-. U.$$

The generators (3.12) are Hermitian with respect to the usual scalar product (3.2) but, in contrast to (3.1), are non-local (integral) operators.

#### 4. The Hamiltonian equations without redundant components

In this section we obtain new (different from (2.1)) equations for arbitrary spin particles, which are invariant under the Galilei group  $G$ . The main property of these equations is that the wave function of a particle with spin  $s$  has  $2(2s+1)$  components.

It allows to establish the direct connection between our equations and the relativistic equations without redundant components.

We shall start from the following representation for the generators of the Galilei group

$$\begin{aligned} P_0 &= i\frac{\partial}{\partial t}, & P_a &= p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, & J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + \hat{S}_{ab}, \\ G_a &= t p_a - m x_a + \tilde{\lambda}_a, & \hat{S}_{ab} &= \begin{pmatrix} \hat{S}_c & 0 \\ 0 & \hat{S}_c \end{pmatrix}, & (a, b, c) &= (1, 2, 3), \end{aligned} \quad (4.1)$$

where the matrices  $\hat{S}_c$  realize the irreducible representation  $D(s)$  of the group  $O(3)$ , and  $\tilde{\lambda}_a$  are arbitrary numerical matrices which have to be such that the generators (4.1) satisfy the algebra  $G$ . It can be shown that the most general (up to equivalence) form of the matrices  $\tilde{\lambda}_a$ , satisfying such a requirement, is

$$\tilde{\lambda}_a = k(\sigma_1 + i\sigma_2)S_a, \quad S_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}\hat{S}_{bc}, \quad (4.2)$$

where  $\sigma_1, \sigma_2$  are the  $2(2s+1)$ -dimensional Pauli matrices which commute with  $\hat{S}_{ab}$ ,  $k$  is an arbitrary constant.

To obtain the Galilean invariant equations in the form

$$L_s \Phi(t, \vec{x}) = 0 \quad (4.3)$$

we must find the operators  $L_s$  satisfying the conditions

$$[P_\mu, L_s]_- = [J_{ab}, L_s]_- = [G_a, L_s]_- = 0. \quad (4.4)$$

Thus our problem has been reduced to the solution of the commutation relations (4.4).

In order to solve relations (4.4) we reduce the generators (4.4) to the diagonal representation

$$\begin{aligned} P'_0 &= V P_0 V^{-1} = i\frac{\partial}{\partial t}, & P_a &= V p_a V^{-1} = p_a, \\ J'_{ab} &= V J_{ab} V^{-1} = x_a p_b - x_b p_a + \hat{S}_{ab}, & G'_a &= V G_a V^{-1} = t p_a - m x_a. \end{aligned} \quad (4.5)$$

The transition operator  $V$  has the form

$$V = \exp\left(i\frac{\vec{\lambda}\vec{p}}{m}\right). \quad (4.6)$$

We require that the wave function of the spin- $s$  particle has, in the diagonal representation (4.5),  $2s+1$  non-zero components. This requirement may be written in the form of the Galilean invariant condition

$$(1 + \sigma_3)\Phi' = 0. \quad (4.7)$$

Another natural assumption is that each component of  $\Phi'$  satisfies the non-relativistic Schrödinger equation

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi' = \frac{p_a^2}{2m}\Phi'. \quad (4.8)$$

One can write (4.7) and (4.8) in the form of the single equation

$$L'_s \Phi' = \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) \left( i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{p_a^2}{2m} \right) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) 2m \right] \Phi' = 0. \quad (4.9)$$

Equation (4.9) is Galilean invariant inasmuch as the following relations are satisfied

$$[L'_s, P'_\mu]_- = [L'_s, J_{ab}]_- = [L'_s, G'_a]_- = 0. \quad (4.10)$$

To obtain equation (4.9) in the representation (4.1) it is sufficient to use the transition operator (4.6). Making the transformation

$$\Phi' \rightarrow \Phi = V^{-1} \Phi', \quad L'_s \rightarrow L_s = V^{-1} L'_s V, \quad (4.11)$$

one obtains equation (4.3), where

$$L_s = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) \left( i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{p_a^2}{2m} + k^2 \frac{(\vec{S}\vec{p})^2}{2m} \right) + (\sigma_1 - i\sigma_2)m + \sigma_3 k (\vec{S}\vec{p}). \quad (4.12)$$

Thus we have found the Galilean invariant equation (4.3), (4.12) for the  $2(2s+1)$ -component wave function. For  $s = 1/2$ ,  $k = 1/s$  ((4.3), (4.12)) coincide with the Levi–Leblond equation [16].

Equations (4.3), (4.12), as well as equation (2.1), may be reduced to the Hamiltonian form. Indeed, multiplying (4.12) by  $i\sigma_2$ , one obtains from (4.3), (4.12) the following expression:

$$\left[ \tilde{\beta}_0 B - \tilde{\beta}_a \tilde{p}_a + (1 - \tilde{\beta}_0) 2m \right] \Phi = 0, \quad (4.13)$$

where

$$B = i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{p_a^2}{2m} + \frac{k^2 (\vec{S}\vec{p})^2}{2m}, \quad \tilde{\beta}_0 = \frac{1}{2}(1 + \sigma_3), \quad \tilde{\beta}_0 = -k\sigma_1 S_a. \quad (4.14)$$

The matrices  $\tilde{\beta}_0$ ,  $\tilde{\beta}_a$  satisfy thereby relations (2.8) as the  $\beta_0$ ,  $\beta_a$ . Repeating the computations (2.9)–(2.12) one easily obtains from (4.13) the equations

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi = H \Phi, \quad H = \frac{p_a^2}{2m} - \tilde{\beta}_0 \tilde{\beta}_a \tilde{\beta}_b \frac{(p_a p_b + p_b p_a)}{4m} + \tilde{\beta}_a p_a - (1 - \tilde{\beta}_0) 2m, \quad (4.15)$$

$$(1 - \tilde{\beta}_0) \Phi = -\frac{\tilde{\beta}_a p_a}{2m} \tilde{\beta}_0 \Phi. \quad (4.16)$$

The system of equations (4.15), (4.16) is completely equivalent to (4.3), (4.12).

Thus we have obtained Galilean invariant equations (4.15), (4.16) for a particle with arbitrary spin  $s$ , moreover, the wave function has  $2(2s+1)$  components. As in Section 2, the subsidiary condition (4.16) is not the only one which can be added to (4.15) in order to remove the redundant components of the wave function  $\Phi$ . For instance, it is possible to postulate that the wave function  $\Phi$  satisfy instead of (4.16) the following equation

$$\hat{\varepsilon} \Phi = \Phi, \quad \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ \left\{ H - \frac{p_a^2}{2m} + \frac{(k\vec{S}\vec{p})^2}{4m} \right\}, \left\{ \left[ H - \frac{p_a^2}{2m} + \frac{(k\vec{S}\vec{p})^2}{4m} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \right]_+. \quad (4.17)$$

Equations (4.15), (4.17) are Galilean invariant. On the set of the solutions of these equations the following representation of the algebra  $G$  is realized

$$\begin{aligned}
 P_0 &= p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}, & P_a &= p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, & J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + \hat{S}_{ab}, \\
 G_a &= t p_a - m X_a, & X_a &= x_a + [U^\dagger, x_a] U, & & \\
 U &= \left(1 + \tilde{\beta}_4 \hat{\varepsilon}\right) \left(2 + \tilde{\beta}_4 \hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon} \tilde{\beta}_4\right)^{-1/2}, & \tilde{\beta}_4 &= 2\tilde{\beta}_0 - 1.
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

The generators (4.18), as (3.12), are Hermitian with respect to the usual scalar product (3.2).

### 5. The non-relativistic particles in an external electromagnetic field

It is known from the relativistic equation theory that the equation of motions which are mathematically equivalent in the case of a free particle, leads to different physical consequences after the introduction of an interaction. It means that various mathematically equivalent representations for the equations are physically non-equivalent. The classical example of such a situation is the equation for an electron in the Dirac and in the Foldy–Wouthuysen (FW) [3] representations. If one introduces the minimal interaction into the free equation in the Dirac representation, the result is obtained which is in a good accordance with experimental data. If, however, one introduces the interaction into the free equation in the FW representation, any sensible result will not be obtained. Another example is the Kemmer–Duffin equation which does not lead to the spin-orbit and to the Darwin couplings by introducing the minimal interaction into the original free equation, but describes these couplings if one introduces the interaction into the mathematically equivalent equation in the Hamiltonian form [9].

It turns out that the analogous situations takes place also for the non-relativistic equations. We shall see, that equations (2.12), (4.15) in contrast to (2.1) and (4.3), (4.13), lead to the spin-orbit and to the Darwin couplings.

First we consider equation (2.12). After the replacement  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$  one obtains

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H(\vec{\pi}) \Psi = \left\{ (1 - \beta_0) \frac{(\beta_a \pi_a)^2}{2m} - \beta_a \pi_a - (1 - \beta_0) 2m + eA_0 \right\} \Psi. \tag{5.1}$$

In order to obtain from (5.1) the equation for the  $2(2s + 1)$  component wave function it is necessary to remove the “odd” terms  $\beta_a \pi_a$  in (5.1), i.e. to diagonalize the operator  $H(\vec{\pi})$ . In the presence of the interaction such a problem may be solved only approximately as in the relativistic case [3]. We shall solve this problem up to terms of order  $1/m^2$  with the help of a set of successive unitary transformations. After the first transformation

$$U_1 = \exp \left( -\beta_4 \frac{\beta_a \pi_a}{2m} \right), \quad \beta_4 = 2\beta_0 - 1 \tag{5.2}$$

one obtains

$$\begin{aligned}
 H(\vec{\pi}) \rightarrow H^{(1)}(\vec{\pi}) &= U_1 H(\vec{\pi}) U_1^\dagger = (1 + \beta_4) \frac{(\beta_a \pi_a)^2}{4m} - m(1 - \beta_4) + eA_0 - \\
 &- \frac{ie}{2m} \beta_4 (\beta_a E_a) - \frac{ie}{8m^2} [\beta_a \pi_a, \beta_b E_b]_- + \frac{1}{12m^2} (\beta_a \pi_a)^3 + O \left( \frac{1}{m^3} \right),
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

$$E_a = -\frac{\partial A_0}{\partial x_a} - \frac{\partial A_a}{\partial t},$$

where  $O(1/m^3)$  possesses the terms of a power  $1/m^3$ .

After the second transformation

$$U_2 = \exp\left(-\frac{ie}{4m^2}(\beta_a E_a)\right) \quad (5.4)$$

the operator  $H^{(2)}(\vec{\pi})$  becomes

$$\begin{aligned} H^{(2)}(\vec{\pi}) &= U_2 H^{(1)}(\vec{\pi}) U_2^\dagger - (1 + \beta_4) \frac{(\beta_a \pi_a)^2}{4m} - m(1 - \beta_4) + eA_0 + \\ &+ \frac{1}{12m^2} (\beta_a E_a)^3 - \frac{ie}{8m^2} [\beta_a \pi_a, \beta_b E_b]_- + O\left(\frac{1}{m^3}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

At least, with the help of the operator

$$U_3 = \exp\left[\frac{1}{24m^3} \beta_4 (\beta_a \pi_a)^3\right], \quad (5.6)$$

one obtains the final form of  $H^{(3)}(\vec{\pi})$ :

$$\begin{aligned} H^{(3)}(\vec{\pi}) &= U_3 H^{(2)}(\vec{\pi}) U_3^\dagger = (1 + \beta_4) \frac{(\beta_a \pi_a)^2}{4m} - \\ &- (1 - \beta_4)m + eA_0 - \frac{ie}{8m^2} [\beta_a \pi_a, \beta_b E_b]_- + O\left(\frac{1}{m^3}\right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

It follows from (2.2) that the Hamiltonian  $H^{(3)}(\vec{\pi})$  is a completely even (commuting with  $\beta_4$ ) operator. On the set of  $\Psi^+$ , satisfying the condition

$$\frac{1}{2}(1 + \beta)\Psi^+ = \Psi^+, \quad (5.8)$$

the Hamiltonian  $H^{(2)}(\vec{\pi})$  has the form

$$\begin{aligned} H^{(3)}(\vec{\pi})\Psi^+ &= \left\{ \frac{\pi_a^2}{2m} - e \frac{\vec{S}\vec{H}}{2ms} + eA_0 - \right. \\ &- \frac{ie}{8m^2 s} \vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{\pi} - \vec{\pi} \times \vec{E}) - \frac{e}{8m^2} \operatorname{div} \vec{E} \left. \right\} \Psi^+, \quad (5.9) \\ H_a &= -\frac{i}{2} \varepsilon_{abc} [\pi_b, \pi_c]_-. \end{aligned}$$

Thus, starting from the non-relativistic equation (5.1), we have obtained the approximate Hamiltonian (5.9) which describes not only the dipole  $\left(-e \frac{\vec{S}\vec{H}}{2ms}\right)$ , but also the spin-orbit  $\left(-\frac{ie}{8m^2 s} \vec{S}(\vec{\pi} \times \vec{E} - \vec{E} \times \vec{\pi})\right)$  and the Darwin  $\left(-\frac{e}{8m^2} \operatorname{div} \vec{E}\right)$  interaction of a charged particle with an external electromagnetic field. For the spin

$s = 1/2$  particle the Hamiltonian (5.9) coincides with the one, obtained by Foldy and Wouthuysen [3] from the relativistic Dirac equation.

Now we appeal to equation (4.15) and introduce to it the minimal interaction  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu$ . It leads to the Hamiltonian

$$\tilde{H}(\vec{\pi}) = \frac{\pi_a^2}{2m} - \tilde{\beta}_0 \frac{(\tilde{\beta}_a \pi_a)^2}{2m} - \tilde{\beta}_0 k^2 \frac{\vec{S}\vec{H}}{4m} + \tilde{\beta}_a \pi_a + (1 - \tilde{\beta}_0)2m + eA_0. \quad (5.10)$$

This Hamiltonian, as well as (5.1), cannot be diagonalized exactly. By the analogy with (5.2)–(5.7), one can diagonalize (5.10) approximately with the help of the operator

$$\tilde{U} = \exp(iB_3) \cdot \exp(iB_2) \cdot \exp(iB_1), \quad (5.11)$$

where

$$B_1 = -\tilde{\beta}_4 \frac{\tilde{\beta}_a \pi_a}{2m}, \quad \tilde{\beta}_4 = 2\tilde{\beta}_0 - 1, \quad (5.12)$$

$$B_2 = -e \frac{\tilde{\beta}_a E_a}{4m^2}, \quad (5.13)$$

$$B_3 = \frac{1}{8m^3} \left\{ -\frac{i}{k} \tilde{\beta}_4 (\tilde{\beta}_a \pi_a)^3 - [\tilde{\beta}_a \pi_a, \pi_a^2]_- - \right. \\ \left. - \frac{ek^2}{4} [\tilde{\beta}_a \pi_a, S_b H_b]_- - \frac{ek^2}{4} [(\tilde{\beta}_a \pi_a), \tilde{\beta}_4 (S_b H_b)]_- \right\}. \quad (5.14)$$

As a result one obtains

$$H^{(3)}(\vec{\pi}) = \frac{\pi_a^2}{2m} - \frac{1}{2}(1 - \tilde{\beta}_4) \frac{(k\vec{S}\vec{\pi})^2}{2m} + \frac{k^2}{2}(1 + \tilde{\beta}_4) \frac{e\vec{S}\vec{H}}{4m} - \\ -(1 - \tilde{\beta}_4)m + eA_0 - \frac{ie}{8m^2} k^2 [\vec{S}\vec{\pi}, \vec{S}\vec{E}]_- + O\left(\frac{1}{m^3}\right). \quad (5.15)$$

On the set of  $\Phi^+ = \tilde{\beta}_4 \Phi^+$  this Hamiltonian takes the form

$$H^{(3)}(\vec{\pi})\Phi^+ = \left\{ \frac{\pi_a^2}{2m} - k^2 e \frac{\vec{S}\vec{H}}{4m} + eA_0 - i \frac{ek^2}{8m^2} [\vec{S}\vec{\pi}, \vec{S}\vec{E}]_- \right\} \Phi^+. \quad (5.16)$$

Using the identity

$$[\vec{S}\vec{\pi}, \vec{S}\vec{E}]_- \equiv -\frac{i}{6} (3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1)) \frac{\partial E_a}{\partial x_b} - \\ - \frac{ie}{3} s(s+1) \operatorname{div} \vec{E} - \frac{i}{2} \vec{S}(\vec{E} \times \vec{\pi} - \vec{\pi} \times \vec{E}), \quad (5.17)$$

one can rewrite equation (5.16) in the form

$$H^{(3)}(\vec{\pi})\Phi^+ = \left\{ \frac{\pi_a^2}{2m} - ek^2 \frac{\vec{S}\vec{H}}{4m} + eA_0 - \frac{k^2}{24} Q_{ab} \frac{\partial E_a}{\partial x_b} - \right. \\ \left. - \frac{e}{24m^2} k^2 s(s+1) \operatorname{div} \vec{E} - \frac{ek^2}{16m^2} \vec{S}(\vec{E} \times \vec{\pi} - \vec{\pi} \times \vec{E}) \right\} \Phi^+, \quad (5.18)$$

where

$$Q_{ab} = \frac{e}{2m^2} \{3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1)\} \quad (5.19)$$

is the tensor of the quadrupole interaction.

Thus the non-relativistic equation without redundant components (4.15) allows us to obtain the description of a motion of the spin  $s$  particle in an external electromagnetic field. Such a description is in a good qualitative accordance with experimental data. For  $s = 1/2$  (5.18) coincides with the FW Hamiltonian if one puts an arbitrary constant  $k = 1/s$ .

## 6. Conclusion

So we have demonstrated that the non-relativistic Hamiltonian equations (2.12), (4.15) give the consistent description of a charged particle of any spin in external fields. Thus we have shown that the spin-orbit, the Darwin and the electric quadrupole interactions are not the truly relativistic effects but may be considered within the framework of the non-relativistic mechanics.

It is interesting to compare the obtained results with the ones predicted by the relativistic theory. One can make sure that there is not only the qualitative but also the quantitative accordance between them. We have demonstrated this fact for the case  $s = 1/2$ . If one puts into (5.18)  $k = \pm 2$ , the resulting equation completely coincides with the one obtained in [5] from the relativistic equations for arbitrary spin particles without redundant components [4, 17, 20]. In the particular case  $k = \pm 2$ ,  $s = 1$ , equation (5.18) possesses all terms, predicted by the Kemmer–Duffin equation [9], but additionally takes into account the quadrupole electric interaction of a particle with a field. At least, if one puts into (5.18)  $k = 1/s$ , the coefficients in the terms representing the spin-orbit, the Darwin and the quadrupole interactions are the same as calculated in [14] starting from the Feynman–Gell–Mann relativistic equations.

Note, that equations (4.15) and equation (2.12) with the redundant components lead to different physical consequences (see (5.9) and (5.18)). The analogous situation takes place in the relativistic case [9, 14].

1. Case K.M., *Phys. Rev.*, 1955, **100**, 1513.
2. Eberlein E., *Amer. Math. Monthly*, 1962, **66**, 587.
3. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
4. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., Nikitin A.G., *Teor. Math. Fiz.*, 1971, **8**, № 2, 192–205.
5. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Rep. Math. Phys.*, 1975, **8**, № 1, 33–48.
6. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cim.*, 1976, **16**, № 3, 81–85.
7. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Lett. Nuovo Cim.*, 1975, **14**, № 13, 483–488.
8. Galindo A., Sancher del Rio G., *Amer. J. Phys.*, 1961, **29**, 582.
9. Garrido L.M., Oliver L., *Nuovo Cim. A*, 1967, **52**, 588.
10. Hagen C.R., Hurley W.J., *Phys. Rev. Lett.*, 1970, **26**, 1381.
11. Heitler W., *Proc. Roy. Irish Acad. A*, 1943, **49**, 1.
12. Hurley W.J., *Phys. Rev.*, 1971, **3**, 2339.
13. Hurley W.J., *Phys. Rev. D*, 1974, **7**, 1185.
14. James K.R., *Proc. Phys. Soc. London*, 1968, **1**, 334.
15. Kemmer N., *Proc. Roy. Soc. A*, 1939, **173**, 91.

16. Levi-Leblond J.-M., *Comm. Math. Phys.*, 1967, **6**, 286.
17. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1966, **143**, 987.
18. Schrödinger E., *Proc. Roy. Soc. A*, 1955, **229**, 39.
19. Schrödinger E., *Proc. Roy. Soc. A*, 1955, **232**, 435.
20. Weaver D.L., Hammer C.L., Good R.H., *Phys. Rev.*, 1964, **135**, 241.

# Пуанкаре-инвариантные уравнения движения частиц произвольного спина

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

*“Физические явления, по-видимому, перестают подчиняться законам, которые можно выразить с помощью дифференциальных уравнений, и это, вероятно, самое большое и самое глубокое потрясение, которое испытала физика со времен Ньютона”.*

*А. Пуанкаре*

Получены и подробно исследованы три класса пуанкаре-инвариантных уравнений, описывающих свободное движение частицы произвольного спина. На основе выведенных уравнений получено непротиворечивое описание поведения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Установлены трансформационные свойства операторов координаты и спина.

The three classes of Poincaré-invariant equations, which describe a free motion of an arbitrary spin particle, have been obtained and studied in detail. The consistent description of the charged particle behavior in an external electromagnetic field have been obtained in the frame of the equations derived. The transformation properties of the position and of the spin operators have been established.

## Введение

Полвека назад, в 1928 г., Дирак открыл уравнение для частицы со спином  $1/2$ . Э. Майорана [2] был первым, кто сформулировал и частично решил задачу о построении релятивистских уравнений движения для частицы произвольного спина. Решая эту задачу, Майорана “попутно” открыл, за 15 лет до математиков, унитарные бесконечномерные представления однородной группы Лоренца  $O(1, 3)$ . С тех пор этой проблеме посвящено огромное число (около 1000) работ (наиболее полный список литературы по релятивистским уравнениям можно найти в работах [3–17]). Такой большой поток статей на эту тему говорит о том, что исследования по уравнениям для частиц с высокими спинами в связи с экспериментальным обнаружением резонансов со спинами  $1, 3/2, 5/2, \dots, 11/2$  вышли далеко за рамки чисто академического интереса.

До работы Фолди [18] в основном исследовались — с использованием тензорного и спинорного анализа и конечномерных представлений группы  $O(1, 3)$  — явно ковариантные релятивистские уравнения для частиц с произвольным спином. Обычно явно ковариантные уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно производных по пространственным и временной переменным. Особенностью этих уравнений является то, что волновая функция для частицы и античастицы с фиксированной массой  $m$  и спином  $s > 1/2$  с необходимостью имеет компонент больше, чем число возможных состояний [равное  $2(2s + 1)$ ].

Фолди [18], опираясь на результаты Вигнера по представлениям группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  [19, 20], провел теоретико-групповой анализ уравнений Дирака и Прока. Им же установлено, что уравнение для частицы произвольного спина можно представить в шредингеровской форме:

$$i\partial\Psi(t, \mathbf{x})/\partial t = H_s\Psi(t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

где

$$H_s = \gamma_0^{(s)} E; \quad \gamma_0^{(s)} = \begin{pmatrix} 1^{(2s+1)} & 0^{(2s+1)} \\ 0^{(2s+1)} & 1^{(2s+1)} \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$1^{(2s+1)}$  и  $0^{(2s+1)}$  — соответственно единичная и нулевая матрицы размерности  $(2s + 1) \times (2s + 1)$ ;

$$E = (p_a^2 + m^2)^{1/2}; \quad p_a = -i\partial/\partial x_a. \quad (3)$$

Уравнение (1), в отличие от явно ковариантных, является интегро-дифференциальным (или псевдодифференциальным), так как оператор  $E$  — квадратный корень из дифференциального оператора. Грубо говоря, это — уравнение бесконечно высокого порядка по пространственным производным и в нем отсутствует явная симметрия между пространственными и временными переменными.

В работах [21–24] было обнаружено, что если в явно ковариантные уравнения для частиц со спинами 1 и 3/2 ввести релятивистски-инвариантным способом взаимодействие с внешним электромагнитным полем, то частицы, описываемые такими уравнениями, будут двигаться со сверхсветовой скоростью; энергия таких частиц сможет принимать любые действительные и комплексные значения. Вайтман [73] показал, что даже пятикомпонентное уравнение Кеммера–Дэффина–Петье для частицы со спином  $s = 0$  обладает теми же свойствами. Некоторые явно ковариантные уравнения для  $s > 1/2$  после введения в них взаимодействия минимальным способом становятся просто противоречивыми [26].

К настоящему времени единственным явно ковариантным уравнением, не имеющим указанных патологических свойств, является уравнение Дирака для частицы со спином 1/2.

Основная причина возникновения указанных трудностей состоит в том, что волновые функции в уравнениях первого порядка для частиц со спином 0, 1, 3/2 имеют лишние (нефизические) компоненты, что позволяет ввести такие взаимодействия, которые приводят к нежелательным физическим следствиям. Такими же нефизическими свойствами обладают и релятивистские уравнения, в которые входят производные по времени выше первого порядка [27].

Чтобы преодолеть упомянутые трудности, естественно попытаться найти такие уравнения движения для свободной частицы, волновая функция которой имела бы только  $2(2s + 1)$  компонент. Чтобы функция, удовлетворяющая такому уравнению, допускала стандартную вероятностную интерпретацию, уравнение движения должно иметь шредингерову форму (1). При этом релятивистский гамильтониан свободной частицы должен явно зависеть от спиновых матриц. В противном случае он не несет никакой информации о спиновых эффектах (спин-орбитальной связи, дипольном и квадрупольном взаимодействии и т.п.), которые должны иметь место при введении взаимодействия с электромагнитным полем.

Построению уравнений движения для свободных частиц с фиксированной массой  $m$  и спином  $s$ , удовлетворяющих приведенным условиям, посвящены работы [28–44]. Разные авторы, исходя из различных конкретных математических постановок задачи, получили уравнения, отличающиеся друг от друга. Тем не менее между уравнениями для свободных частиц, полученных во всех работах [28–44], можно установить взаимно-однозначную связь. Однако физически эти уравнения совершенно различны, так как при введении в них взаимодействия с помощью стандартной замены  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$  они становятся неэквивалентными и приводят к различным физическим следствиям.

Вивер, Хаммер и Гуд [28], а затем Метьюз с сотр. [30–35] вывели уравнения вида (1) для частиц произвольного спина, инвариантные относительно локальных преобразований из группы Пуанкаре  $P(1, 3)$ . Гамильтонианы  $H_s$  Вивера, Хаммера, Гуда и Метьюза (ВХГМ) явно зависят от спиновых матриц, а волновые функции имеют простые правила преобразования. Все эти гамильтонианы представляют собой интегро-дифференциальные операторы в гильбертовом пространстве волновых функций  $\{\Psi(t, \mathbf{x})\}$  со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \Psi_1^+(t, \mathbf{x}) M_s \Psi_2(t, \mathbf{x}) d^3x, \quad (4)$$

где  $M_s$  — некоторый метрический положительно определенный интегро-дифференциальный оператор. Зависимость метрического оператора от импульса и спина сильно затрудняет задачу описания на основе теории ВХГМ поведения заряженной частицы во внешних электромагнитных полях.

В настоящей статье, являющейся в основном обзором наших работ [36–41, 45–48], построены пуанкаре-инвариантные уравнения для свободных частиц, допускающие непротиворечивое описание движения частиц во внешних полях. Полученные уравнения можно разделить на следующие три класса.

**1.** Интегро-дифференциальные уравнения в форме (1). В отличие от подхода ВХГМ, гамильтонианы в уравнении (1) определены в гильбертовом пространстве с обычно принятым в квантовой механике скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \Psi_1^+(t, \mathbf{x}) \Psi_2(t, \mathbf{x}) d^3x. \quad (5)$$

Этот факт позволил нам обобщить найденные уравнения на случай взаимодействия частиц с полем [38, 39] в предположении, что импульсы частиц малы по сравнению с их массами, и вычислить электромагнитные моменты частиц с произвольным спином. В работах Гуертина [43, 44] результаты работ [36–41] получили интересное обобщение на случай гильбертова пространства с индефинитной метрикой. При этом метрический оператор  $M_s$  является, как и для уравнений Тамма–Сакаты–Такетани (ТСТ), матрицей, не зависящей от импульса и спина частицы.

**2.** Система  $2(2s + 1)$  линейных дифференциальных уравнений второго порядка вида (1). Построены все возможные (с точностью до преобразований подобия, задаваемых числовыми матрицами) пуанкаре-инвариантные уравнения второго порядка, описывающие движение свободной частицы с произвольным спином и не имеющие лишних компонент. В случае  $s = 1/2, 0, 1$  полученные уравнения совпадают с уравнениями Дирака и ТСТ [49, 50]. В качестве платы за дифференциальность гамильтонианов в этом подходе приходится иметь дело с индефинитной метрикой или с метрикой (4).

**3.** Система дифференциальных уравнений первого порядка вида (1) для частицы произвольного спина. Эти уравнения представляют собой систему  $8s$  уравнений типа Дирака с ковариантным дополнительным условием, устраняющим лишние компоненты волновой функции. Уравнения имеют достаточно простую форму, которая не усложняется с ростом спина, и не приводит к противоречиям при обобщении на случай заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле.

Для полноты изложения в рамках развиваемого подхода рассмотрены уравнения для частицы с нулевой массой покоя. В [45, 46] показано, что для частицы и античастицы с нулевой массой и произвольным спином  $s$  существует три типа пуанкаре-инвариантных уравнений. Одно из таких нелокальных уравнений движения не инвариантно даже относительно  $PCT$ -преобразования [45]. За последние годы было предложено большое число уравнений (не всегда неэквивалентных) для частиц с нулевой массой [51–54]. Оказалось, что все они принадлежат к указанным трем типам [47]. Во втором разделе, с использованием результатов работ [45–48], найдены все возможные (с точностью до эквивалентности) пуанкаре-инвариантные уравнения для безмассовых частиц и изучены их свойства относительно дискретных преобразований  $P$ ,  $C$  и  $T$ .

При выводе релятивистских уравнений движения обычно используют такие понятия, как тензор и спинор относительно группы Лоренца  $O(1, 3)$ . В данной работе для получения и анализа уравнений движения эти понятия нигде не используются. Все изложение ведется на алгебраическом языке, развитом в работах [30–43, 45–48, 55–57]. Теоретико-групповой анализ уравнений проведен не в традиционно используемых терминах представлений группы Лоренца  $O(1, 3)$ , а в терминах представлений группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  [19, 20], содержащей в качестве подгруппы группу Лоренца  $O(1, 3)$ . Причина возникновения такого взгляда на уравнения движения обусловлена тем, что к настоящему времени только инварианты группы Пуанкаре  $P(1, 3)$  [а не инварианты ее подгруппы  $O(1, 3)$ ] имеют четкую физическую интерпретацию. В связи со сказанным выше возникает естественный вопрос: какие же представления группы Лоренца  $O(1, 3)$  реализуются на множестве решений  $\{\Psi\}$  выведенных уравнений.

На этот вопрос можно дать такой ответ. Так как на множестве решений  $\{\Psi\}$  реализуется, как правило, прямая сумма нескольких неприводимых бесконечномерных [но конечномерных относительно малой (спиновой) группы  $SU(2)$ ] унитарных представлений группы  $P(1, 3)$ , это означает, что на этом же множестве — из-за включения  $P(1, 3) \supset O(1, 3)$  — реализуется бесконечная прямая сумма (точнее прямой интеграл) неприводимых бесконечномерных унитарных представлений группы Лоренца.

В заключение отметим, что изложенный метод исследования релятивистских уравнений применим и для построения уравнений движения частиц произвольного спина, инвариантных относительно группы движений нерелятивистской квантовой механики — группы Галилея [58, 59]. Отметим также, что если резонансы с высокими спинами описывать как сложную систему, состоящую, например, из двух элементарных стабильных частиц со спинами, то и в этом случае применима наша методика [57].

# 1. Пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент

## Постановка задачи

Найдем уравнения движения свободной релятивистской частицы с произвольным спином в гамильтоновой форме (1) в пространстве функций со скалярным произведением (4) и (5).

Будем говорить, что уравнение вида (1) пуанкаре-инвариантно и описывает частицы с массой  $m$  и спином  $s$ , если генераторы  $P(1,3)$ -группы  $P_a$ ,  $J_{\mu\nu}$  и гамильтониан  $H_s$  удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[P_a, P_b]_- = 0, \quad [P_a, H_s]_- = 0, \quad [J_{ab}, H_s]_- = 0; \quad (6)$$

$$[J_{ab}, J_{cd}]_- = i(\delta_{ac}J_{bd} + \delta_{bd}J_{ac} - \delta_{ad}J_{bc} - \delta_{bc}J_{ad}); \quad (7)$$

$$[J_{ab}, J_{0c}]_- = i(\delta_{ac}J_{0b} - \delta_{bc}J_{0a}); \quad (8)$$

$$[P_a, J_{0b}]_- = i\delta_{ab}H_s; \quad [P_a, J_{bc}]_- = i(\delta_{ac}P_b - \delta_{ab}P_c); \quad (9)$$

$$[J_{0a}, J_{0b}]_- = -iJ_{ab}; \quad (10)$$

$$[H_s, J_{0a}]_- = iP_a, \quad a, b, c, d = 1, 2, 3; \quad (11)$$

$$P_\mu P^\mu = H_s^2 - P_a^2 = m^2; \quad (12)$$

$$W_\mu W^\mu \Psi(t, \mathbf{x}) = m^2 s(s+1) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad (13)$$

где введено обозначение  $[A, B]_- = AB - BA$ , а

$$W_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} J^{\nu\rho} P^\sigma / 2 \quad (14)$$

— вектор Любанского–Паули.

Задача построения пуанкаре-инвариантных уравнений движения частицы произвольного спина будет решена в трех различных подходах. Уравнения, полученные в первом и третьем подходах, оказываются удобными для применения их к задачам квантовой механики, а уравнения, полученные во втором подходе, можно успешно использовать в теории поля [31].

В первом подходе (I) задача сводится к следующему: найти все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы  $H_s^I$ , такие, что операторы [36, 37]

$$P_0^I = H_s^I, \quad P_a^I = p_a = -i\partial/\partial x_a, \quad J_{ab}^I = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad (15)$$

$$J_{0a}^I = t p_a - \frac{1}{2}[x_a, P_0^I]_+, \quad [x_a, P_0^I]_+ = x_a P_0^I + P_0^I x_a$$

удовлетворяют алгебре Пуанкаре (6)–(13). Здесь  $S_{ab}$  — матрицы, реализующие прямую сумму двух неприводимых представлений  $D(s)$  алгебры  $O(3)$ :

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} S_c & 0 \\ 0 & S_c \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) — \text{цикл } (1, 2, 3). \quad (16)$$

Во втором подходе (II) задача формулируется следующим образом: найти все такие гамильтонианы  $H_s^{II}$ , что совокупность операторов [28–35, 38]

$$P_0^{II} = H_s^{II}, \quad P_a^{II} = p_a = -i\partial/\partial x_a, \quad (17)$$

$$J_{ab}^{II} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad J_{0a}^{II} = t p_a - x_a P_0^{II} + i\sigma_3 S_a$$

удовлетворяет алгебре Пуанкаре. Здесь  $\sigma_3$  —  $2(2s + 1)$ -рядная матрица Паули:

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (18)$$

В том частном случае, когда спин  $s = 1/2$ , представления (15) и (17) совпадают, поскольку

$$H_{1/2}^I = H_{1/2}^{II} = \sigma_1 m + 2\sigma_3 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} \quad (19)$$

и

$$\frac{1}{2}[H_{1/2}^I, x_a]_+ \equiv x_a H_{1/2}^{II} + i\sigma_3 S_a. \quad (20)$$

Оператор (19) — это хорошо известный гамильтониан Дирака. Для других значений  $s$ , как будет показано ниже, представления (15) и (17) не совпадают. Выбор структуры представлений алгебры  $P(1, 3)$  в форме (15) и (17) обусловлен тем, что на множестве решений уравнения Дирака генераторы группы Пуанкаре можно представить в форме или (15) или (17). Основное отличие представления (15) от (17) состоит в том, что операторы (15) при всех значениях  $s$  эрмитовы относительно обычно принятого в квантовой механике скалярного произведения (5), в то время как операторы (17) при  $s > 1/2$  неэрмитовы относительно (5), но эрмитовы в скалярном произведении (4) с некоторым метрическим оператором  $M_s = M_s(p_a)$ .

На множестве  $\{\Psi\}$  решений уравнения (1) определим операторы дискретных преобразований:

$$\begin{aligned} P\Psi(t, \mathbf{x}) &= r_1\Psi(t_1, -\mathbf{x}), \\ T\Psi(t, \mathbf{x}) &= r_2\Psi(-t, \mathbf{x}), \\ C\Psi(t, \mathbf{x}) &= r_3\Psi^*(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $r_a$  — матрицы, которые, не умаляя общности, можно выбрать в виде:

$$\begin{aligned} r_1^I &= \sigma_1 \quad \text{или} \quad r_1^I = \tilde{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad r_1^{II} = \sigma_1, \\ r_2^I &= r_2^{II} = \Delta \quad \text{или} \quad r_2^{II} = \sigma_3\Delta, \quad r_3^I = r_3^{II} = \sigma_2\Delta, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \Delta' & 0 \\ 0 & \Delta' \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (22)$$

$\Delta'$  — матрица, однозначно определяемая уравнениями [18]

$$\Delta' s_c = -s_c^* \Delta', \quad (\Delta')^2 = (-1)^{2s}. \quad (23)$$

Операторы  $P$ ,  $C$ ,  $T$  и генераторы  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  группы  $P(1, 3)$  должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{aligned} [P, P_0]_- &= [P, P_a]_+ = [P, J_{ab}]_- = [P, J_{0a}]_+ = 0, \\ [T, P_0]_- &= [T, P_a]_+ = [T, J_{0a}]_- = [T, J_{ab}]_+ = 0, \\ [C, P_\mu]_+ &= [C, J_{\mu\nu}]_+ = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Потребуем, чтобы уравнение (1) было инвариантным относительно  $P$ -,  $T$ -,  $C$ -преобразований. При этом к алгебре Пуанкаре (6)–(13) необходимо добавить соотношения (24). Таким образом окончательно получим, что задача о нахождении

пуанкаре-инвариантных гамильтоновых уравнений без лишних компонент для частиц с произвольным спином сводится в подходах I и II к отысканию операторов  $H_s$ , удовлетворяющих соотношениям (6)–(13), (24).

Подходы I и II позволяют получить гамильтоновы уравнения без лишних компонент для частицы с произвольным спином, которые, однако, не включают уравнений ТСТ [49, 50] для частиц с  $s = 0$  и  $s = 1$ . Уравнения движения, включающие при  $s = 1/2$  уравнение Дирака, а при  $s = 0, 1$  — уравнение ТСТ, будут получены в третьем подходе (III), в котором задача ставится следующим образом: найти все возможные (с точностью до эквивалентности) дифференциальные операторы второго порядка  $H_s^{\text{III}}$ , такие, чтобы совокупность операторов

$$\begin{aligned} P_0^{\text{III}} &= H_s^{\text{III}}, & P_a^{\text{III}} &= p_a = -i\partial/\partial x_a, \\ J_{ab}^{\text{III}} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{0a}^{\text{III}} &= t p_a - \frac{1}{2}[x_a, P_0^{\text{III}}]_+ + \lambda_a \end{aligned} \quad (25)$$

удовлетворяла алгебре  $P(1, 3)$ . Здесь  $\lambda_a = \lambda_a(\mathbf{S}, \mathbf{p})$  — некоторый оператор, на явный вид которого мы не накладываем *a priori* никаких ограничений.

Существенное отличие подхода III от подходов I и II состоит в том, что мы не фиксируем явный вид генераторов  $J_{0a}^{\text{III}}$  и не требуем инвариантности уравнения (1) относительно преобразований  $P, C, T$ . Для нахождения явного вида гамильтонианов в подходе III достаточно потребовать, чтобы  $H_s^{\text{III}}$  принадлежал классу дифференциальных операторов второго порядка.

Представления вида (25) использовались в работах [43], где также были получены гамильтонианы для частиц произвольного спина  $s$ , совпадающие при  $s = 0, 1$  гамильтонианами ТСТ. Однако при  $s > 1$  гамильтонианы [43] являются интегро-дифференциальными операторами.

### Явный вид операторов $H_s^1$

Здесь решена задача I, т.е. найдены все те операторы  $H_s^1$ , которые удовлетворяют системе соотношений (6)–(13), (24) в случае, когда представление алгебры  $P(1, 3)$  имеет вид (25).

Разложим искомый оператор  $H_s^1$  по полной системе ортопроекторов

$$H_s^1 = \sum_l (d_l(p) + \sigma_1 g_l^1(p) + \sigma_2 h_l^1(p) + \sigma_3 f_l^1(p)) \Lambda_l, \quad (26)$$

где

$$\Lambda_l = \prod_{l' \neq l} \frac{S_p - l'}{l - l'}, \quad S_p = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p}, \quad p = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}, \quad (27)$$

$$l, l' = -s, -s + 1, \dots, s,$$

$d_l^1(p), g_l^1(p), h_l^1(p), f_l^1(p)$  — неизвестные функции, зависящие от  $p$ .

Нетрудно убедиться, что операторы (27) являются ортопроекторами на собственные подпространства оператора  $S_p$ , т.е. удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda_l \Lambda_{l'} = \delta_{ll'} \Lambda_l, \quad \sum_{l=-s}^s \Lambda_l = 1, \quad S_p \equiv \sum_{l=-s}^s l \Lambda_l. \quad (28)$$

Определить явный вид гамильтонианов  $H_s^I$  означает теперь найти все значения коэффициентов  $d_i^I(p)$ ,  $g_i^I(p)$ ,  $h_i^I(p)$ ,  $f_i^I(p)$ , при которых выполняются соотношения (6)–(13), (24). Подставляя (26) в (24), получаем

$$\begin{aligned} d_i^I &= h_i^I = 0, & f_i^I &= f_{-l}^I, & g_i^I &= g_{-l}^I, & \text{если } r_1^I &= \tilde{I}, \\ d_i^I &= h_i^I = 0, & f_i^I &= -f_{-l}^I, & g_i^I &= g_{-l}^I, & \text{если } r_1^I &= \sigma_1. \end{aligned} \quad (29)$$

Условие (12) налагает на функции  $f_i^I$ ,  $g_i^I$  дополнительное ограничение

$$(f_i^I)^2 + (g_i^I)^2 = p^2 + m^2. \quad (30)$$

Можно убедиться непосредственной проверкой, что соотношения (6)–(9), (11), (12) обращаются в тождество, если выполняются (26), (30). Таким образом, остается только потребовать, чтобы выполнялись соотношения (10) и (25), которые и определяют окончательно структуру операторов  $H_s^I$ , т.е. явный вид коэффициентных функций  $f_s^I$ ,  $g_s^I$ .

Соотношение (10) для операторов (15) можно привести к виду [36], [37]

$$[[H_s^I, x_a]_-, [H_s^I, x_b]_-]_- = -4iS_{ab}. \quad (31)$$

Подставив (26), (29) в (31), используя тождество [36, 37]

$$[x_a, \Lambda_l]_- \equiv \frac{1}{2p^2} S_{ab} p_b (\Lambda_{l-1} + \Lambda_{l+1} - 2\Lambda_l) - \frac{i}{2p} \left( S_a - \frac{p_a}{p} S_b \right) (\Lambda_{l-1} - \Lambda_{l+1}) \quad (32)$$

и принимая во внимание соотношения (28), получаем следующие уравнения для  $f_i^I$ ,  $g_i^I$ :

$$g_i^I g_{l+1}^I + f_i^I f_{l+1}^I = m^2 - p^2. \quad (33)$$

Согласно (30), функции  $f_i^I$ ,  $g_i^I$  можно представить в виде

$$f_i^I = E \sin \varphi_l, \quad g_i^I = E \cos \varphi_l, \quad E = (p^2 + m^2)^{1/2}. \quad (34)$$

Подставив (34) в (33), приходим к рекуррентной формуле

$$\varphi_{l+1} = \varphi_l \pm 2\theta^I, \quad \theta^I = \arctg p/m. \quad (35)$$

Формулы (34), (35) позволяют определить все коэффициенты  $g_i^I$ ,  $f_i^I$  оператора (26), если известна хотя бы одна функция из набора  $f_i^I$  (или  $g_i^I$ ). Эту начальную функцию можно найти из соотношений (29), (35), которые с учетом (34) принимают вид

$$\varphi_l = \begin{cases} \varphi_{-l} & \text{для } r_1^I = \tilde{I}, \\ -\varphi_{-l} & \text{для } r_1^I = \sigma_1. \end{cases} \quad (36)$$

Из (35), (36) получаем

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_{1/2} = \theta^I, \quad \text{если } r_1^I = \sigma_1. \quad (37)$$

Если же  $r_1^I = I$ , то для полуцелых  $s$  условия (35) и (36) несовместны, а для  $s$  целых  $\varphi_0$  может быть произвольной функцией от  $p$ :

$$\varphi_0 = \varphi(p), \quad r_1^I = \tilde{I}. \quad (38)$$

Используя тождества

$$W_a^I \equiv [H_s^I, S_a]_+/2, \quad W_0^I = \mathbf{p} \cdot \mathbf{S},$$

нетрудно убедиться, что соотношение (13) заведомо выполняется, если имеет место (31). Таким образом, приходим окончательно к следующему результату.

**Теорема 1.** Все возможные (с точностью до эквивалентности) гамильтонианы  $H_s^I$ , удовлетворяющие соотношениям (6)–(15), (24), задаются формулами (26), (29), (34), (35), (37), (38). Уравнение (1) с гамильтонианом  $H_s^I$  инвариантно относительно полной группы Пуанкаре  $\tilde{P}(1,3)$  и описывает свободное движение частицы с произвольным спином  $s$  и массой  $m$ .

Приведем простейшие решения системы рекуррентных соотношений (35), (36), (38):

$$(\varphi_l)_1 = (-1)^{N_l} \theta^l, \quad N_l = \begin{cases} l + \frac{1}{2} & \text{для полуцелых } s, \\ l & \text{для целых } s, \end{cases} \quad (39)$$

$$(\varphi_l)_2 = 2l\theta^l. \quad (40)$$

Подставляя (39), (40), (34), (29) в (26), получаем [36, 37, 39]:

$$(H_s^I)_1 = \sigma_1 m + \sigma_3 p \sum_l (-1)^{N_l} \Lambda_l, \quad (41)$$

$$(H_s^I)_2 = E \sum_l \{ \sigma_1 \cos(2l\theta^l) + \sigma_3 \sin(2l\theta^l) \} \Lambda_l. \quad (42)$$

Выбирая другие решения системы (35), (36), (38), приходим к гамильтонианам, которые унитарно эквивалентны (41), (42), но отличаются от них по форме. Используя (35), (37), нетрудно подсчитать, что число возможных гамильтонианов  $H_s^I$  равно (при  $r_i^I = \sigma_1$ )  $2^{s-1/2}$  для полуцелых  $s$  и  $2^{s-1}$  для целых  $s$ .

Выпишем явные выражения операторов  $H_s^I$  в терминах  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}$  для  $s \leq 3/2$ . Используя (41), (42), (27), получаем [39]

$$\begin{aligned} \text{для } s = 0 \quad & (H_0^I)_1 = \sigma_1 m + \sigma_3 p, \quad (H_0^I)_2 = \sigma_1 E; \\ \text{для } s = 1/2 \quad & (H_{1/2}^I)_1 = (H_{1/2}^I)_2 = \sigma_1 m + 2\sigma_3 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}); \\ \text{для } s = 1 \quad & (H_1^I)_1 = (H_0^I)_2 - 2\sigma_3 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 p^{-1}, \\ & (H_1^I)_2 = (H_0^I)_2 + 2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})[\sigma_3 m - \sigma_1 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})]E^{-1}; \\ \text{для } s = 3/2 \quad & (H_{3/2}^I)_1 = H_{1/2}^I + \frac{1}{3}\sigma_3 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})[1 - 4(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 p^{-2}], \\ & (H_{3/2}^I)_2 = H_{1/2}^I + \left\{ \sigma_1 [E^2 + p^2 + 2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2]m + \right. \\ & \quad \left. + \sigma_3 \left[ \frac{1}{12} p^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) - \frac{4}{3} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^3 \right] \right\} E^{-2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Из (43) видно, что операторы  $H_s^I$  можно выразить через  $H_{s-1}^I$ . Таким образом, вид гамильтониана для произвольного спина полностью определяется гамильтонианами для  $s = 0, 1/2$ .

### Явный вид операторов $H_s^{II}$

Приведем здесь решение задачи II, т.е. отыщем все операторы  $H_s^{II}$ , удовлетворяющие системе соотношений (6)–(13), (25), когда представление алгебры  $P(1, 3)$  имеет структуру (17). Впервые гамильтонианы  $H_s^{II}$  получили Вивер, Хаммер и Гуд [28], а затем, в более общей постановке задачи, Метьюз с сотр. [30–35].

По аналогии с  $H_s^I$  ищем  $H_s^{II}$  в виде

$$H_s^{II} = \sum_l (\sigma_1 g_l^{II} + \sigma_3 f_l^{II}) \Lambda_l, \quad (44)$$

где неизвестные функции  $g_l^{II}$ ,  $f_l^{II}$ , зависящие от  $p$  и  $m$ , обладают следующими свойствами:

$$f_l^{II} = -f_{-l}^{II}, \quad g_l^{II} = g_{-l}^{II}, \quad r_2^{II} = \Delta; \quad (45)$$

$$f_l^{II} = -f_{-l}^{II}, \quad g_l^{II} = -g_{-l}^{II}, \quad r_2^{II} = \sigma_3 \Delta; \quad (46)$$

$$f_l^{II} + (g_l^{II})^2 = p^2 + m^2. \quad (47)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что условия (6)–(13), (24) пуанкаре-инвариантности уравнения (1) выполняются, если имеют место соотношения (44)–(47) и (11). Используя общий вид (16) генераторов группы  $P(1, 3)$ , приводим (11) к виду

$$- [H_s^{II}, x_a]_- H_s^{II} + i S_a [H_s^{II}, \sigma_3]_- + i [H_s^{II}, S_a]_- \sigma_3 = i p a. \quad (48)$$

Подставляя (44) в (48), используя тождества (32) и

$$[\Lambda_\nu, \mathbf{S}]_- \equiv \mathbf{p} \times [\Lambda_\nu, \mathbf{x}]_- \quad (49)$$

и учитывая линейную независимость слагаемых, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} f_l^{II} f_{l+1}^{II} + g_l^{II} g_{l+1}^{II} &= E^2 + p (f_{l+1}^{II} - f_l^{II}), \\ g_l^{II} (f_{l+1}^{II} + p) &= g_{l+1}^{II} (f_l^{II} - p), \quad g_l^{II} \partial g_l^{II} / \partial p - f_l^{II} \partial f_l^{II} / \partial p = 2lp. \end{aligned} \quad (50)$$

Опуская довольно громоздкие выкладки, приведем решения системы (45)–(47) и (50):

$$(f_l^{II})_1 = E \operatorname{th} (2l\theta^{II}), \quad (g_l^{II})_1 = E \operatorname{sech} (2l\theta^{II}), \quad r_2^{II} = \Delta; \quad (51)$$

$$(f_l^{II})_2 = E \operatorname{cth} (2l\theta^{II}), \quad (g_l^{II})_2 = iE \operatorname{cosech} (2l\theta^{II}), \quad (52)$$

$$r_2^{II} = \sigma_3 \Delta, \quad \theta^{II} = \operatorname{Arth} p/E.$$

Отметим, что решения (51) определены для произвольных  $s$ , а (52) — только для полуцелых значений спина, поскольку при целых  $s$  уравнения (46), (47), (50) становятся несовместными.

Подставляя (51), (52) в (44), получаем явный вид гамильтонианов  $H_s^{\text{II}}$  для представления (16):

$$(H_s^{\text{II}})_1 = E \sum_l \{ \sigma_1 \operatorname{sech}(2l\theta^{\text{II}}) + \sigma_3 \operatorname{th}(2l\theta^{\text{II}}) \} \Lambda_l, \quad (53)$$

$$(H_s^{\text{II}})_2 = E \sum_l \{ i\sigma_1 \operatorname{cosech}(2l\theta^{\text{II}}) + \sigma_3 \operatorname{cth}(2l\theta^{\text{II}}) \} \Lambda_l, \quad (54)$$

где гамильтониан (53) соответствует выбору  $r_2^{\text{II}} = \Delta$  и определен для произвольных значений спина  $s$ , а оператор (54) соответствует  $r_2^{\text{II}} = \sigma_3 \Delta$  и определен только для полуцелых  $s$ . Последнее обстоятельство осталось незамеченным в работах [31, 33], где (54) интерпретируется как гамильтониан для частиц с целым спином.

Выразим гамильтонианы  $H_s^{\text{II}}$  для  $s \leq 3/2$  через операторы  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}$ . Согласно (27), (53), (54) имеем

$$\begin{aligned} \text{для } s = 0 \quad H_0^{\text{II}} &= \sigma_1 E; \\ s = 1/2 \quad (H_{1/2}^{\text{II}})_1 &= \sigma_1 m + 2\sigma_3 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}), \\ (H_{1/2}^{\text{II}})_2 &= -2E (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) (i\sigma_1 m + \sigma_3 E) p^{-2}; \\ s = 1 \quad H_1^{\text{II}} &= \sigma_1 E + 2E (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) [\sigma_1 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) - \sigma_3 E] (E^2 + p^2)^{-1}; \\ s = 3/2 \quad (H_{3/2}^{\text{II}})_1 &= \left\{ \sigma_1 \left[ \frac{1}{4} (4E^2 + 7p^2) - 2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 \right] m + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_3 \left[ (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) \frac{1}{3} (20p^2 + 6E^2) + \frac{8}{3} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^3 \right] \right\} (E^2 + 3p^2)^{-1}, \\ (H_{3/2}^{\text{II}})_2 &= \left\{ \sigma_1 \frac{mE}{p} \left[ \frac{1}{8} (35E^2 - 13m^2) - 4 \frac{E^2}{p^2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + i\sigma_3 \frac{E^2}{m} \left[ \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})}{3p} (20E^2 + 6p^2) + 8 \frac{E^2}{p^3} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^3 \right] \right\} (p^2 + 3E^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (55)$$

**Замечание 1.** Решение задачи II, приведенное в работах [32–35] получено при несколько более слабых условиях, налагаемых на вид гамильтонианов  $H_s^{\text{II}}$ . В работе [33] показано, что гамильтонианы (35), (36) можно получить, не требуя  $P$ -,  $C$ -инвариантности уравнения (1), а в работе [34] гамильтонианы (53), (54) получены в предположении, что уравнение движения (1) инвариантно относительно преобразований из группы  $P(1, 3)$  и преобразования  $\Theta = CPT$ . Мы не приводим здесь деталей этих исследований.

**Замечание 2.** Решение задач I и II найдено в работах [38, 39] в более общей постановке, когда матрицы  $S_{ab}$ , входящие в определение (14) генераторов группы  $P(1, 3)$ , являются элементами представления  $D(j, \tau)$  алгебры  $O(4)$ . В такой постановке получены уравнения для частиц с переменными спином и массой, причем возможные значения спина  $s$  лежат в интервале

$$|j - \tau| \leq s \leq j + \tau, \quad (56)$$

где  $j$  и  $\tau$  — произвольные целые или полуцелые числа, задающие неприводимое представление группы  $O(4)$ .(4). При этом масса частицы или фиксирована, или задается одной из формул

$$m = a_1 + b_1 s(s+1) \quad \text{или} \quad m^2 = a_2^2 + b_2^2 s(s+1), \quad (57)$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — произвольные постоянные числа. Более подробное рассмотрение уравнений для частиц с переменными спином и массой выходит за рамки настоящего обзора.

### Явный вид операторов $H_s^{\text{III}}$

Решим задачу III, т.е. найдем все возможные (с точностью до преобразований эквивалентности) дифференциальные операторы  $H_s^{\text{III}}$ , содержащие производные по пространственным переменным не выше второго порядка и удовлетворяющие совместно с (25) коммутационным соотношениям (6)–(13) алгебры Пуанкаре.

Искомый гамильтониан  $H_s^{\text{III}}$  представим в виде разложения по спиновым матрицам и  $2(2s+1)$ -рядным матрицам Паули:

$$H_s^{\text{III}} = h_0^{(s)} m + h_1^{(s)} + h_s^{(s)} / m, \quad (58)$$

где

$$h_0^{(s)} = a_\mu^{(s)} \sigma^\mu, \quad h_1^{(s)} = b_\mu^{(s)} \sigma^\mu (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}), \quad h_2^{(s)} = c_\mu^{(s)} \sigma^\mu (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 + d_\mu^{(s)} \sigma^\mu p^2, \quad (59)$$

$\sigma_\mu$  —  $2(2s+1)$ -рядные матрицы Паули, коммутирующие с  $S_{ab}$  (16);  $a_\mu^{(s)}, b_\mu^{(s)}, c_\mu^{(s)}, d_\mu^{(s)}$  — неизвестные коэффициенты. По повторяющемуся индексу  $\mu$  подразумевается суммирование от 0 до 3.

**Теорема 2.** *Все возможные (с точностью до эквивалентности) дифференциальные операторы второго порядка  $H_s^{\text{III}}$ , удовлетворяющие (6)–(13), (25) задаются формулами:*

$$H_s^{\text{III}} = \sigma_1 m + \sigma_3 k_1 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) + \frac{1}{2m} (\sigma_1 - i\sigma_2) [p^2 - k_1^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2], \quad s = 0, 1/2, \dots; \quad (60)$$

$$H_1^{\text{III}} = \sigma_1 m + \left[ i\sigma_2 k_2 + \sigma_3 \sqrt{k_2(k_2 - 1)} \right] \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m} + (\sigma_1 - i\sigma_2) \frac{p^2}{2m}; \quad (61)$$

$$H_1^{\text{III}} = \sigma_1 m + \sigma_3 k_3 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) + \frac{p^2}{2m} (\sigma_1 - i\sigma_2) + \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{2m} [-k_3^2 \sigma_1 + i(2 - k_3^2) \sigma_2]; \quad (62)$$

$$H_{3/2}^{\text{III}} = \sigma_1 \left( m + \frac{p^2}{2m} \right) + \frac{ik_4}{2m} \sigma_2 \left[ (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 - \frac{5}{4} p^2 \right] + \frac{\sigma_3}{2m} \sqrt{k_4^2 - 1} p^2; \quad (63)$$

$$H_{3/2}^{\text{III}} = \sigma_1 \left[ m + \frac{p^2}{2m} - k_5^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 \right] + \sigma_3 k_5 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}) - \frac{i}{2m} \sigma_2 \left[ \left( \frac{5}{4} k_5^2 - 1 \right) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 - \left( \frac{9}{4} k_5^2 - \frac{5}{4} \right) p^2 \right], \quad (64)$$

где  $k_l$  — произвольные параметры,  $l = 1, 2, 3, 4, 5$ .

**Доказательство.** Используя явный вид (25), (16) генераторов группы  $P(1, 3)$  нетрудно убедиться, что гамильтониан (58) удовлетворяет соотношениям (6) при произвольных значениях коэффициентов  $a_\mu^{(s)}, b_\mu^{(s)}, c_\mu^{(s)}, d_\mu^{(s)}$ .

Потребуем, чтобы гамильтониан (58) удовлетворял условию (12), которое запишем в следующем виде:

$$(H_s^{\text{III}})^2 = p^2 + m^2. \quad (65)$$

Подставляя (58) в (65) и приравнявая коэффициенты при линейно-независимых слагаемых, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} (h_0^{(s)})^2 = 1, \quad [h_1^{(s)}, h_2^{(s)}]_+ = 0, \quad (h_2^{(s)})^2 = 0, \\ [h_0^{(s)}, h_1^{(s)}]_+ = 0, \quad (h_1^{(s)})^2 + [h_0^{(s)}, h_2^{(s)}]_+ = p^2. \end{aligned} \quad (66)$$

Ввиду линейной независимости спиновых матриц  $S_a$  и матриц Паули  $\sigma_\mu$  система соотношений (59), (66) эквивалентна системе уравнений для коэффициентов  $a_\mu^{(s)}, b_\mu^{(s)}, c_\mu^{(s)}, d_\mu^{(s)}$ . Решение системы (59) и (66) для произвольных значений  $s$  задается следующей формулой [40, 41]:

$$h_0^{(s)} = \sigma_1, \quad h_1^{(s)} = \sigma_3 k_1 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}), \quad h_2^{(s)} = (\sigma_1 - i\sigma_2) [p^2 - k_1^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] / 2, \quad (67)$$

где  $k_1$  — произвольное комплексное число. Для  $s = 1$  и  $s = 3/2$  помимо (61) существует еще по два независимых решения:

$$\begin{aligned} h_0^{(1)} = \sigma_1, \quad h_1^{(1)} = 0, \\ h_2^{(1)} = (\sigma_1 - i\sigma_2) p^2 / 2 + [k_2 i \sigma_2 + \sigma_3 \sqrt{k_2(k_2 - 1)}] (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2; \\ h_0^{(1)} = \sigma_1, \quad h_1^{(1)} = \sigma_3 k_3 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}), \\ h_2^{(1)} = \sigma_1 [p^2 - k_3^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] / 2 + i\sigma_2 [(2 - k_3^2) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 - p^2] / 2; \\ h_0^{(3/2)} = \sigma_1, \quad h_1^{(3/2)} = 0, \\ h_2^{(3/2)} = \left\{ \sigma_1 p^2 + i\sigma_2 k_4 [(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 - 5p^2 / 4] + \sigma_3 \sqrt{k_4^2 - 1} p^2 \right\} / 2; \\ h_0^{(3/2)} = \sigma_1, \quad h_1^{(3/2)} = \sigma_3 k_5 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}), \\ h_2^{(3/2)} = \frac{i}{2} \sigma_2 \left[ \left( \frac{5}{4} k_5^2 - 1 \right) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 - \left( \frac{9}{4} k_5^2 - \frac{5}{4} \right) p^2 \right] + \sigma_1 [p^2 - k_5^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] / 2, \end{aligned} \quad (68)$$

где  $k_2, k_3, k_4, k_5$  — произвольные комплексные числа.

Формулы (67), (68) задают все возможные решения системы (59), (66) с точностью до преобразований эквивалентности, осуществляемых числовыми матрицами. Подставив (67), (68) в (58), приходим к гамильтонианам (60)–(64).

Для завершения доказательства теоремы осталось только указать явный вид операторов  $\lambda_a$ , входящих в определение (25) генераторов  $J_{0a}$ , при котором операторы (25), (60)–(64) удовлетворяют соотношениям (8)–(11) и (13). Можно убедиться

непосредственной проверкой, что эти соотношения выполняются, если положить в (25)

$$\lambda_a = \left(1 - \frac{k_1}{2}\right) \left[ i\sigma_1 S_a - \frac{(\sigma_1 - i\sigma_2)}{2m} \varepsilon_{abc} p_b S_c \right] \quad (69)$$

в случае, когда гамильтониан  $H_s^{\text{III}}$  имеет вид (60), и

$$\begin{aligned} \lambda_a &= -\frac{[S_{ab}p_b, H_s^{\text{III}}]_+}{2E(E+m)} + i\frac{p_a(2E+B_s)}{2E^2B_s} - i\frac{[\dot{x}_a\sigma_1, H_s^{\text{III}}]}{2EB_s} - i\frac{[\dot{S}_{ab}p_b\sigma_1, H_s^{\text{III}}]_+}{2(E+m)B_s}, \\ B_s &= 2E + [H_s^{\text{III}}, \sigma_1]_+, \quad \dot{A} = i[H_s^{\text{III}}, A]_- \end{aligned}$$

в случае, когда гамильтониан  $H_s^{\text{III}}$  задается одной из формул (61)–(64). Теорема доказана.

Из (60)–(64) видно, что гамильтонианы  $H_s^{\text{III}}$  определены с точностью до постоянных комплексных чисел  $k_l$ . Можно показать, что уравнение (1), где  $H_s$  — оператор, задаваемый одной из формул (60)–(64), инвариантно относительно преобразования “сильного отражения”  $\Theta = CPT$ , но не инвариантно относительно  $P$ -,  $C$ - и  $T$ -преобразований. Инвариантность уравнения (1) относительно любого из этих преобразований можно обеспечить специальным выбором чисел  $k_l$ . Так, если в (60) положить  $s = 0$  и  $s = 1/2$ ,  $k_1 = 1/s$ , а в (61)–(64) положить  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 0$ ,  $k_4 = 1$ ,  $k_5 = 0$ , то получим  $C$ -,  $P$ -,  $T$ -инвариантные гамильтонианы вида

$$H_0^{\text{III}} = \sigma_1 (m + p^2/2m) - i\sigma_2 p^2/2m; \quad (70)$$

$$H_{1/2}^{\text{III}} = \sigma_1 m + 2\sigma_3 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}; \quad (71)$$

$$H_1^{\text{III}} = \sigma_1 (m + p^2/2m) + \sigma_2 i/2m [2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 - p^2]; \quad (72)$$

$$H_{3/2}^{\text{III}} = \sigma_1 (m + p^2/2m) + \sigma_2 i/2m [(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 - 5/4p^2]. \quad (73)$$

Оператор (71) совпадает с гамильтонианом Дирака, а операторы (70), (72) — с гамильтонианами ТСТ [49, 50] для частиц со спином  $s = 0, 1$ . Оператор (60) для  $s = 1/2$  рассматривался ранее в [44]. Преобразования  $P$ ,  $C$  и  $T$  на множестве решений уравнения (1) с гамильтонианами (70), (72), (73) можно определить формулами (14), где

$$r_1^{\text{III}} = I, \quad r_2^{\text{III}} = \sigma_1, \quad r_3^{\text{III}} = \sigma_2.$$

Нетрудно убедиться, что гамильтонианы (60)–(64) в общем случае неэрмитовы относительно скалярного произведения (5). Однако всегда можно подобрать такие значения коэффициентов  $k_l$ , чтобы операторы  $H_s^{\text{III}}$  были эрмитовы в индефинитной метрике

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger \sigma_1 \Psi_2, \quad (74)$$

а именно, операторы (60)–(64) эрмитовы относительно (74), если  $k_l$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} k_1^* &= -k_1, & k_3^* &= -k_3, & k_5^* &= -k_5, & k_2^* &= k_2, & |k_2| &< 1, \\ k_2 &> 0, & k_4^* &= k_4, & |k_4| &< 1, & k_4 &> 0. \end{aligned}$$

Гамильтонианы  $H_s^{\text{III}}$  при произвольных значениях коэффициентов  $k_i$  эрмитовы также относительно скалярного произведения (4), где

$$M_s = \left[ (U_s^{\text{III}})^{-1} \right]^\dagger (U_s^{\text{III}})^{-1},$$

а  $U_s^{\text{III}}$  — оператор, связывающий представление (25) с каноническим представлением Широкова–Фолди [18, 20]. Явный вид операторов  $U_s^{\text{III}}$  приведен ниже [см. (133), (134)].

Отметим еще, что не только гамильтониан (60), но и все остальные генераторы (25), (69) принадлежат классу дифференциальных операторов. При  $k_1 = 2$  операторы  $\lambda_a$  (69) тождественно равны нулю и генераторы  $J_{0a}$  (25) принимают вид

$$J_{0a}^{\text{III}} = tp_a - [x_a, H_s^{\text{III}}]_+/2, \quad (75)$$

совпадающий с (15).

Таким образом, здесь получены все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские гамильтонианы  $H_s^{\text{III}}$  частицы с произвольным спином  $s$ , включающие производные не выше второго порядка. Оказалось, что такие гамильтонианы существуют для любых значений  $s$  и задаются формулами (60)–(64). Возникает естественный вопрос: существуют ли пуанкаре-инвариантные гамильтонианы для частиц с произвольным спином в классе дифференциальных операторов первого порядка? Задача описания таких гамильтонианов решается ниже.

### Дифференциальные гамильтоновы уравнения первого порядка

По аналогии с теорией Дирака для электрона постулируем, что гамильтониан релятивистской частицы с произвольным спином является дифференциальным оператором, включающим производные по пространственным переменным не выше первого порядка. Общий вид такого оператора задается формулой

$$H_s = \hat{\Gamma}_a^{(s)} p_a + \hat{\Gamma}_0^{(s)} m, \quad p_a = -i\partial/\partial x_a, \quad (76)$$

где  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$  — некоторые числовые матрицы.

Генераторы представления группы Пуанкаре, которое реализуется на решениях уравнения (1) с гамильтонианом (76), выберем в виде:

$$\begin{aligned} P_0 &= H_s, & P_a &= p_a = -i\partial/\partial x_a, \\ J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{0a} &= x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \end{aligned} \quad (77)$$

где  $S_{\mu\nu}$  — матрицы, образующие конечномерное представление (в общем случае приводимое) алгебры Лоренца  $O(1, 3)$ . Формулы (77) задают самый общий вид генераторов группы  $P(1, 3)$ , соответствующий локальным преобразованиям волновой функции при переходе к новой инерциальной системе отсчета:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\rightarrow \Psi'(x') = \mathcal{D}(\Lambda)\Psi(\Lambda^{-1}x - b), \\ x' &= \Lambda x + b, & x &= (x_0, x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

где  $\Lambda$  — матрица, задающая преобразование Лоренца;  $\mathcal{D}(\Lambda)$  — произвольное конечномерное представление этого преобразования.

Определить все возможные гамильтонианы вида (76) означает найти такие матрицы  $\hat{\Lambda}_\mu^s$  и  $S_{\mu\nu}$ , что операторы (76), (77) будут удовлетворять алгебре Пуанкаре (6)–(13).

Потребуем, чтобы гамильтониан (76) удовлетворял соотношению (12):

$$H_s^2 = p^2 + m^2. \quad (78)$$

Подставляя (76) в (78) и приравнявая линейно-независимые слагаемые заключаем, что матрицы  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$  должны удовлетворять алгебре Клиффорда

$$\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}\hat{\Gamma}_\nu^{(s)} + \hat{\Gamma}_\nu^{(s)}\hat{\Gamma}_\mu^{(s)} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (79)$$

Представления алгебры (79) хорошо известны и задаются матрицами размерности  $2^n \times 2^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . При этом матрицы

$$\tau_{ab} = i\hat{\Gamma}_a^{(s)}\hat{\Gamma}_b^{(s)}/2, \quad \tau_{0a} = i\hat{\Gamma}_a^{(s)}/2 \quad (80)$$

реализуют  $2^{n-2}$ -кратно вырожденное представление  $\mathcal{D}(1/2, 0) \oplus \mathcal{D}(0, 1/2)$  алгебры  $O(1, 3)$ .

Определим теперь матрицы  $S_{\mu\nu}$  из (77). Представляем их в виде

$$S_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + j_{\mu\nu}, \quad (81)$$

где  $j_{\mu\nu}$  — неизвестные матрицы, подлежащие определению. Подставив (76), (77), (81), (80) в (6)–(13), получаем, что матрицы  $j_{\mu\nu}$  должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$[j_{\mu\nu}, j_{\lambda\rho}]_- = i(g_{\mu\rho}j_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}j_{\mu\rho} - g_{\mu\lambda}j_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}j_{\mu\lambda}), \quad (82)$$

$$[j_{\mu\nu}, \hat{\Gamma}_\lambda^{(s)}]_- = [j_{\mu\nu}, \tau_{\rho\lambda}]_- = 0, \quad g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ 1, & \mu = \nu = 0, \\ -1, & \mu = \nu \neq 0, \end{cases} \quad (83)$$

т.е. матрицы  $j_{\mu\nu}$  должны реализовать конечномерное представление алгебры  $O(1, 3)$  и коммутировать с  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$ .

Рассмотрим случай, когда  $j_{\mu\nu}$  образуют неприводимое представление  $\mathcal{D}(j, 0)$  алгебры  $O(1, 3)$ . Это означает, что

$$\begin{aligned} j_{ab} &= ij_c, & j_{0a} &= ij_a, & (abc) &= \text{цикл } (1, 2, 3), \\ [j_a, j_b]_- &= ij_c, & j_a^2 &= j(j+1). \end{aligned} \quad (84)$$

Тогда из (81), (83) по теореме Клебша–Гордона заключаем, что матрицы  $S_{\mu\nu}$  должны реализовать представление

$$[\mathcal{D}(1/2, 0) \oplus \mathcal{D}(0, 1/2)] \otimes \mathcal{D}(j, 0) = \mathcal{D}(j+1/2, 0) \oplus \mathcal{D}(j-1/2, 0) \oplus \mathcal{D}(j, 1/2). \quad (85)$$

При редукции (85) по представлениям подгруппы  $O(3) \subset O(1, 3)$  получаем представление

$$\mathcal{D}(j+1/2) \oplus \mathcal{D}(j+1/2) \oplus \mathcal{D}(j-1/2) \oplus \mathcal{D}(j-1/2), \quad (86)$$

что соответствует двум возможным значениям спина

$$s_1 = s = j + 1/2 \quad \text{и} \quad s_2 = s - 1 = j - 1/2. \quad (87)$$

Нетрудно подсчитать, что размерность матриц  $S_{\mu\nu}$ , входящих в представление (85), равна  $8s \times 8s$ ; такова же должна быть размерность матриц  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$  из (80), (81). При этом волновая функция  $\Psi(t, \mathbf{x})$  удовлетворяющая уравнению (1) с гамильтонианом (75), имеет  $8s$  компонент. Можно показать, что если матрицы  $j_{\mu\nu}$  из (81) образуют неприводимое представление  $\mathcal{D}(j_1, j_2)$  алгебры  $O(1, 3)$ , где  $j_1 \neq 0$  и  $j_2 \neq 0$ , или приводимое представление этой алгебры, то при заданном фиксированном  $s$  размерность матриц  $S_{\mu\nu}$  всегда будет больше, чем  $8s \times 8s$ .

Таким образом, гамильтониан (76) и генераторы (77) удовлетворяют условиям пуанкаре-инвариантности (6)–(14), а волновая функция  $\Psi(t, \mathbf{x})$  имеет минимальное число компонент тогда и только тогда, когда матрицы  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$  в (76) реализуют  $8s$ -рядное представление алгебры Клиффорда (79), а матрицы  $S_{\mu\nu}$  в (77) имеют вид (80)–(84), где  $j = s - 1/2$ .

Уравнение (1) с гамильтонианом (76) описывает частицу, спин которой может принимать два значения (87). Для того чтобы получить описание частицы с фиксированным спином  $s$ , на волновую функцию  $\Psi(t, \mathbf{x})$  следует наложить пуанкаре-инвариантное дополнительное условие, исключающее лишние компоненты, которые соответствуют значению спина  $s_2 = s - 1$ . Такое дополнительное условие всегда можно выбрать в виде (13):

$$W_\mu W^\mu \Psi(t, \mathbf{x}) = m^2 s(s+1) \Psi(t, \mathbf{x}). \quad (88)$$

Эквивалентной формой записи условия (88) служит формула

$$\hat{P}_s \Psi = \Psi, \quad (89)$$

где  $\hat{P}_s$  — оператор проектирования на подпространство, соответствующее фиксированному спину:

$$\hat{P}_s = \frac{1}{2s} \left[ \frac{1}{m^2} W_\mu W^\mu - s(s-1) \right]. \quad (90)$$

Используя явный вид генераторов  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  (77), получаем проектор  $\hat{P}_s$  в форме

$$\hat{P}_s = P_s + \left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \left[ \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu, P_s \right]_- / 2m, \quad (91)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_a^{(s)} &= \hat{\Gamma}_0^{(s)} \hat{\Gamma}_a^{(s)}, & \Gamma_0^{(s)} &= \hat{\Gamma}_0^{(s)}, & \Gamma_4^{(s)} &= i\Gamma_0^{(s)} \Gamma_1^{(s)} \Gamma_2^{(s)} \Gamma_3^{(s)}, \\ P_s &= \frac{1}{4s} [S_{ab}^2 - 2s(s-1)], & S_{ab}^2 &= \sum_{a,b=1}^3 S_{ab} S_{ab}. \end{aligned} \quad (92)$$

Таким образом, получены уравнения движения свободной релятивистской частицы с произвольным спином в виде:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H_s \Psi, \quad H_s = \Gamma_0^{(s)} \Gamma_a^{(s)} p_a + \Gamma_0^{(s)} m, \quad (93)$$

$$\hat{P}_s \Psi = \Psi. \quad (94)$$

Отметим, что выражения (93), (94) можно записать в явно ковариантной форме [39]:

$$\left( \Gamma_{\mu}^{(s)} p^{\mu} - m \right) \Psi = 0, \quad (95)$$

$$\left( \Gamma_{\mu}^{(s)} p^{\mu} + m \right) \left( 1 + \Gamma_4^{(s)} \right) [S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 4s(s-1)] \Psi = 16ms\Psi. \quad (96)$$

Уравнение (95) получается из (93) простым умножением на  $\Gamma_0^{(s)}$ , а уравнение (96) сводится к (94), если принять во внимание тождество

$$\left( 1 + \Gamma_4^{(s)} \right) P_s \equiv \left( 1 + \Gamma_4^{(s)} \right) [S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 4s(s-1)] / 8s. \quad (97)$$

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

**Теорема 3.** *Системы уравнений (93), (94) и (95), (96) пуанкаре-инвариантны и описывают свободное движение частицы с фиксированным спином  $s$  и массой  $m$ .*

Система уравнений (95), (96) имеет ряд преимуществ перед другими известными уравнениями для частиц с произвольным спином [3–17]. Действительно, уравнения (95), (96) имеют достаточно простую форму, которая не усложняется с ростом спина (алгебра  $\Gamma$ -матриц, безусловно, проще алгебры матриц, входящих в другие известные в литературе уравнения для высших спинов); предельный переход  $m \rightarrow 0$  позволяет получить из (95), (96) уравнения для безмассовых частиц (см. разд. 2), в то время как уравнения Кеммера–Деффина и Баба не допускают такого перехода [60]; наконец, как будет показано ниже, уравнения (95), (96) допускают непротиворечивое обобщение для частиц, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем.

Отметим, что в работах [61, 62] также предлагались  $8s$ -компонентные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение свободной частицы с произвольным спином  $s$  и массой  $m$ . Однако системы уравнений, полученные в работах [61, 62], несовместны при учете взаимодействия частицы с внешним полем.

### Конечные преобразования операторов координаты и спина

Задание явного вида генераторов  $Q_l \in \{P_{\mu}, J_{\mu\nu}\}$  ( $l = 1, 2, \dots, 10$ ) группы Пуанкаре однозначно определяет закон преобразования волновой функции при переходе к новой инерциальной системе координат:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \Psi'(t, \mathbf{x}) = \exp(iQ_l \theta_l) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad (98)$$

где  $\theta_l$  — параметры преобразования. При этом операторы физических величин (координаты, спина, импульса и т.п.) преобразуются следующим образом:

$$\hat{N} \rightarrow \hat{N}' = \exp(iQ_l \theta_l) \hat{N} \exp(-iQ_l \theta_l). \quad (99)$$

Формула (99) в принципе дает исчерпывающий ответ о связи операторов динамических переменных в старой и новой системах координат и в случае, когда генераторы  $P_{\mu}$ ,  $J_{\mu\nu}$  имеют локально-ковариантную форму (77), конкретные вычисления с использованием (99) не вызывают никаких затруднений. Однако в представлениях типа (15), (25), когда генераторы  $J_{0a}$  не имеют вида суммы коммутирующих

“спиновой” и “орбитальной” частей, вычисление явного вида преобразованных операторов  $\hat{N}'$  является нетривиальной задачей [76].

В этом разделе получен закон преобразования операторов координаты и спина частицы, генерируемых операторами  $J_{0a}$  вида (74). Тем самым, в принципе, решена задача для произвольного представления вида (25), (69), поскольку генераторы (94) и (25) связаны преобразованием эквивалентности  $J_{0a}^{\text{III}} \rightarrow V J_{0a}^{\text{III}} V^{-1}$ , где

$$V = 1 + (\sigma_1 - i\sigma_2)(2 - k_1) \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{2m},$$

$$V^{-1} = 1 - (\sigma_1 - i\sigma_2)(2 - k_1) \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{2m}. \quad (100)$$

Найдем сначала в явном виде закон конечных преобразований (99) для оператора  $x_a$ . Для этого воспользуемся тождеством Хаусдорфа–Камбела:

$$\exp(A)B \exp(-A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{A, B\}^n}{n!}, \quad (101)$$

$$\{A, B\}^n = [A, \{A, B\}^{n-1}]_-, \quad \{A, B\}^0 = B.$$

Принимая во внимание тот факт, что генераторы  $J_{0a}$  (75) на множестве решений уравнений (1), (60) можно представить в форме

$$J_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + \eta_a. \quad (102)$$

где

$$\eta_a = -\frac{1}{2}[H_s^{\text{III}}, x_a]_- / 2 = i\sigma_3 S_a + \frac{1}{2m}(\sigma_1 - i\sigma_2)\{iP_a - 2i[S_a, \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}]_+\}, \quad (103)$$

$$p_0 = i\partial/\partial x_0 = i\partial/\partial t,$$

и полагая  $B = x_a$ ,  $A = iJ_{0b}v_b$ , где  $J_{0b}$  — генераторы (102), а  $v_b$  — параметры преобразования Лоренца, получаем по индукции

$$\{A, B\}^n = v_a x_b v_b v^{n-2} - (i\sigma_1 + \sigma_2)(-v_a S_b v_b v^{n-2} + \mathcal{D}_n)/m, \quad (104)$$

$$n = 2k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad v = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2},$$

$$\{A, B\}^n = x_0 v_a v^{n-1} + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{2m} (v_a v^{n-1} - 2\mathcal{D}_n), \quad n = 2k + 1, \quad (105)$$

где

$$\mathcal{D}_n = [S_b v_b, \mathcal{D}_{n-1}]_+, \quad \mathcal{D}_1 = [S_b v_b, S_a]_+. \quad (106)$$

Подставляя (104)–(106) в (101) и используя тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{D}_n \equiv \left[ S_a \operatorname{ch} v + i \frac{\varepsilon_{abc} S_b v_c}{v} \operatorname{sh} v - \frac{v_a S_b v_b}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) \right] \exp(2S_b v_b) - S_a, \quad (107)$$

получаем закон преобразования  $x_a$  в виде

$$x'_a = x_a + \frac{v_a x_b v_b}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) + x_0 \frac{v_a}{v} \operatorname{sh} v + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} \left\{ \frac{v_a S_b v_b}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) + \right. \\ \left. + \frac{v_a}{2v} \operatorname{sh} v + S_a - \left[ S_a \operatorname{ch} v + i \frac{\varepsilon_{abc} S_b v_c}{v} \operatorname{sh} v - \frac{v_a S_b v_b}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) \right] \exp(2S_b v_b) \right\}. \quad (108)$$

Для  $x_0$  находим аналогичным способом

$$x'_0 = x_0 \operatorname{ch} v + \frac{x_b v_b}{v} \operatorname{ch} v - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{2m} \left[ \exp(2S_b v_b) - \operatorname{ch} v - \frac{2S_b v_b}{v} \operatorname{sh} v \right]. \quad (109)$$

Из (108), (109) видно, что  $x_\mu$  преобразуются по закону, отличному от преобразований Лоренца для 4-вектора; при этом интервал  $x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_a^2$  не сохраняется. Следовательно,  $x_\mu$  нельзя выбрать в качестве оператора координаты частицы.

Чтобы определить ковариантный оператор координаты, перейдем к представлению, в котором генераторы  $J_{0a}$  (102) имеют локально-ковариантную форму:

$$\hat{J}_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \quad S_{0a} = i\sigma_3 S_a, \quad (110)$$

что достигается посредством преобразования

$$J_{0a} \rightarrow \hat{J}_{0a} = V J_{0a} V^{-1}, \quad (111)$$

где

$$V = 1 + \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2m} (2\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} - p_0), \quad V^{-1} = 1 - \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2m} (2\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} - p_0). \quad (112)$$

В представлении (110) ковариантный оператор координаты можно выбрать в виде

$$\hat{X}_\mu = x_\mu. \quad (113)$$

Используя (112), получаем явный вид этих операторов в исходном представлении (102):

$$X_\mu = V^{-1} \hat{X}_\mu V = x_\mu + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} \xi_\mu, \quad \xi_a = S_a, \quad \xi_0 = 1. \quad (114)$$

При переходе к новой инерциальной системе координат оператор  $X_\mu$  преобразуется как 4-вектор:

$$X'_a = X_a + \frac{v_a (v_b X_b)}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) + \frac{v_a}{v} X_0 \operatorname{sh} v, \quad (115)$$

$$X'_0 = X_0 \operatorname{ch} v + \frac{(X_b v_b)}{v} \operatorname{sh} v.$$

При этом, очевидно, выполняется

$$X_0^2 - X_a^2 = (X'_0)^2 - (X'_a)^2. \quad (116)$$

Операторы  $X_\mu$  удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям

$$[p_\mu, X_\nu]_- = ig_{\mu\nu}, \quad [X_\mu, X_\nu]_- = 0. \quad (117)$$

При этом, однако

$$\ddot{X}_a = -[H_s^{\text{III}}, [H_s^{\text{III}}, X_a]_-]_- \neq 0.$$

В случае  $s = 1/2$  операторы (114) принимают явно ковариантную форму

$$X_\mu = x_\mu + \frac{i}{2m} (1 + \gamma_4) \gamma_\mu, \quad (118)$$

где

$$\gamma_4 = \sigma_3, \quad \gamma_a = -2i\sigma_2 S_a, \quad \gamma_0 = \sigma_1 \quad (119)$$

— матрицы Дирака.

В силу изложенного выше оператор (118) можно выбрать в качестве ковариантного оператора координаты дираковской частицы. Интересно отметить, что при таком определении оператор скорости

$$\dot{X}_a = -i[H_{1/2}, X_a]_- = (1 + \gamma_4)\gamma_0 p_a / m \quad (120)$$

(где

$$H_{1/2} = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 m \quad (121)$$

— гамильтониан Дирака) имеет сплошной спектр.

Подчеркнем, что полученный оператор (118) принципиально отличается от операторов координаты, предложенных Ньютоном и Вигнером [63] и Фолди и Вутуйзенем [64]. Это отличие заключается в том, что оператор (118) локален и преобразуется как ковариантный 4-вектор, в то время как операторы координаты, предложенные в работах [63, 64], принадлежат классу нелокальных интегро-дифференциальных операторов с нековариантным законом преобразования при переходе к новой инерциальной системе отсчета.

Приведем без доказательства закон преобразования операторов  $S_{ab}$  и явный вид ковариантного оператора спина  $\Sigma_{\mu\nu}$  частицы, описываемой уравнениями (1), (60) [40, 41]:

$$S'_{ab} = J_{ab} \operatorname{ch} v + \frac{v_c J_d v_d}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) + \frac{J_{0a} v_b - J_{0b} v_a}{v} \operatorname{sh} v - x'_a p'_b + x'_b p'_a, \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ab} &= S_{ab} + \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} S_{cd} p_d, \\ \Sigma_{0a} &= i\sigma_3 S_{bc} - \frac{i\sigma_1 + \sigma_2}{m} [(2S_d p_d - p_0), S_{bc}]_+, \end{aligned} \quad (123)$$

где

$$p'_a = p_a + \frac{v_a x_b v_b}{v^2} (\operatorname{ch} v - 1) + \frac{v_a}{v} p_0 \operatorname{sh} v, \quad J_d = \frac{1}{2} \varepsilon_{abd} J_{ab}, \quad S_d = \frac{1}{2} \varepsilon_{abd} S_{ab},$$

где  $x'_a$ ,  $J_{ab}$ ,  $J_{0a}$ ,  $S_{ab}$  — операторы, определенные в (108), (25), (26), (102). По аналогии с (110)–(115) можно показать, что оператор  $\Sigma_{\mu\nu}$  (123) преобразуется, как ковариантный тензор второго ранга.

### Преобразование к каноническому представлению

Генераторы  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  группы  $P(1, 3)$  в каноническом представлении Широкова–Фолди [18, 20] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P_0^k &= H^k = \sigma_1 E, & P_a^k &= p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \\ J_{ab}^k &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{0a}^k &= t p_a - \frac{1}{2} [x_a, P_0^k]_+ - \frac{\sigma_1 S_{ab} p_b}{E + m}. \end{aligned} \quad (124)$$

Представление (124) реализуется на множестве  $2(2s + 1)$ -компонентных волновых функций  $\Phi(t, \mathbf{x})$ , удовлетворяющих уравнению [18]

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \mathbf{x}) = H^k \Phi(t, \mathbf{x}). \quad (125)$$

Поскольку на множествах решений уравнения (1) и уравнения (125) реализуется одно и то же представление  $\mathcal{D}^+(s) \oplus \mathcal{D}^-(s)$  алгебры  $P(1, 3)$ , то между волновыми функциями  $\Psi$  и  $\Phi$  должна существовать связь

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = U_s^\alpha \Psi(t, \mathbf{x}), \quad \alpha = \text{I, II, III}, \quad (126)$$

где  $U_s^\alpha$  — некоторый обратимый оператор, удовлетворяющий соотношениям

$$U_s^\alpha J_{\mu\nu}^\alpha (U_s^\alpha)^{-1} = J_{\mu\nu}^k, \quad U_s^\alpha P_\mu^\alpha (U_s^\alpha)^{-1} = P_\mu^k. \quad (127)$$

Преобразование (126), (127) можно рассматривать как обобщение преобразования Фолди–Воутуйзена [64] для уравнения Дирака в случае релятивистских уравнений для частиц произвольного спина.

В работах [30, 37, 40] найден явный вид операторов  $U_s$  для представлений (15), (17), (25). Для уравнений, полученных в подходе I, этот оператор задается формулой [37, 39]

$$U_s^{\text{I}} = \exp \left[ \frac{i}{2} \sigma_2 \sum_l \varphi_l \Lambda_l \right], \quad (128)$$

где коэффициенты  $\varphi_l$  определяются соотношениями (35), (37), (38);  $\Lambda_l$  — операторы проектирования (27). В случае, когда гамильтониан частицы с произвольным спином имеет вид (41), оператор (128) принимает форму [36, 37]

$$U_s^{\text{I}} = (E + \sigma_1 H_s^{\text{I}}) / \sqrt{2E(E + m)}, \quad (129)$$

а для гамильтонианов (42) оператор (128) имеет вид

$$U_s^{\text{I}} = \exp \left( i \sigma_2 \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{m} \right). \quad (130)$$

При  $s = 1/2$  операторы (129) и (130) совпадают с оператором Фолди–Воутуйзена [64].

Переход от представления (17) к каноническому осуществляется с помощью изометрического оператора [30]

$$U_s^{\text{II}} = \frac{E}{m} \left[ (U_s^{\text{II}})^{-1} \right]^+ \operatorname{sech} \left[ 2 \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})}{p} \theta^{\text{II}} \right], \quad (131)$$

$$(U_s^{\text{II}})^{-1} = \sqrt{\frac{m}{E}} \left\{ \operatorname{ch} \left[ \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p} \theta^{\text{II}} \right] + i \sigma_2 \left[ \operatorname{sh} \left( \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p} \theta^{\text{II}} \right) \right] \right\} \quad (132)$$

для случая, когда гамильтониан  $H_s^{\text{II}}$  задается формулой (53).

Наконец, для представления (25) операторы  $U_s$  имеют вид:

$$U_s^{\text{III}} = V_1 V_2 V_3, \quad (133)$$

$$V_1 = \exp\left(\sigma_1 \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p} \operatorname{Arcth} \frac{p}{m}\right),$$

$$V_2 = \frac{1}{2m} [E(1 + \sigma_3) + (1 - \sigma_3)(m - 2\sigma_2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})],$$

$$V_3 = 1 + (\sigma_1 - i\sigma_2)(k_1 - 2) \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{2m}$$

для  $H_s^{\text{III}}$  из (60) и

$$U_s^{\text{III}} = (E + \sigma_1 H_s^{\text{III}}) / \sqrt{2E(E + [\sigma_1, H_s^{\text{III}}]_+/2)} \quad (134)$$

для гамильтонианов (61)–(64). В случае  $s = 1/2$  операторы (131)–(134) также совпадают с оператором преобразования Фолди–Воугуйзена [64].

Дифференциальные уравнения первого порядка для частицы с произвольным спином, полученные выше, и генераторы группы Пуанкаре (76), (81) в свою очередь можно привести к канонической форме (124), (125). Это достигается преобразованием, осуществляемым оператором

$$\hat{U}_s = \exp\left(\frac{\Gamma_a^{(s)} p_a}{2p} \operatorname{arctg} \frac{p}{m}\right) \exp\left(\frac{\Gamma_0^{(s)} j_a p_a}{p} \operatorname{Arcth} \frac{p}{E}\right). \quad (135)$$

Уравнения (93) и (94) в результате преобразования (126), (135) принимают следующую форму:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \Gamma_0 E \Phi, \quad \Phi = \hat{U}_s \Psi, \quad (136)$$

$$P_s \Phi = \Phi \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} S_{ab}^2 \Phi = s(s+1) \Phi, \quad (137)$$

где  $P_s$  — проектор, определенный в (92). Из (137), (86), (87) следует, что волновая функция  $\Phi(t, \mathbf{x})$  имеет  $2(2s+1)$  отличных от нуля компонент.

Преобразования (126) и (127)–(135) можно использовать, чтобы определить операторы средней координаты и среднего спина [64] для частицы с произвольным спином. Действительно, в каноническом представлении (124) эти параметры можно выбрать в виде [64]

$$X_a^k = x_a, \quad S_{ab}^k = S_{ab}. \quad (138)$$

С помощью преобразования, обратного (126), получаем эти операторы в представлениях (15), (17), (25), (76):

$$\hat{X}_a = \hat{U}_s^{-1} x_a \hat{U}_s, \quad \hat{S}_{ab} = \hat{U}_s^{-1} S_{ab} \hat{U}_s. \quad (139)$$

Приведем явный вид операторов  $\hat{X}_a$  и  $\hat{S}_{ab}$ , соответствующих гамильтонианам (41), (42), (93):

$$\begin{aligned} \left(\hat{X}_a^1\right)_1 &= x_a + \frac{1}{p^2 E^2} \{E S_{ab} p_b [E - \sigma_1 (H_s^1)_1] + i p_a m [\sigma_1 (H_s^1)_1 - m]\}, \\ \left(\hat{S}_{ab}^1\right)_1 &= \sigma_1 S_{ab} \frac{(H_s^1)_1}{E} + p_c \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p^2} \left[1 - \sigma_1 \frac{(H_s^1)_1}{E}\right]; \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \left(\hat{X}_a^I\right)_2 &= x_a + \sigma_2 \frac{S_a}{E} + \frac{ES_{ab}p_b - i\sigma_2 p_a \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{E^2(E+m)}, \\ (\check{S}_{ab})_2 &= S_{ab} + \sigma_2 \frac{S_{cd}p_d}{E} + \frac{p_c \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} - S_{ab}p^2}{E(E+m)}; \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}_a &= x_a - i \frac{H_s \tau_a}{mE} + \sigma_2 \frac{j_a}{E} + \frac{j_{ab}p_b E - i\sigma_2 p_a (\mathbf{p} \cdot \mathbf{j})}{E^2(E+m)} + \frac{E\tau_{ab}p_b - ip_a (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p})}{mE(E+m)}, \\ \check{S}_{ab} &= S_{ab} - i \frac{H_s \tau_{cd} p_d}{mE} + \sigma_2 \frac{j_{cd} p_d}{E} + \frac{p_c (\mathbf{j} \cdot \mathbf{p}) - j_{ab} p^2}{E(E+m)} + \frac{p_c (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}) - \tau_{ab} p^2}{m(E+m)}, \end{aligned} \quad (142)$$

где  $S_a = S_{bc}$ ,  $\tau_a = \tau_{bc}$ ,  $j_a = j_{bc}$ ,  $(a, b, c)$  — цикл  $(1, 2, 3)$ .

В заключение сделаем следующие замечания.

1. В работах [65–67] обнаружена двойственная инвариантность уравнений Максвелла, Дирака, Клейна–Гордона. С одной стороны, эти уравнения инвариантны относительно преобразований Лоренца, сохраняющих квадратичную форму как в конфигурационном пространстве

$$S^2(x) = x_0^2 - x_a^2 = S^2(x') = (x'_0)^2 - (x'_a)^2, \quad (143)$$

так и в импульсном пространстве

$$S^2(p) = p_0^2 - p_a^2 = S^2(p') = (p'_0)^2 - (p'_a)^2. \quad (144)$$

С другой стороны, эти уравнения допускают нелокальные преобразования для координат (не совпадающие с преобразования Лоренца) и локальные преобразования Лоренца для импульсов, относительно которых сохраняется форма (144), но не сохраняется форма (143). Важно подчеркнуть, что при этих преобразованиях время не изменяется ( $x'_0 = x_0$ ). Этот последний факт, а именно инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований координат, не изменяющих время и не сохраняющих квадратичную форму (143), является следствием того [67, 68], что оператор  $i\partial/\partial t$  в пространстве решений уравнения (1) имеет такой же спектр, как и гамильтониан Дирака (121). Спектр оператора (121) лежит, за исключением интервала  $(-m, m)$ , на всей действительной оси.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае уравнений движения для частиц произвольного спина. Выведенные нами в подходах I и III уравнения инвариантны относительно преобразований координат и импульсов, которые сохраняют (144), но не сохраняют (143). Дифференциальные уравнения первого порядка, выведенные выше, инвариантны относительно преобразований (143) и (144), сохраняющих обе формы.

2. Во многих статьях по релятивистским уравнениям движения всякий оператор, диагонализующий гамильтониан Дирака или другие гамильтонианы для частиц со спином  $s > 1/2$ , называют обобщенным оператором Фолди–Воутуйзена. Такое название не вполне последовательно, и нам представляется более логичным называть преобразованиями типа Фолди–Воутуйзена только такие преобразования, которые диагонализуют гамильтониан и одновременно приводят операторы алгебры Пуанкаре  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  к представлению Фолди (124). Если это последнее условие не накладывается, то существует очень много (континуум) операторов, которые можно использовать для диагонализации гамильтониана. Операторы,

приведенные нами в (128)–(135), являются обобщенными операторами Фолди–Воутуйзена в указанном выше смысле.

Примером оператора, диагонализующего гамильтониан Дирака, но не приводящего генераторы  $J_{\mu\nu}$  к форме Фолди–Широкова, может служить оператор [68]:

$$V = \left[ 1 + \gamma_0 H_D / (H_D)^{1/2} \right] / \sqrt{2}, \quad H_D = \gamma_0 \gamma_a p_a + \gamma_0 \gamma_4 m.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} J'_{ab} &= V J_{ab} V^{-1} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ J'_{0a} &= V J_{0a} V^{-1} = x_0 p_a - \gamma_0 (x_a E + E x_a) / 2 + \gamma_0 (S_{ab} p_b + S_{4a} m) / E, \\ S_{4a} &= i \gamma_4 \gamma_a / 2. \end{aligned}$$

## 2. Уравнения для безмассовых частиц

Уравнениям для частиц с нулевой массой посвящено большое количество работ, опубликованных в последние годы [51–54]. В этих работах были предложены различные уравнения для таких частиц и в то же время описаны не все возможные неэквивалентные уравнения такого класса. Здесь, основываясь на результатах работ [45–48], опишем все неэквивалентные в рамках группы Пуанкаре уравнения для безмассовых частиц и исследуем их свойства при  $P$ -,  $C$ - и  $T$ -преобразованиях.

### Уравнение типа Вейля для частиц произвольного спина

Хорошо известно, что уравнение Вейля для нейтрино [69] эквивалентно уравнению Дирака (с  $m = 0$ ), если на решения последнего наложить пуанкаре-инвариантное дополнительное условие

$$\left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \Psi = 0. \quad (145)$$

Здесь получим уравнение типа Вейля для частиц произвольного спина, исходя из уравнений (95), (96).

Систему уравнений (95), (96) для случая  $m = 0$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= \Gamma_0^{(s)} \Gamma_a^{(s)} p_a \Psi, \\ \left( i \frac{\partial}{\partial t} - \Gamma_0^{(s)} \Gamma_a^{(s)} p_a \right) \left( 1 + \Gamma_4^{(s)} \right) [S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 4s(s-1)] \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (146)$$

Из явного вида генераторов группы  $P(1,3)$  (77), (80), (82), (83) следует, что при  $m = 0$  оператор  $\left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right)$  коммутирует с  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  и, следовательно, уравнение (145) пуанкаре-инвариантно для любого значения спина. Добавляя условие (145) к уравнения (146) и выбирая матрицы  $\Gamma_\mu^{(s)}$  в виде

$$\Gamma_0^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^{(s)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \Gamma_a^{(s)} = i \begin{pmatrix} 0 & 2\tau_a \\ -2\tau_a & 0 \end{pmatrix}, \quad (147)$$

где  $I$  и  $0$  —  $4s$ -рядные единичная и нулевая матрицы;  $\tau_a$  —  $4s$ -рядные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$[\tau_a, \tau_b]_- = i \varepsilon_{abc} \tau_c, \quad \sum_a \tau_a^2 = 3/4, \quad (148)$$

приходим к системе уравнений

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, \mathbf{x}) = 2\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p} \varphi(t, \mathbf{x}), \quad (149)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - 2\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p} \right) [S_{ab}^2 - 2s(s-1)] \varphi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad S_{ab} = j_c + \tau_c, \quad (150)$$

где  $\varphi$  —  $4s$ -компонентная волновая функция, связанная с  $\Psi$  соотношением

$$\varphi = \left( 1 + \Gamma_4^{(s)} \right) \Psi / 2. \quad (151)$$

Матрицы  $S_{ab}$ , входящие в (150), согласно (82), (83) имеют следующую структуру:

$$S_{ab} = j_c + \tau_c, \quad [j_c, \tau_a]_- = 0, \quad (152)$$

где матрицы  $j_c$  с точностью до преобразований эквивалентности задаются соотношениями

$$[j_a, j_b]_- = i\varepsilon_{abc} j_c, \quad \sum_a j_a^2 = s(s-1). \quad (153)$$

Уравнение (149), очевидно, описывает частицы с нулевой массой покоя. Неприводимые представления группы Пуанкаре II класса (для  $P_\mu P^\mu = 0$ ,  $P_\mu \neq 0$ )  $D^\varepsilon(\lambda)$  задаются собственными значениями  $\varepsilon$  и  $\lambda$  инвариантных операторов знака энергии  $\hat{\varepsilon} = P_0/|P_0|$  и спиральности  $\Lambda = \sum_{a \neq b \neq c} J_{ab} P_c / P$ .

Покажем, что система уравнений (149), (150) описывает частицу со спиральностью  $\lambda = \pm s$ . Обозначим

$$\frac{1}{2} S_{ab}^2 - s^2 = g. \quad (154)$$

Подставляя (154) в (150) и используя (149), получаем после несложных преобразований

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - 2\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p} \right) g \varphi = \left[ i \frac{\partial}{\partial t} - 2\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}, g \right]_- \varphi = [g, 2\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}]_- \varphi. \quad (155)$$

Принимая во внимание тождества

$$[g, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}]_+ = \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}, \quad g^2 = s^2, \quad [f, \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}]_- = 0, \quad (156)$$

получаем из (155)

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} \varphi = 2s \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p} \varphi. \quad (157)$$

Из (149), (157), (148) заключаем, что оператор знака энергии  $\varepsilon = 2\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}/p$  имеет на множестве решений уравнений (149), (150) значения  $\varepsilon = \pm 1$ , а значения оператора спиральности  $\Lambda = \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}/p$  при этом  $\lambda = \pm s$ . Следовательно, на решениях уравнений (149), (150) реализуется прямая сумма неприводимых представлений  $D^+(s) \oplus D^-(s)$  группы Пуанкаре и их можно рассматривать как обобщение уравнений Вейля на случай частиц с произвольным спином. Ниже покажем, что уравнения (149), (150)  $C^-$ ,  $P^-$ ,  $T$ -инвариантны, но  $C^-$ ,  $P^-$ -неинвариантны.

Рассмотрим примеры уравнений (149), (150) для  $s = 0, 1/2, 1, 3/2, 2$ .

а)  $s = 1/2$ . В этом случае, согласно (152), (153),

$$S_a = \tau_a, \quad j_a = 0, \quad (158)$$

где  $\tau_a$  — матрицы размерности  $2 \times 2$ , удовлетворяющие (148). Подставляя (158) в (149) и (150), убеждаемся, что уравнение (150) обращается в тождество [если имеет место (149)], а (149) совпадает с уравнением Вейля:

$$\rho_\mu p^\mu \varphi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (159)$$

где  $\rho_\mu$  — матрицы Паули:

$$\rho_a = 2\tau_a, \quad \rho_0 = I. \quad (160)$$

б)  $s = 1$ . В этом случае матрицы  $\tau_a, j_b$ , удовлетворяющие (148), (152), (153), не умаляя общности, можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, & j_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ j_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & j_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (161)$$

Обозначая

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \quad (162)$$

и подставляя (161), (162) в (149), (157), приходим к системе уравнений для  $\varphi$

$$\text{rot } \varphi = \partial \varphi / \partial t, \quad \text{div } \varphi = 0, \quad \varphi_4 = \text{const}, \quad (163)$$

где константу  $\varphi_4$ , не умаляя общности, можно приравнять нулю.

Полагая в (163)  $\varphi = \mathbf{H} - i\mathbf{E}$ , где  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  — векторы напряженности магнитного и электрического полей, приходим к уравнениям Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. Такая формулировка уравнений Максвелла была впервые предложена в работах [70, 71].

в)  $s = 0$ . Уравнения для бесспиновых и безмассовых частиц можно получить из (149), (157), (161), если положить там  $s = 0$ . Используя обозначение (162), получаем в этом случае систему уравнений

$$\text{div } \varphi = i \frac{\varphi_4}{\partial t}, \quad \text{grad } \varphi_4 = i \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (164)$$

Уравнения имеют решения вида

$$\varphi_l(t, \mathbf{x}) = k_l \varphi(\omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)], \quad k_4 = \omega = \pm \sqrt{k_a^2}, \quad (165)$$

где  $\varphi(\omega)$  — произвольная функция, и описывают распространение продольной волны.

г)  $s = 3/2$ . Выбирая матрицы  $\tau_a$  и  $j_b$  в виде:

$$\begin{aligned} j_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & j_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ j_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \tau_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (166)$$

и представляя волновую функцию  $\varphi$  в форме

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_\alpha = \begin{pmatrix} \varphi_\alpha^1 \\ \varphi_\alpha^2 \\ \varphi_\alpha^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (167)$$

получаем из (166), (167), (149), (150) и (157) уравнение для  $\varphi_\alpha^a$

$$\text{rot } \varphi_\alpha = i \frac{\varphi_\alpha}{\partial t}, \quad (168)$$

$$(\rho_\mu)_{\alpha\alpha'} p^\mu \varphi_{\alpha'} = 0. \quad (169)$$

Таким образом, волновая функция  $\varphi_\alpha^a$  частицы с  $m = 0$  и  $s = 3/2$  удовлетворяет уравнению типа Максвелла (168) по векторному индексу  $a$  и уравнению типа Вейля (169) по спинорному индексу  $\alpha$ .

д)  $s = 2$ . Выберем матрицы  $\tau_a$  и  $j_b$  в виде

$$j_a = \hat{j}_a \otimes \hat{I}, \quad \tau_a = \frac{1}{2} I \otimes \hat{\rho}_a, \quad (170)$$

где  $\hat{I}$  и  $I$  — двухрядная и четырехрядная единичные матрицы;

$$j_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad j_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$j_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (171)$$

Волновая функция  $\varphi(x)$  имеет, согласно (170), (171), восемь компонент  $\varphi_\alpha^k$ ;  $\alpha = 1, 2$ ;  $k = 1, 2, 3, 4$ , причем матрицы  $j_a$  действуют только на индекс  $k$ , а  $\tau_a$  — на индекс  $\alpha$ .

Из (149), (156), (157) и (170) получаем уравнения для  $\varphi_\alpha^k$  в виде

$$(\rho_\mu)_{\alpha\alpha'} p^\mu \varphi_{\alpha'}^k = 0, \quad \frac{2}{3} (j_a)_{kk'} p_a \varphi_\alpha^{k'} = i \frac{\partial \varphi_\alpha^k}{\partial t}, \quad (172)$$

которые из изложенного выше можно интерпретировать как уравнения для безмассовых частиц со спином 2.

### Другие типы уравнений для частиц с нулевой массой

Как показано в работе [45], уравнение Вейля не является единственно возможным пуанкаре-инвариантным двухкомпонентным уравнением для безмассовых частиц со спином  $s = 1/2$ . В работах [45–47] получены все неэквивалентные уравнения для таких частиц и исследованы их свойства относительно  $P$ -,  $C$ -,  $T$ -преобразований.

Аналогичная ситуация имеет место и для частиц произвольного спина, т.е. уравнения (62), (63) не исчерпывают всех неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц. Получим здесь все возможные (с точностью до эквивалентности) уравнения для частиц с  $m = 0$  и произвольным спином  $s$ .

Будем исходить из следующей системы  $8s$ -компонентных уравнений:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \alpha \cdot p \Psi, \quad (173)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \cdot p \right) \hat{S}_{ab}^2 \Psi = 0, \quad (174)$$

где  $\Psi(t, \vec{x})$  —  $8s$ -компонентная волновая функция;  $\alpha_a$  и  $\hat{S}_{ab}$  — матрицы размерности  $8s \times 8s$

$$\alpha_a = i \begin{pmatrix} 0 & -2\tau_a \\ 2\tau_a & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{ab} = \begin{pmatrix} S_{ab} & 0 \\ 0 & S_{ab} \end{pmatrix}, \quad (175)$$

а матрицы  $S_{ab}$ ,  $\tau_a$ , по-прежнему, определяются соотношениями (148), (152), (153).

Уравнения (173), (174) пуанкаре-инвариантны. Генераторы группы  $P(1,3)$  на множестве решений уравнений (174), (173) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, & P_a &= p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, & J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\
 J_{0a} &= x_0 p_a - x_a p_0 + \frac{i}{2} \alpha_a + i \beta_a,
 \end{aligned} \tag{176}$$

где

$$\beta_a = i \begin{pmatrix} 0 & -j_a \\ j_a & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_4 j_a, \quad \Gamma_4 = i \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{177}$$

а матрицы  $j_a$  определены в (152), (153).

Повторяя почти дословно выкладки (154)–(157), нетрудно убедиться, что уравнение (174) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\hat{S} \cdot \mathbf{p} \Psi = \Gamma_4 s \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \Psi. \tag{178}$$

Из (176), (178) заключаем, что на множестве решений уравнений (173), (174) реализуется прямая сумма

$$\mathcal{D}^+(s) \oplus \mathcal{D}^-(s) \oplus \mathcal{D}^+(-s) \oplus \mathcal{D}^-(-s) \tag{179}$$

неприводимых представлений группы  $P(1,3)$ . Таким образом, уравнения (173), (174) неэквивалентны (177), (178).

Для получения всех других неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц произвольной спиральности воспользуемся тем фактом, что система (173), (174) не исчерпывает всех пуанкаре-инвариантных уравнений в представлении (176). Действительно, как и в случае  $s = 1/2$ , помимо (174), на волновую функцию  $\Psi$  можно наложить одно из следующих инвариантных дополнительных условий:

$$L_1 \Psi \equiv (1 + \varepsilon \Gamma_4 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \varepsilon' \Gamma_4 + \varepsilon \varepsilon' \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) \Psi = 0, \tag{180}$$

$$L_2 \Psi \equiv (1 + \varepsilon \Gamma_4) \Psi = 0, \tag{181}$$

$$L_3 \Psi \equiv (1 + \varepsilon \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \Psi = 0, \tag{182}$$

$$L_4 \Psi \equiv (1 + \varepsilon \Gamma_4 \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \Psi = 0, \tag{183}$$

$$L_5 \Psi \equiv (-3 + \varepsilon \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \varepsilon' \Gamma_4 + \varepsilon \varepsilon' \Gamma_4 \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \Psi = 0, \tag{184}$$

где

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1. \tag{185}$$

Уравнения (180)–(185) пуанкаре-инвариантны, поскольку операторы  $\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}$  и  $\Gamma_4$  (а значит, и  $L_1, L_2, \dots, L_5$ ) коммутируют со всеми генераторами (176) группы  $P(1,3)$ . С другой стороны, эти уравнения исчерпывают все возможные с точностью до эквивалентности пуанкаре-инвариантные дополнительные условия, которые можно

наложить на решения системы (173), (174). Действительно, операторы  $L_n$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} L_1 &= 4P_1^\varepsilon P_2^{\varepsilon'}, & L_2 &= 2P_1^\varepsilon, & L_3 &= 2P_2^\varepsilon, \\ L_4 &= 2 \left( P_1^\varepsilon P_2^{\varepsilon'} + P_1^{-\varepsilon} P_2^{-\varepsilon'} \right), & L_5 &= -4 \left( 1 - P_1^\varepsilon P_2^{\varepsilon'} \right), \end{aligned} \quad (186)$$

где  $P_1^\varepsilon$  и  $P_2^{\varepsilon'}$  — операторы проектирования на подпространства  $\mathcal{D}^\varepsilon(s) \oplus \mathcal{D}^\varepsilon(-s)$  и  $\mathcal{D}^+(\varepsilon', s) \oplus \mathcal{D}^-(\varepsilon', s)$  соответственно:

$$P_1^\varepsilon = \frac{1}{2} \left( 1 + \varepsilon \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{p} \right), \quad P_2^{\varepsilon'} = \frac{1}{2} \left( 1 + \varepsilon' \Gamma_4 \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{p} \right). \quad (187)$$

Из (179), (186), (187) следует, что на решениях уравнений (173), (174) с одним из дополнительных условий (180)–(184) реализуются следующие представления группы  $P(1, 3)$ :

$$\mathcal{D}^{-\varepsilon}(\varepsilon' s) \oplus \mathcal{D}^{-\varepsilon}(-\varepsilon' s) \oplus \mathcal{D}^\varepsilon(-\varepsilon' s), \quad (188)$$

$$\mathcal{D}^{-\varepsilon}(s) \oplus \mathcal{D}^\varepsilon(-s), \quad (189)$$

$$\mathcal{D}^{-\varepsilon}(s) \oplus \mathcal{D}^{-\varepsilon}(-s), \quad (190)$$

$$\mathcal{D}^+(-\varepsilon s) \oplus \mathcal{D}^-(-\varepsilon s), \quad (191)$$

$$\mathcal{D}^\varepsilon(\varepsilon' s). \quad (192)$$

Нетрудно убедиться, что формулы (179), (188)–(192) исчерпывают все возможные невырожденные прямые суммы неприводимых представлений  $\mathcal{D}^\varepsilon(\varepsilon' s)$  группы  $P(1, 3)$ , откуда и следует вывод, что уравнения (173), (174) с одним из дополнительных условий (180)–(184) (и без дополнительных условий) исчерпывают все возможные (с точностью до эквивалентности) релятивистские уравнения для безмассовой частицы с произвольным спином  $s$ .

Исследуем свойства полученных уравнений относительно  $P$ -,  $C$ - и  $T$ -преобразований. Для этого воспользуемся следующей схемой [46]:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^+(s) & \xleftrightarrow{C} & \mathcal{D}^-(s) \\ \uparrow P & & \uparrow P \\ \mathcal{D}^+(-s) & \xleftrightarrow{C} & \mathcal{D}^-(-s) \end{array} \quad \mathcal{D}^+(\varepsilon' s) \xleftrightarrow{T} \mathcal{D}^+(\varepsilon' s)$$

где символ  $\mathcal{D}^+(s) \xleftrightarrow{P} \mathcal{D}^+(-s)$  означает, что операция пространственной инверсии преобразует пространство неприводимого  $\mathcal{D}^\varepsilon(s)$  представления в пространство  $\mathcal{D}^{-\varepsilon}(s)$  представления и т.д.

Из (179), (188)–(192) заключаем, что уравнения (173), (174)  $P$ -,  $C$ -,  $T$ -инвариантны; уравнения (173), (174) с дополнительным условием (180)  $T$ -инвариантны, но  $C$ -,  $P$ -,  $CP$ -неинвариантны; уравнения (173), (174), (181)  $T$ -,  $CP$ -инвариантны,

но  $C$ -,  $P$ -неинвариантны; уравнения (173), (174), (182)  $P$ -,  $T$ -инвариантны, но  $C$ -неинвариантны; уравнения (173), (174), (183)  $C$ -,  $T$ -инвариантны, но  $P$ -неинвариантны; наконец, уравнения (173), (174), (184)  $T$ -инвариантны, но  $P$ -,  $C$ -,  $PC$ -неинвариантны.

Отметим, что уравнения (173), (174) с одним из дополнительных условий (180), (183) или (184) неинвариантны относительно  $PCT$ - и  $PT$ -преобразований. Этот факт не противоречит известной  $CPT$ -теореме Паули–Людерса, поскольку дополнительные условия (180), (183), (184) в  $x$ -пространстве нелокальны.

В заключение этого раздела приведем явный вид всех возможных неэквивалентных уравнений для безмассовых частиц со спином  $s = 1$ . Выбирая матрицы  $\tau_a$  и  $j_a$  из (175), (152) в форме (161) и представляя волновую функцию  $\Psi$  в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (193)$$

где

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{pmatrix}, \quad (194)$$

$\varphi_\mu$  и  $\chi_\mu$  — однокомпонентные функции, приходим, согласно (173), (174), (178), к уравнениям для  $\varphi$  и  $\chi$  в форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \varphi &= -\partial \chi / \partial t, & \operatorname{div} \varphi &= 0, \\ \operatorname{rot} \chi &= \partial \varphi / \partial t, & \operatorname{div} \chi &= 0, & \varphi_4 &= c_1, & \chi_4 &= c_2, \end{aligned} \quad (195)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — константы, которые, не умаляя общности, можно считать равными нулю.

Уравнения (195) совпадают с уравнениями Максвелла для электромагнитного поля в вакууме. Найдем теперь явный вид дополнительных условий (180)–(185), которые можно наложить на решения уравнений (195), не нарушив их ковариантности. Подставляя (152), (161), (175) в (180)–(185), получаем

$$p(\varphi - i\varepsilon' \chi) = -\varepsilon \operatorname{rot}(\varphi - i\varepsilon' \chi), \quad (196)$$

$$\varphi = i\varepsilon \chi, \quad (197)$$

$$\operatorname{rot} \varphi = i\varepsilon p \chi, \quad \operatorname{rot} \chi = -i\varepsilon p \varphi, \quad (198)$$

$$\operatorname{rot} \varphi = -\varepsilon p \varphi, \quad \operatorname{rot} \chi = -\varepsilon p \chi, \quad (199)$$

$$p(-\varphi + i\varepsilon' \chi) = -\varepsilon \operatorname{rot}(\varphi - i\varepsilon' \chi), \quad p(\varphi + i\varepsilon' \chi) = 0. \quad (200)$$

Таким образом, помимо уравнений Максвелла (195) для безмассовых частиц со спином 1 существует еще пять типов пуанкаре-инвариантных уравнений, которые имеют вид (195) с одним из дополнительных условий (196)–(200). Подчеркнем, что все дополнительные условия (196)–(200), за исключением (197), в  $x$ -пространстве имеют форму нелокальных интегродифференциальных уравнений.

### 3. Частица с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле

Уравнения движения свободных релятивистских частиц представляют реальный физический интерес только в том случае, если их можно использовать для решения конкретных задач физики. Одной из самых важных является задача о движении заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Как уже говорилось, многие из широко известных релятивистских уравнений приводят при решении этой задачи к большим трудностям.

В настоящем разделе задача о движении частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле решается с использованием уравнений, полученных выше. При этом оказывается, что уравнения (93)–(96) не приводят к нарушению причинности.

#### Введение взаимодействия в уравнения без лишних компонент

Обобщение уравнений без лишних компонент, полученных выше, для заряженных частиц во внешнем поле представляет собой довольно трудную задачу ввиду сложной зависимости гамильтонианов  $H_s^I$ ,  $H_s^{II}$  импульсов. Здесь эту задачу решим в предположении, что импульсы частиц малы по сравнению с их массами.

Для  $p \ll m$  гамильтонианы  $H_s^I$  (42) и  $H_s^{II}$  (53) можно представить в виде ряда по степеням  $1/m$  (комптоновской длины волны) [38, 39]:

$$H_s^\alpha = \delta_1 \left[ m + \frac{1}{4m} \sum_{a,b} d_{ab} (p_a p_b + p_b p_a) \right] + \quad (201)$$

$$+ \sigma_3 \left[ \sum_a b_a p_a + \frac{1}{m^2} h^\alpha(\mathbf{p}) \right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right),$$

где

$$\alpha = I, II, \quad d_{ab} = \delta_{ab}/4 - S_a S_b, \quad b_a = 2S_a, \quad (202)$$

$$h^I(\mathbf{p}) = -2h^{II}(\mathbf{p}) = \frac{2}{3} \sum_{a,b,c} S_a d_{bc} p_a p_b p_c, \quad a, b, c = 1, 2, 3.$$

Как видно из (201), гамильтонианы  $H_s^I$  и  $H_s^{II}$  совпадают с точностью до членов порядка  $1/m$  и являются полиномами по  $p_a$ .

Для того чтобы перейти к описанию заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, сделаем в (201) обычную замену  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ , где  $e$  — заряд частицы;  $A_\mu$  — вектор-потенциал электромагнитного поля. В результате придем к следующему уравнению:

$$H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi})\psi(t, \mathbf{x}) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{x}),$$

$$H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = \sigma_1 \left[ m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \frac{2}{m} (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{H} \right] + eA_0 + \quad (203)$$

$$+ \sigma_3 \left[ 2\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{h^\alpha(\boldsymbol{\pi})}{m^2} \right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \quad \boldsymbol{\pi}^2 = \sum_a \pi_a^2,$$

где  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  — вектор напряженности магнитного поля.

Можно убедиться непосредственно, что собственные значения гамильтониана (203) могут быть как положительными, так и отрицательными. Из (203) получим уравнение для состояний с положительной энергией, подобно тому, как это было сделано Фолди и Воутуйзенем [64] для дираковской частицы с  $s = 1/2$ . Это достигается с помощью серии приближенных унитарных преобразований, приводящих гамильтониан (203) к виду, не содержащему “нечетных” (не коммутирующих с  $\sigma_1$ ) членов.

Подвергнем гамильтониан  $H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi})$  и волновую функцию  $\Psi(t, \boldsymbol{x})$  преобразованию:

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U\Psi, \quad H_s^\alpha(\boldsymbol{\pi}) \rightarrow H_s'^\alpha(\boldsymbol{\pi})U^{-1} - i\frac{\partial U}{\partial t}U^+. \quad (204)$$

Используя оператор

$$U_1 = \exp(-i\sigma_2 \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}/m), \quad (205)$$

получаем

$$\begin{aligned} H_s'^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = & \sigma_1 \left( m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}}{m} \right) + eA_0 - \\ & -i\sigma_2 \frac{e\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}}{m} + \frac{e}{2m^2} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}]_- + \sigma_3 \frac{h'^\alpha(\boldsymbol{\pi})}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \end{aligned} \quad (206)$$

$$h'^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = h^\alpha(\boldsymbol{\pi}) - [\pi^2, (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})]_+ + e[\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}]_+ + \frac{4}{3}(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^3,$$

$$E_a = -\frac{\partial A_0}{\partial x_a} - \frac{\partial A_a}{\partial t}.$$

Гамильтониан  $H_s'^\alpha(\boldsymbol{\pi})$  является “четным” с точностью до членов порядка  $1/m^0$ . В свою очередь, унитарный оператор

$$U_2 = \exp\left(i\sigma_3 e\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}}{2m^2}\right) \quad (207)$$

приводит  $H_s'^\alpha(\boldsymbol{\pi})$  к следующему виду (“четному” с точностью до членов порядка  $1/m$ ):

$$\begin{aligned} H_s''^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = & \sigma_1 \left( m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}}{m} \right) + eA_0 + \frac{2}{2m^2} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}]_- + \\ & + \sigma_3 \frac{1}{m^2} h''^\alpha(\boldsymbol{\pi}) + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \quad h''^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = h'^\alpha(\boldsymbol{\pi}) + \frac{e}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (208)$$

Наконец, с помощью оператора

$$U_3 = \exp\left(-i\sigma_2 \frac{h''^\alpha(\boldsymbol{\pi})}{m^3}\right) \quad (209)$$

получаем из (208) гамильтониан [38, 39]

$$H_s'''^\alpha(\boldsymbol{\pi}) = \sigma_1 \left( m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}}{m} \right) + eA_0 + \frac{e}{2m^2} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}]_-, \quad (210)$$

“четный” с точностью до членов порядка  $1/m^2$ .

Таким образом, три последовательных преобразования, осуществляемых операторами (205), (207), (209), приводят уравнение (203) к виду

$$H_s''''(\boldsymbol{\pi})\Phi(t, \mathbf{x}) = i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, \mathbf{x}), \quad \Phi(t, \mathbf{x}) = U_3U_2U_1\Psi(t, \mathbf{x}). \quad (211)$$

Оператор  $H_s''''$  в приближении  $1/m^2$  коммутирует с  $\sigma_1$ . На множестве функций  $\Psi^+$ , удовлетворяющих условию

$$\sigma_1\Phi^+ = \Phi^+, \quad (212)$$

гамильтониан (211) положительно определен и равен [38]:

$$H_s''''(\boldsymbol{\pi})\Phi^+ = \left\{ m + \frac{\pi^2}{2m} - e\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}}{m} + eA_0 + \right. \\ \left. + \frac{e}{2m^2}[\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}]_- \right\} \Phi^+ = i\frac{\partial}{\partial t}\Phi^+. \quad (213)$$

Формула (213) представляет собой обобщение уравнения Паули для частицы со спином  $1/2$  на случай частицы с произвольным спином.

Для того чтобы выяснить физический смысл входящих в (213) слагаемых, воспользуемся тождеством

$$\frac{e}{2m^2}[\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}]_- \equiv \frac{e}{12m^2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b} - e\frac{s(s+1)\operatorname{div}\vec{E}}{6m^2} - \\ - \frac{e}{4m^2}\mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{E}); \quad Q_{ab} = 3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1), \quad (214)$$

Согласно (213), (214), квазирелятивистский гамильтониан  $H_s''''(\boldsymbol{\pi})$  частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле включает члены, соответствующие дипольному  $\left(-\frac{e}{m}\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}\right)$ , квадрупольному  $\left(-\frac{1}{12m^2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b}\right)$  и спин-орбитальному  $\left(-\frac{e}{4m^2}\mathbf{S} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathbf{p})\right)$  взаимодействиям.

Таким образом, используя полученные выше уравнения для свободных частиц произвольного спина, получим квазирелятивистские уравнения (213) для заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. В рассматриваемом приближении  $1/m^2$  гамильтонианы  $H_s'(\boldsymbol{\pi})$  и  $H_s''(\boldsymbol{\pi})$  (203) эквивалентны  $H_s''''(\boldsymbol{\pi})$  (213). Однако операторы  $H_s^1$  определены в гильбертовом пространстве, в котором скалярное произведение имеет сложную структуру (4), поэтому гамильтонианы  $H_s^1(\boldsymbol{\pi})$  представляются более удобными для описания движения заряженной частицы во внешнем поле.

Для  $s = 1/2$  формула (213) совпадает с уравнением, полученным Фолди и Вонтуйзенем [64]. При  $s = 1$  (213) имеет такую же структуру, как и уравнение, полученное в работе [72], но дополнительно учитывает квадрупольное взаимодействие частицы с полем.

### Введение взаимодействия в дифференциальные уравнения движения

Полученные выше дифференциальные уравнения движения свободных частиц произвольного спина допускают непротиворечивое обобщение для заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. Ниже будет осуществлено такое обобщение и будет показано, что при этом не возникает парадоксов с нарушением

причинности, которые имеют место в других релятивистских уравнениях для частиц со спином  $s \neq 1/2$  [23, 24].

Будем исходить из системы уравнений первого порядка (93), (94) или (95), (96). Можно показать, что введение минимального электромагнитного взаимодействия непосредственно в уравнения (93), (94) или в явно ковариантную систему (95), (96) приводит к тому, что как уравнения (93), (94), так и уравнения (95), (96) становятся несовместными. Чтобы преодолеть эту трудность, запишем (93), (94) в виде единого уравнения

$$\left[ \hat{P}_s \left( i \frac{\partial}{\partial t} - H_s \right) + \varkappa (1 - \hat{P}_s) \right] \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (215)$$

где  $\varkappa$  — произвольный параметр. Эквивалентность (215) и (93), (94) следует из соотношений

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - H_s, \hat{P}_s \right]_- = 0, \quad \hat{P}_s \hat{P}_s = \hat{P}_s. \quad (216)$$

Явно ковариантную систему (95), (96) также можно представить в виде одного уравнения

$$\left[ B_s \left( \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu - m \right) + \varkappa (1 - B_s) \right] \Psi = 0, \quad (217)$$

$$B_s = \frac{1}{16ms} \left( \Gamma_\mu^{(s)} + m \right) \left( 1 + \Gamma_4^{(s)} \right) [S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 4s(s-1)],$$

поскольку

$$\left[ B_s, \left( \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu - m \right) \right]_- \Psi = 0, \quad B_s B_s = B_s. \quad (218)$$

Сделаем в (215) и (217) замену  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ , где  $A_\mu$  — вектор-потенциал электромагнитного поля, и покажем, что такая замена позволяет получить систему уравнений первого порядка, описывающих движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Поскольку уравнения (215) и (217) после замены  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu$  в конечном итоге приводят к одинаковым результатам, рассмотрим только уравнение (215), которое принимает вид

$$\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) [\pi_0 - H_s(\boldsymbol{\pi})] + \varkappa [1 - \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})] \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (219)$$

где

$$H_s(\boldsymbol{\pi}) = \Gamma_0^{(s)} \Gamma_a^{(s)} \pi_a + \Gamma_0^{(s)} m, \quad \hat{P}_s(\mathbf{x}) = P_s + (1 - \Gamma_4) [\Gamma_\mu \pi_\mu, P_s]_- / 2m. \quad (220)$$

Умножая (219) на  $\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})$  и  $[1 - \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})]$  и используя тождества

$$\begin{aligned} & \left[ \pi_0 - H_s(\boldsymbol{\pi}), \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \right]_- \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \equiv \\ & \equiv \frac{e}{4m} \Gamma_0^{(s)} \left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \left( \frac{1}{s} S_{\mu\nu} - i \Gamma_\mu^{(s)} \Gamma_\nu^{(s)} \right) F^{\mu\nu} \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}), \end{aligned} \quad (221)$$

$$\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \cdot \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) = \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}), \quad eF_{\mu\nu} = -i[\pi_\mu, \pi_\nu],$$

приходим к системе уравнений

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H_s(\boldsymbol{\pi}, \pi_0)\Psi, \quad H_s(\boldsymbol{\pi}, \pi_0) = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m + \\ + eA_0 + \frac{e}{4m}\Gamma_0^{(s)}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F^{\mu\nu}, \quad (222)$$

$$\left\{P_s + \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\frac{[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, P_s]_-}{2m}\right\}\Psi = \Psi, \quad (223)$$

которую, как и (93), (94), можно записать в эквивалентной явно ковариантной форме:

$$\left[\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu - m + \frac{e}{4m}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(\frac{1}{s}S_{\mu\nu} - i\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}\right)F^{\mu\nu}\right]\Psi = 0, \quad (224)$$

$$\left(m + \Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu\right)\left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right)[S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 4s(s-1)]\Psi = 16ms\Psi. \quad (225)$$

Покажем, что уравнения (222), (223) [или (224), (225)] не приводят к парадоксам с нарушением причинности. Для этого преобразуем (224), (225) к такой форме, чтобы каждое решение системы удовлетворяло уравнению Зайцева–Фейнмана–Гелл-Мана [77], которое, как известно [12], описывает причинное пространство волн. Это достигается переходом к новой волновой функции

$$\Psi(t, \boldsymbol{x}) = V\Phi(t, \boldsymbol{x}), \quad (226)$$

где  $V$  – обратимый оператор:

$$V = 1 + \frac{\lambda^-}{m}\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, \quad V^{-1} = 1 - \frac{\lambda^-}{m}\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu, \quad \lambda^\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \Gamma_4^{(s)}\right). \quad (227)$$

Подставляя (226), (227) в (223), (224) и используя тождество

$$\left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu\right)^2 \equiv \pi_\mu\pi^\mu + i\epsilon\Gamma_\mu^{(s)}\Gamma_\nu^{(s)}F^{\mu\nu}/2, \quad (228)$$

получаем уравнения для  $\Phi(t, \boldsymbol{x})$ :

$$\left[\lambda^+ \left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu + \frac{e}{2sm}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{m}\pi_\mu\pi^\mu\right) - m\right]\Phi(t, \boldsymbol{x}) = 0, \quad (229)$$

$$P_s\Phi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}S_{ab}^2\Phi = s(s+1)\Phi. \quad (230)$$

Наконец, умножая (229) слева на оператор

$$F = m + \left(\Gamma_\mu^{(s)}\pi^\mu - \frac{e}{2sm}\tilde{S}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{m}\pi_\mu\pi^\mu\right)\lambda^-, \quad (231)$$

где

$$\tilde{S}_{ab} = S_{ab}, \quad \tilde{S}_{0a} = iS_{bc}, \quad (232)$$

приходим к уравнению

$$\left( \pi_\mu \pi^\mu - m^2 - \frac{e}{2s} \tilde{S}_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \Phi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (233)$$

Формулы (230), (232), (233) задают уравнение Зайцева–Фейнмана–Гелл-Мана для частицы с произвольным спином. Решения  $\Phi(t, \mathbf{x})$  этого уравнения описывают причинное распространение волн с досветовой скоростью [12]. Таковы же, очевидно, свойства решений  $\Psi(t, \mathbf{x})$  уравнений (222), (223) и (224), (225), связанных с  $\Phi(t, \mathbf{x})$  преобразованием эквивалентности (226).

К этому результату можно прийти и другим путем, воспользовавшись критерием Вайтмана [25]. Умножая (224) на  $(\Gamma_\mu \pi^\mu + m)$  получаем уравнение

$$(p_\mu p^\mu + B)\Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (234)$$

где  $B$  — дифференциальный оператор, содержащий производные не выше первого порядка и равный в отсутствие взаимодействия  $-m^2$ . Как показано в работе [25], это означает, что  $\Psi(t, \mathbf{x})$  описывает распространение волн с досветовой скоростью.

Таким образом, приходим к выводу: уравнения (224), (225) описывают движение заряженной релятивистской частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле и не приводят к парадоксам с нарушением причинности.

Отметим еще, что уравнения (95), (96) можно получить из принципа минимального действия, если плотность лагранжиана  $L(x)$  выбрать в виде

$$\begin{aligned} L(x) = & \left( m \bar{\Psi}' + i \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial x_\mu} \check{\Gamma}_\mu \right) \left( 1 + \check{\Gamma}_4^{(s)} \right) \times \\ & \times \left[ \check{S}_{\mu\nu} \check{S}^{\mu\nu} - 4s(s-1) \right] i \hat{\Gamma}_\lambda \frac{\partial \Psi'}{\partial x_\lambda} + 16m^2 s \bar{\Psi}' \Psi', \end{aligned} \quad (235)$$

где  $\Psi'$ ,  $\bar{\Psi}'$  — компонентная волновая функция:

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}' = \Psi' i \hat{\Gamma}_0^{(s)} \hat{\Gamma}_5^{(s)}, \quad (236)$$

$\check{\Gamma}_\mu^{(s)}$ ,  $\check{S}_{\mu\nu}$  — матрицы размерности  $16s \times 16s$ :

$$\begin{aligned} \check{\Gamma}_k^{(s)} = & \begin{pmatrix} \Gamma_k^{(s)} & 0 \\ 0 & \Gamma_k^{(s)} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad \check{\Gamma}_0^{(s)} = \begin{pmatrix} \Gamma_0^{(s)} & 0 \\ 0 & -\Gamma_0^{(s)} \end{pmatrix}, \\ \check{\Gamma}_5^{(s)} = & \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_0^{(s)} \\ \Gamma_0^{(s)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{S}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (237)$$

При этом для функции  $\Psi(t, \mathbf{x})$  получаем уравнения (95), (96), а для  $\chi(t, \mathbf{x})$  — уравнения, комплексно-сопряженные с (95), (96). Сделав в (235) минимальную замену  $-i\partial/\partial x_\mu \rightarrow -i\partial/\partial x_\mu - eA_\mu$ , придем к уравнениям (224), (225). Таким образом, уравнения (224), (225) допускают лагранжеву формулировку.

**Замечание.** Можно показать, что уравнения (93)–(96) инвариантны относительно операции зарядового сопряжения  $C$ , но не инвариантны относительно обращения времени  $T$  и отражения пространственных координат  $P$ .  $P$ -,  $C$ -,  $T$ -инвариантные

уравнения для частиц произвольного спина можно получить из (95), (96) удвоением числа компонент и заменой  $\Gamma_\mu^{(s)} \rightarrow \check{\Gamma}_\mu^{(s)}$  согласно (237).

### Разложение по степеням $1/m$

Гамильтониан  $H_s(\boldsymbol{\pi}, \pi_0)$  (222) может иметь положительные и отрицательные собственные значения. С помощью серии последовательных приближенных преобразований, подобных (204)–(213), получим из (222), (223) уравнение для состояний с положительной энергией. При этом гамильтониан частицы произвольного спина будет представлен в виде ряда по степеням  $1/m$ , удобном для вычислений по теории возмущений.

Основная трудность при диагонализации уравнений (222), (223) состоит в том, что необходимо найти преобразования, одновременно приводящие к диагональной форме два различных уравнения. Сначала диагоналируем дополнительное условие (223), а затем, используя операторы, коммутирующие с преобразованным уравнением (221), приведем к диагональной форме уравнение (222).

Подвергнем волновую функцию  $\Psi(t, \boldsymbol{x})$  из (222), (223) преобразованию

$$\Psi \rightarrow \Psi'' = V\Psi, \quad (238)$$

где  $V$  — обратимый оператор:

$$\begin{aligned} V &= 1 + \frac{1}{2m} \left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \left( \Gamma_a^{(s)} \pi_a - \Gamma_0^{(s)} S_a \pi_a k_1 \right), \\ V^{-1} &= 1 - \frac{1}{2m} \left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \left( \Gamma_a^{(s)} \pi_a - \Gamma_0^{(s)} S_a \pi_a k_1 \right). \end{aligned} \quad (239)$$

Поддействовав оператором (239) слева на (220), (221), получим уравнения для  $\Psi''$ :

$$\begin{aligned} H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) \Psi'' &= i \frac{\partial}{\partial t} \Psi'', \\ H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) &= \Gamma_0^{(s)} m + k_1 \Gamma_4^{(s)} (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}) + \\ &+ \Gamma_0^{(s)} \left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \frac{1}{2m} \left\{ \boldsymbol{\pi}^2 - k_1^2 (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{s} \mathbf{S} \cdot [\mathbf{H} - i(1 - k_1 s) \mathbf{E}] \right\} + e A_0, \end{aligned} \quad (240)$$

$$P_s \Psi'' = \Psi'' \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} S_{ab}^2 \Psi'' = s(s+1) \Psi'', \quad (241)$$

где  $H_a = -i[\pi_b, \pi_c]_-$  и  $E_a = -i[\pi_0, \pi_a]_-$  — напряженности магнитного и электрического полей;  $P_s$  — проектор, определенный в (92).

Из (241), (84), (85) заключаем, что, не умаляя общности, можно считать, что волновая функция  $\Psi''$  имеет  $2(2s+1)$  отличных от нуля компонент. Матрицы  $S_{ab}$  и коммутирующие с ними матрицы  $\Gamma_0^{(s)}$ ,  $\Gamma_4^{(s)}$  на множестве таких функций всегда можно выбрать в виде

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} S_c & 0 \\ 0 & S_c \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0^{(s)} = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^{(s)} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (242)$$

где  $S_c$  — матрицы, образующие представление  $D(s)$  алгебры  $O(3)$ ;  $1$  и  $0$  —  $(2s+1)$ -рядные единичная и нулевая матрицы. Подставляя (242) в (240), получаем гамильтониан  $H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0)$  в виде

$$H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_1 m + k_1 \sigma_3 \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2m} (\sigma_1 - i\sigma_2) \left\{ \boldsymbol{\pi}^2 - k_1^2 (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 - \frac{1}{s} e \mathbf{S} \cdot [\mathbf{H} - i(1 - k_1 s) \mathbf{E}] \right\} + e A_0. \quad (243)$$

Формула (243) обобщает гамильтониан свободной частицы произвольного спина (60) при взаимодействии с внешним электромагнитным полем. Таким образом, используя явно ковариантные уравнения (224), (225), получили рецепт введения взаимодействия в дифференциальные пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент, найденные выше.

Задача о диагонализации системы (222), (223) сводится теперь к преобразованию гамильтониана (246) к диагональной форме. Как и для уравнения Дирака [64], такое преобразование можно осуществить только приближенно, для  $\pi_\mu \ll m$ . Используя для этой цели серию последовательных преобразований

$$H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) \rightarrow V_3 V_2 V_1 H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) V_1^{-1} V_2^{-1} V_3^{-1} = H'_s(\boldsymbol{\pi}, A_0), \quad (244)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \exp \left\{ -i\sigma_2 \frac{k_1 \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}}{m} \right\}, \\ V_2 &= \exp \left\{ \sigma_3 \frac{1}{4m^2} \left[ \boldsymbol{\pi}^2 - k_1^2 (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 - e \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}}{s} + ie \left( \frac{1}{s} - k \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \right] \right\}, \\ V_3 &= \exp \left\{ -i \frac{\sigma_3}{m^3} \left[ \frac{1}{12} (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{8} \left[ \boldsymbol{\pi}^2 - k_1 (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}}{s} + ie \left( \frac{1}{s} - k_1 \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}, \pi_0 \right]_- \right] \right\}, \end{aligned} \quad (245)$$

и пренебрегая членами порядка  $1/m^3$ , получаем

$$\begin{aligned} H'_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) &= \sigma_1 \left( m + \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - e \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}}{2sm} \right) + A_0 - \frac{e}{16m^2 s^2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{E}) - \\ &\quad - \frac{e}{24m^2 s^2} \left[ \frac{1}{2} Q_{ab} \frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1) \operatorname{div} \mathbf{E} \right] + \\ &\quad + \frac{i(2s-1)e}{8m^2 s^2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{H} \times \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{H}) + \frac{e}{24m^2 s^2} Q_{ab} \frac{\partial H_a}{\partial x_b}, \end{aligned} \quad (246)$$

здесь  $Q_{ab}$  — тензор квадрупольного взаимодействия, определенный в (214).

Приближенный гамильтониан (246) в точности совпадает с полученным в работе [74], в которой в качестве исходного использовалось уравнение Зайцева–Фейнмана–Гелл-Мана (233) для произвольного спина. Для  $s = 1/2$  (246) совпадает с гамильтонианом (210), являющимся нерелятивистским пределом гамильтониана Дирака для электрона [64]. Если же  $s \neq 1/2$ , то операторы (246) и (210) не совпадают. Следовательно, уравнения (42), (1) и (93), (94), будучи математически эквивалентными в случае свободных частиц, после введения взаимодействия

приводят к различным физическим результатам. Так, согласно (213), дипольный момент частицы произвольного спина  $\mu_s$  (коэффициент при  $e\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}/2m$ ) равен 2, а из (246) получаем  $\mu_s = 1/s$ .

### Релятивистская частица с произвольным спином в однородном магнитном поле

Рассмотрим систему уравнений (222), (223) для частицы в однородном магнитном поле. Не умаляя общности, можно считать, что вектор напряженности этого поля  $\mathbf{H}$  параллелен третьей проекции импульса частицы  $p_3$ . Это означает, что компоненты тензора электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$  равны

$$F_{0a} = E_a = 0, \quad F_{23} = H_1 = 0, \quad F_{31} = H_2 = 0, \quad F_{12} = H_3 = H. \quad (247)$$

Из (98) следует, что  $\pi_\mu$ , можно выбрать в виде

$$\pi_1 = p_1 - eHx_2, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3, \quad \pi_0 = i\partial/\partial t. \quad (248)$$

Подставив (247), (248) в (220), (221), придем к уравнениям:

$$H_s(\boldsymbol{\pi})\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad (249)$$

$$H_s(\boldsymbol{\pi}) = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m + \frac{e\Gamma_0^{(s)}}{2m} \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \left(i\Gamma_1^{(s)}\Gamma_2^{(s)} - \frac{1}{s}S_{12}\right) H,$$

$$\left\{P_s + \frac{1}{2m} \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) [\Gamma_\mu\pi^\mu, P_s]_-\right\} \Psi \equiv \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})\Psi = \Psi. \quad (250)$$

Преобразуем  $H_s(\boldsymbol{\pi})$  к такому виду, чтобы он содержал только коммутирующие величины. Это позволит нам, не решая уравнений движения (249), (250), определить спектр собственных значений гамильтониана (249).

Подвергнем волновую функцию  $\Psi$ , гамильтониан  $H_s(\boldsymbol{\pi})$  и проектор  $\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})$  преобразованию

$$\Psi \rightarrow \Psi' = V\Psi, \quad H_s(\boldsymbol{\pi}) \rightarrow H'_s(\boldsymbol{\pi}) = VH_s(\boldsymbol{\pi})V^{-1}, \quad (251)$$

$$\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \rightarrow \hat{P}'_s(\boldsymbol{\pi}) = V\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})V^{-1},$$

где

$$V = \lambda^- + \frac{1}{\varepsilon}\lambda^+\Gamma_0^{(s)}H_s(\boldsymbol{\pi}), \quad V^{-1} = \frac{1}{m} \left(\lambda^+\hat{\varepsilon} + H_s(\boldsymbol{\pi})\lambda^+\Gamma_0^{(s)}\right),$$

$$\hat{\varepsilon} = (\boldsymbol{\pi}^2 - eS_{12}H/s + m^2), \quad \lambda^\pm = \left(1 \pm \Gamma_4^{(s)}\right)/2.$$

Используя тождества

$$\lambda^-\Gamma_\mu^{(s)} \equiv \Gamma_\mu^{(s)}\lambda^+, \quad (\lambda^\pm)^2 \equiv \lambda^\pm, \quad \lambda^+\lambda^- \equiv 0, \quad (252)$$

получаем

$$H'_s(\boldsymbol{\pi}) = \Gamma_0^{(s)} \left(\boldsymbol{\pi}^2 + m^2 - eS_{12}H/s\right)^{1/2}, \quad (253)$$

$$P_s\Psi' = \Psi' \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}S_{ab}^2\Psi' = s(s+1)\Psi'. \quad (254)$$

Все операторы, входящие в определение (253) гамильтониана  $H'_s(\boldsymbol{\pi})$ , коммутируют друг с другом и имеют такие собственные значения:

$$\Gamma_0^{(s)}\Psi' = \varepsilon\Psi', \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$S_{12}H\Psi' = s_3H\Psi', \quad s_3 = -s, -s+1, \dots, s, \quad (255)$$

$$\boldsymbol{\pi}^2\Psi' = [(2n+1)H + p_3^2]\Psi', \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (256)$$

Формулы (255) следуют непосредственно из (254), а соотношение (256) приведено, например, в монографии [75].

Квадрат гамильтониана (253) и операторы (255), (256) имеют общую систему собственных функций  $\Psi'_{\varepsilon n s_3 p_3}$ . Отсюда заключаем, что собственные значения гамильтониана (253) равны

$$E_{\varepsilon n s_3 p_3} = \varepsilon \left[ m^2 + \left( 2n + 1 - \frac{s_3}{s} \right) eH + p_3^2 \right]^{1/2}. \quad (257)$$

Соотношение (257) обобщает известную формулу [75] для уровней энергии электрона в однородном магнитном поле для частицы с произвольным спином. Как видно из (257), значения энергии такой частицы действительны при любых значениях  $s$ , в то время как уравнения Рариты–Швингера при решении аналогичной задачи приводят к комплексным значениям энергии [24].

Приведем для полноты явный вид собственных функций  $\Psi_{\varepsilon n s_3 p_3}$ . Выбирая матрицы  $\Gamma_\mu^{(s)}$ ,  $S_{ab}$  в виде

$$\Gamma_0^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_a^{(s)} = \begin{pmatrix} \hat{0} & -\tau_a \\ \tau_a & \hat{0} \end{pmatrix},$$

$$S_{ab} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{ab} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab}^{(1)} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \tau_a = (\varepsilon_{abc}\hat{S}_{bc}/2 - S_{4a})/2, \quad (258)$$

где  $\hat{1}$  и  $\hat{0}$  —  $4s$ -рядные единичная и нулевая матрицы;  $\hat{S}_{ab}$ ,  $\hat{S}_{4a}$  — матрицы из представления  $\mathcal{D}(s-1/2, 1/2)$  алгебры  $O(4)$ ;  $\hat{S}_{ab}^{(1)}$  и  $\hat{S}_{ab}^{(2)}$  — матрицы, реализующие представления  $\mathcal{D}(s)$  и  $\mathcal{D}(s-1)$  алгебры  $O(3)$  соответственно, получаем

$$\Psi'_{\varepsilon n s_3 p_3} = \begin{pmatrix} \Psi_{s_3} \\ \tilde{0} \\ \varepsilon\Psi_{s_3} \\ \tilde{0} \end{pmatrix} \Psi_{np_3}, \quad (259)$$

где  $\Psi_{s_3}$  —  $(2s+1)$ -компонентная собственная функция оператора  $S_{12}$ , который всегда можно выбрать в диагональной форме:

$$\Psi_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{s-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Psi_{-s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (260)$$

$\tilde{0}$  —  $(2s - 1)$ -рядные нулевые столбцы и

$$\Psi_{np_3} = \exp(ip_1x_1 + ip_3x_3) \exp\left[-\frac{H}{2}\left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)^2\right] H_n\left[\sqrt{H}\left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)\right], \quad (261)$$

$H_n$  — полиномы Эрмита. Явный вид собственных функций исходного гамильтониана (249) можно получить из (259)–(261) с помощью преобразования, обратного (251).

### Четырехкомпонентное уравнение для бесспиновых частиц

В работах [37, 45, 55] неоднократно подчеркивалось, что для однозначного ответа на вопрос, какую частицу описывает данное релятивистское уравнение, необходимо знать явный вид генераторов представления группы  $P(1, 3)$ , которое реализуется в пространстве его решений. Если на множестве решений заданного уравнения можно определить различные представления группы Пуанкаре, то такое уравнение в принципе пригодно для описания движения различных частиц.

В [45] показано, что обычное четырехкомпонентное уравнение Дирака с дополнительным пуанкаре-инвариантным условием в отсутствие взаимодействия можно интерпретировать как уравнение для частиц со спином  $s = 0$ . Однако хорошо известно, что после введения минимального взаимодействия это уравнение описывает движение частицы со спином  $s = 1/2$  во внешнем электромагнитном поле. Покажем, что взаимодействие можно ввести в уравнение Дирака таким образом, что оно будет допускать интерпретацию как уравнение для бесспиновой заряженной частицы во внешнем поле. Рассмотрим уравнение

$$[\gamma_\mu \pi^\mu - m + (1 + \gamma_4)iek\gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}/4m]\Psi = 0, \quad (262)$$

где  $\gamma_\mu$  — четырехрядные матрицы Дирака;  $\pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ ;  $A_\mu$  — 4-вектор-потенциал;  $F^{\mu\nu}$  — тензор напряженности электромагнитного поля;  $k$  — произвольная константа.

Уравнение (262) явно ковариантно и в случае  $k = 0$  совпадает с уравнением Дирака для электрона, взаимодействующего с внешним электромагнитным полем. Слагаемое  $(1 + \gamma_4)iek\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu}/2m$  можно интерпретировать как вклад от аномального взаимодействия типа Паули.

Покажем, что при  $k = 1$  уравнение (262) можно использовать для описания движения бесспиновой заряженной частицы. Для этого сначала умножим (262) на  $\gamma_0$  и получим уравнение в форме Шредингера

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi, \quad (263)$$

$$H = \gamma_0\gamma_a\pi_a + \gamma_0m + eA_0 - \gamma_0(1 + \gamma_4)ie\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}/4m.$$

Подвергая волновую функцию  $\Psi$  и гамильтониан  $H$  изометрическому преобразованию

$$\Psi \rightarrow \Psi' = V\Psi, \quad H \rightarrow H' = VHV^{-1} - iV^{-1}\partial V/\partial t, \quad (264)$$

$$V = \exp[(1 - \gamma_4)\gamma_a\pi_a/2m] = 1 + (1 - \gamma_4)\gamma_a\pi_a/2m,$$

получаем

$$H' = \gamma_0m + \gamma_0(1 + \gamma_4)\pi^2/2m + eA_0. \quad (265)$$

Выбрав матрицы  $\gamma_0$  и  $\gamma_4$  в виде

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad (266)$$

где  $\sigma_3$  и  $\sigma_1$  — двухрядные матрицы Паули, запишем гамильтониан  $H'$  в форме

$$H' = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \quad H_{\pm} = \sigma_3 m + (\sigma_3 \pm i\sigma_2) \frac{\pi^2}{2m} + eA_0. \quad (267)$$

Обозначив  $\Psi' = V\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$ , где  $\Psi_{\pm}$  — двухкомпонентные функции, получаем для  $\Psi_+$ ,  $\Psi_-$  два незацепляющихся уравнения:

$$\left[ \sigma_3 m + (\sigma_3 \pm i\sigma_2) \frac{\pi^2}{2m} + eA_0 \right] \Psi_{\pm} = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\pm}, \quad (268)$$

совпадающие с уравнениями ТСТ [49, 50] для бесспиновой заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Результат этот, который на первый взгляд кажется несколько неожиданным, на самом деле является следствием того, что уравнение (262) (где  $k = 1$ ) можно получить введением минимального взаимодействия в уравнение Дирака с пуанкаре-инвариантным дополнительным условием

$$W_{\mu} W^{\mu} \Psi = m^2 s(s+1) \Psi, \quad s = 0. \quad (269)$$

Таким образом, только уравнение движения совместно с дополнительным условием (269) позволяет однозначно определить спин и массу описываемой частицы.

Авторы благодарны С.П. Онуфрийчуку, В.А. Салогубу и Ю.Н. Сегеде за обсуждение результатов, вошедших в статью, и за помощь при оформлении работы.

1. Пуанкаре А., Избранные труды, Т. 3, М., Наука, 1974, С. 521.
2. Majorana E., *Nuovo cimento*, 1932, **9**, 335.
3. Corson E.M., *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations*, London, Blackie, 1953.
4. Bade W.L., Jehle H., *Revs. Mod. Phys.*, 1953, **25**, 714.
5. Гельфанд И.М., Минлос Р.В., Шапиро З.Я., *Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения*, М., Физматгиз, 1958.
6. Наймарк М.А., *Линейные представления группы Лоренца*, М., Физматгиз, 1958.
7. Corben H., *Classical and Quantum Theories of Spinning Particles*, San Francisco, Holden-Day, 1968.
8. Takahashi Y., *An Introduction to Field Quantization*, N.Y., Pergamon Press, 1969.
9. Fradkin D.M., Good R.H., *Revs. Mod. Phys.*, 1964, **33**, 343.
10. Hurley W.J., Sudarshan E.C.L., *Ann. Phys.*, 1974, **85**, 546.
11. Santhanam T.S., Tekumalla A.R., *Fortshkr. Phys.*, 1974, **22**, 431.
12. Hurley W.I., *Phys. Rev. D*, 1974, **10**, 1185.
13. Niederer U.H., Raifertaigh O., *Fortshkr. Phys.*, 1974, **22**, 131.
14. Joos H., *Fortschr. Phys.*, 1962, **10**, 65.
15. Weinberg S., *Phys. Rev.*, 1969, **181**, 1893.
16. Krajcic R.A., Nieto M.M., *Phys. Rev. D*, 1974, **10**, 4049; 1975, **11**, 1442; 1976, **13**, 2250.

17. Гинзбург В.Л., Манько В.И., *ЭЧАЯ*, 1976, **7**, вып. 1, 3.
18. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.
19. Wigner E., *Ann. Math.*, 1939, **40**, 39.
20. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 861; 1957, **33**, 1196.
21. Jonson K., Sudarshan E.C.L., *Ann. Phys.*, 1961, **13**, 126.
22. Velo G., Zwanzinger D., *Phys. Rev.*, 1969, **186**, 1337; 1969, **188**, 2218.
23. Tsai V., *Phys. Rev. D*, 1973, **7**, 1945.
24. Seetharaman M., Prabhakaran J., Mathews P.M., *Phys. Rev. D*, 1975, **12**, 458.
25. Wightman A.S., In: *Partial Differential Equations*. Ed. D.C. Spencer, V.23, Providence, 1974, P. 44.
26. Pereira J., *Intern. J. Theor. Phys.*, 1972, **5**, 447.
27. Schroer B., Seiler R., Swieca J.A., *Phys. Rev. D*, 1970, **2**, 2927.
28. Weaver D.L., Hammer C.L., Hood R.H., *Phys. Rev.*, 1964, **135**, 241.
29. Williams S.A., Driver I.P., Weber T.A., *Phys. Rev.*, 1966, **152**, 1207.
30. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1966, **143**, 978, 985.
31. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1967, **155**, 1415.
32. Mathews P.M., Ramankrishnan S., *Nuovo Cimento*, 1967, **50**, 339.
33. Seetharaman M., Jayaraman J., Mathews P.M., *J. Math. Phys.*, 1971, **12**, 1620.
34. Seetharaman M., Mathews P.M., *J. Math. Phys.*, 1972, **13**, 938.
35. Jayaraman J., *Nuovo Cimento A*, 1973, **14**, 343.
36. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., Nikitin A.G., Preprint ITF-70-89E, Kiev, 1970.
37. Фушич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, 192.
38. Никитин А.Г., *УФЖ*, 1973, **18**, 1605; 1974, **19**, 1000.
39. Fushchych W.I. Nikitin A.G., *Rep. Math. Phys.*, 1975, **8**, 33; Preprint ITF-73-121E, Kiev, 1973.
40. Фушич В.И., Никитин А.Г., Дифференциальные уравнения движения первого и второго порядка для частиц с произвольным спином, Киев, Изд-во ин-та мат. АН УССР, 1977.
41. Никитин А.Г., Фушич В.И., *ТМФ*, 1978, **34**, 319.
42. Kolsrud M., *Physica Norvegica*, 1971, **5**, 169.
43. Guertin R.F., *Ann. Phys.*, 1974, **88**, 504; 1975, **91**, 386.
44. Guertin R.F., Spin-1/2 Equation with Indefinite Metric, Preprint Rice University, Houston, 1975.
45. Fushchych W.I., *Nucl. Phys. B*, 1970, **21**, 321; *ТМФ*, 1971, **9**, 91.
46. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., *Lett. Nuovo Cimento*, 1970, **4**, 927; Preprint ITF-70-88E, Kiev, 1970.
47. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **7**, 439.
48. Никитин А.Г., Грищенко А.Л., *УФЖ*, 1974, **19**, 1666.
49. Тамм И.Е., *Докл. АН СССР*, 1940, **29**, 551.
50. Takelani M., Sakata S., *Proc. Phys. Math. Soc. (Japan)*, 1940, **22**, 757.
51. Nelson T.J., Good R.H., *Phys. Rev.*, 1969, **179**, 1445.
52. Simon M.T., *Lett. Nuovo Cimento*, 1971, **2**, 99.
53. Sahthanam T.S., Tekumalla A.R., *Lett. Nuovo Cimento*, 1972, **3**, 1060; 1973, **6**, 99.
54. Seetharaman M., Simon M.T., Mathews P.M., *Nuovo Cimento A*, 1972, **12**, 788.
55. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79; Препринт ИТФ-68-72, Киев, 1968.
56. Кривский И.Ю., Романко Г.Д., Фушич В.И., *ТМФ*, 1969, **1**, 242.
57. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, **14**, 436.

58. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Salogub V.A., *Lett. Nuovo Cimento*, 1975, **14**, 483; *Rep. Math. Phys.*, 1977, 385.
59. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1976, **16**, 81.
60. Bludman S.A., *Phys. Rev.*, 1957, **107**, 1163.
61. Lomont J.S., Moses H.E., *Phys. Rev.*, 1960, **118**, 337.
62. Dowker I.S., *Proc. Roy. Soc. A*, 1967, **293**, 351.
63. Newton T.D., Wigner E.P., *Revs. Mod. Phys.*, 1949, **21**, 400; см. также [69], с. 69.
64. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
65. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1974, **11**, 508.
66. Фушич В.И., *Докл. АН СССР*, 1976, **230**, 570.
67. Фушич В.И. В сб.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний, посвященном 60-летию акад. Ю.А. Митропольского, Киев, Наукова думка, 1977.
68. Фушич В.И., *ТМФ*, 1971, **7**, 3.
69. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963. С. 114.
70. Lomont I.S., *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 1710.
71. Moses H.E., *Nuovo Cimento Suppl.*, 1958, **7**, 1.
72. Garrido L.M., Oliver L., *Nuovo Cimento A*, 1967, **52**, 588.
73. Wightman A.S., In: *Symmetry Principles at High Energies*, Ed. A. Perlmutter e.a. N.Y., Benjamin, 1968.
74. James K.R., *Proc. Phys. Soc. (London)*, 1968, **1**, 334.
75. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., *Квантовая электродинамика*, М., Наука, 1969, С. 142.
76. Amundsen P.A., *Physika Norvegica*, 1975, **8**, 107.
77. Зайцев Г.А., *ЖЭТФ*, 1955, **28**, 524; *ДАН СССР*, 1957, **113**, 1248; Feynman R.P., Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 193.

# On the invariance groups of relativistic equations for the spinning particles interacting with external fields

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

All relativistic free-particle motion equations, including the Dirac and Kemmer–Duffin–Petiau (KDP) ones, are invariant under the Poincaré group  $P_{1,3}$ . But such a group does not exhaust symmetry of the relativistic equations. It has been shown in [1] with help of non-Lie method, that any Poincaré-invariant equation for a free particle with spin  $s \geq \frac{1}{2}$  has additional invariance under  $SU_2 \otimes SU_2$  group. The same invariance group is possessed by Maxwell equations [2].

It has been shown in [3, 4], that the free equations of KDP (for  $s = 1$ ) and of Rarita–Schwinger (for  $s = \frac{3}{2}$ ) have more extensive symmetry group than the group  $SU_2 \otimes SU_2$ . It follows from the results of these papers, that any relativistic equation for a free particle of spin  $s \geq 1$  possesses  $SU_3$  symmetry.

In this note, which is an extension of the paper [4], the invariance groups of the Dirac and KDP equations for the particles, interacting with an external field have been established.

**Theorem 1.** *The Dirac equation with the Pauli-type interaction*

$$L\Psi = 0, \quad L = \gamma_\mu \pi^\mu + \frac{i}{4m}(1 + i\gamma_4)\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} + m, \quad (1)$$

where

$$\pi_\mu = p_\mu - eA_\mu, \quad p_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

$A_\mu$  is the vector potential of electromagnetic field,  $F_{\mu\nu} = -i[\pi_\mu, \pi_\nu]_-$ , is invariant under the Lie algebra of the  $SU_2 \otimes SU_2$  group. This algebra basis elements  $Q_{\mu\nu}$  have the form

$$Q_{\mu\nu} = i\gamma_\mu \gamma_\nu + \frac{i}{m}(1 + i\gamma_4)(\gamma_\mu \pi_\nu - \gamma_\nu \pi_\mu). \quad (2)$$

Proof may be carried out in a way, which has been described in [4]. The theorem validity, i.e. that the operators  $Q_{\mu\nu}$  satisfy the invariance condition of eq.(1) [4]

$$[Q_{\mu\nu}, L]_- = \Gamma_{\mu\nu} L, \quad \Gamma_{\mu\nu} = \frac{i}{m}(\gamma_\mu \pi_\nu - \gamma_\nu \pi_\mu)$$

and the commutation relations

$$[Q_{\mu\nu}, Q_{\lambda\sigma}]_- = 2i(g_{\mu\lambda}Q_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}Q_{\mu\lambda} - g_{\mu\sigma}Q_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}Q_{\mu\sigma})$$

may be established by the direct verification. Putting in (1), (2)  $A_\mu = 0$ , one comes to the invariance algebra of the free Dirac equation, which has been obtained in [4].

**Theorem 2.** *The Dirac equation for a particle in a constant inhomogeneous magnetic field*

$$\pi_0\varphi = H\varphi, \quad H = \gamma_0\gamma_\alpha\pi_\alpha + \gamma_0m, \quad (3)$$

where

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_3 = p_3, \quad \pi_1 = p_1 - eA_1(x_1, x_2), \quad \pi_2 = p_2 - eA_2(x_1, x_2)$$

is invariant under the Lie algebra of  $SU_2 \otimes SU_2$  group. The basis elements  $\Sigma_{kl}$  of this algebra have the form

$$\Sigma_{12} = \frac{i\gamma_3\gamma_0\gamma_\alpha\pi_\alpha}{|\gamma_0\gamma_\alpha\pi_\alpha|}, \quad \Sigma_{31} = \frac{i\gamma_4(\gamma_3m + p_3)}{(p_3^2 + m^2)^{1/2}}, \quad (4)$$

$$\Sigma_{23} = i\Sigma_{12}\Sigma_{31}, \quad \Sigma_{4a} = \frac{H}{|H|}\Sigma_{bc}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (a, b, c) \text{ is cykl } (1, 2, 3).$$

**Proof.** Let us use the canonical transformation method. Passing to the new wave function  $\Psi'$ :

$$\Psi \rightarrow \Psi' = W\Psi, \quad H \rightarrow H' = WHW^{-1}, \quad (5)$$

where

$$W = V_1V_2V_3, \quad V_1 = \frac{\mathcal{E} + q_3 + i\gamma_1\gamma_2\gamma_0\gamma_\alpha\pi_\alpha}{\sqrt{2\mathcal{E}(\mathcal{E} + q_3)}}, \quad \mathcal{E} = (m^2 + \pi^2 - i\gamma_1\gamma_2\mathcal{H})^{1/2},$$

$$\pi^2 = \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2, \quad q_3 = (m^2 + p_3^2)^{1/2}, \quad \mathcal{H} = -i[\pi_1, \pi_2]_-,$$

$$V_2 = V_2^{-1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + i\gamma_3\gamma_4 + (1 - i\gamma_3\gamma_4) \frac{\gamma_0\gamma_\alpha\pi_\alpha}{|\gamma_0\gamma_\alpha\pi_\alpha|} \right],$$

$$V_3 = (V_3^{-1})^\dagger = (m + q_3 + \gamma_3p_3)[2q_3(q_3 + m)]^{-1/2}$$

one obtains the equation

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi' = i\gamma_1\gamma_2(m^2 + \pi^2 - i\gamma_1\gamma_2\mathcal{H})^{1/2}\Psi'. \quad (6)$$

Equation (6) is obviously invariant under the transformations  $\Psi' \rightarrow \Sigma'_{kl}\Psi'$ , where

$$\Sigma'_{12} = \frac{i}{2}\gamma_3, \quad \Sigma'_{31} = \frac{i}{2}\gamma_4, \quad \Sigma'_{23} = \frac{i}{2}\gamma_4\gamma_3, \quad \Sigma'_{4a} = \frac{i}{2}\gamma_1\gamma_2\Sigma_{bc}. \quad (7)$$

Operators (7) satisfy commutation relations of the Lie algebra of the  $O_4 \sim SU_2 \otimes SU_2$  group. The exact form (4) of these operators in the initial  $\Psi$ -representation one obtains by the inverse transformation,  $\Sigma_{kl} = W^{-1}\Sigma'_{kl}W$ . The theorem is proved.

**Remark 1.** An analogous theorem takes place also for the Dirac equation, which describes the particle in alternating the electric field with the fixed direction (say, in a field, which is directed along the third co-ordinate axis). Such an equation may be written in the form (3), where

$$\pi_0 = p_0 - eA_0(t, x_3), \quad \pi_1 = p_1, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3 - eA_3(t, x_3). \quad (8)$$

The exact form of the  $SU_2 \times SU_2$ -group generators is given by the following formulae:

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}_{12} &= \frac{i\gamma_2\gamma_1\gamma_\lambda\pi^\lambda}{|\gamma_1\gamma_\lambda\pi^\lambda|}, & \tilde{\Sigma}_{31} &= \frac{i\gamma_4(\gamma_2m + p_2)}{(p_2^2 + m^2)^{1/2}}, & \lambda &= 0, 3, \\ \tilde{\Sigma}_{32} &= i\tilde{\Sigma}_{12}\tilde{\Sigma}_{31}, & \tilde{\Sigma}_{4a} &= \frac{i\gamma_1(\gamma_\lambda\pi^\lambda - \gamma_2\pi_2 - m)}{|i\gamma_1(\gamma_\lambda\pi^\lambda - \gamma_2\pi_2 - m)|}\tilde{\Sigma}_{bc}.\end{aligned}$$

These operators as like as (4) ones, are integrodifferential operators, in contrast with (2), where  $Q_{\mu\nu}$  are differential ones.

Let us consider the KDP equation for a particle of spin  $s = 1$  charge  $e$  and the anomalous magnetic moment  $k$ , which interacts with the constant homogeneous magnetic field  $\mathcal{H}$

$$\left(\beta_\mu\pi^\mu + m + \frac{ek}{4m}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)\Psi = 0, \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned}\pi_0 &= p_0, & \pi_1 &= p_1 - e\mathcal{H}x_2, & \pi_2 &= p_2, & \pi_3 &= p_3, \\ S_{\mu\nu} &= i(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu), & S_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2S_{12}\mathcal{H}.\end{aligned} \quad (10)$$

**Theorem 3.** Equation (9) and (10) have six independent constants of motion  $Q_A$  which form the Klein group. If  $k = 1$ , eqs.(9) and (10) are invariant under ten-dimensional Lie algebra  $A_{10}$ , which contains subalgebra  $O_4$ .

**Proof.** Let us reduce eqs.(9) and (10) to the canonical diagonal form, for which the theorem statements become obvious. Multiplying (9) from the left by

$$\tilde{V}_1 = \exp\left[i\frac{S_{5\lambda}p^\lambda}{p_5}\frac{\pi}{2}\right], \quad \lambda = 0, 3, \quad p_5 = (p_0^2 - p_3^2)^{1/2}, \quad (11)$$

gives the equation

$$(i\beta_5p_5 - \beta_\alpha\pi_\alpha + k\omega S_{12} + m)\Psi' = 0, \quad \Psi' = \tilde{V}_1\Psi, \quad \omega = \frac{e\mathcal{H}}{2m}. \quad (12)$$

This equation may be written in the equivalent form

$$\begin{aligned}p_5\Psi' &= \left[S_{5\alpha}\pi_\alpha + i\beta_5\hat{M} - \hat{M}^{-1}\beta_\alpha\pi_\alpha\beta_5\left(\beta_\alpha\pi_\alpha - \hat{M}\right)\right]\Psi', \\ (1 + \beta_5^2)\left(\beta_\alpha\pi_\alpha + \hat{M}\right)\Psi' &= 0, \quad \hat{M} = m + k\omega S_{12}, \quad |k\omega| \neq m.\end{aligned} \quad (13)$$

With the help of the transformation  $\Psi' \rightarrow \Phi = \tilde{V}_2\tilde{V}_3\Psi'$ , where

$$\tilde{V}_2 = \exp\left[-\hat{M}^{-1}\beta_\alpha\pi_\alpha\beta_5^2\right] = 1 - \hat{M}^{-1}\beta_\alpha\pi_\alpha\beta_5^2,$$

$$\tilde{V}_3 = 1 + \beta_5^2\left(1 + \frac{E + \hat{H}\varkappa}{\sqrt{E(2E + [\hat{H}, \varkappa]_+)}}\right), \quad (14)$$

$$\tilde{V}_3^{-1} = 1 + \beta_5^2\left(1 + \frac{E + \varkappa\hat{H}}{\sqrt{E(2E + [\hat{H}, \varkappa]_+)}}\right),$$

$$\begin{aligned}\hat{H} &= i\beta_5 (\beta_\alpha \pi_\alpha M^{-1} \beta_\alpha \pi_\alpha - M), & M &= m + \omega S_{12}, \\ E = |\hat{H}| &= \sqrt{\hat{H}^2}, & \varkappa &= S_{12} + i\beta_5 (1 - S_{12}^2), & |\omega| &\neq m,\end{aligned}$$

one reduces eq.(13) to the diagonal form

$$\begin{aligned}p_5 \Phi &= H^c \Phi, & H^c &= S_{12} (m^2 + \pi_\alpha^2 - 2\omega S_{12} + \omega^2)^{1/2} + \\ &+ i\beta_5 S_{12} (k-1)\omega + i\beta_5 (1 - S_{12}^2) \left( m^2 + \frac{m^2 \pi_\alpha^2 + 2k^2 \omega^2}{m^2 - k^2 \omega^2} \right)^{1/2}, & (15) \\ (1 + \beta_5^2) \Phi &= 0, & \pi_\alpha^2 &= \pi_1^2 + \pi_2^2.\end{aligned}$$

Equations (15) are obviously invariant with respect to transformations  $\Phi \rightarrow Q_A \Phi$ , where  $Q_A$  are arbitrary matrices, which commute with  $\beta_5$  and  $S_{12}$ . The complete set of such matrices may be chosen in the form

$$\begin{aligned}Q'_1 &= i\beta_5 (1 + S_{12} + S_{12}^2), & Q'_2 &= i\beta_5 (1 - S_{12} - S_{12}^2), \\ Q'_3 &= i\beta_5 (1 - 2S_{12}^2), & Q'_{3+a} &= i\beta_5 Q'_a, & a &= 1, 2, 3.\end{aligned} \quad (16)$$

The operators (16) obey the relations

$$\begin{aligned}[Q'_A, Q'_B]_- &= 0, & (Q'_A)^2 \Phi &= \Phi, & Q'_a Q'_b &= Q'_c, \\ Q'_{3+a} Q'_{3+b} &= Q'_c, & Q'_{3+a} Q'_b &= Q'_{3+c}, & a \neq b \neq c \neq a,\end{aligned}$$

i.e. form the six-dimensional Klein group.

If  $k = 1$ , there exist ten linearly independent matrices, which commute with  $H^c$  and  $\beta_5$ . These matrices may be chosen in the form

$$\begin{aligned}N'_{12} &= (1 - 2\beta_5^2) S_{12}^2 \beta_5^2, & N'_{31} &= i\beta_5 S_{12}^2, & N'_{32} &= iN'_{31} N'_{12}, \\ N'_{4a} &= i\beta_5 S_{12} N'_{bc}, & B'_1 &= i\beta_5 (1 - S_{12}^2), & B'_{1+a} &= Q'_{3+a}.\end{aligned}$$

Operators  $B'_k$  commute with  $B'_{k'}$  and with  $N'_{k'l}$ , and the operators  $N'_{kl}$  form the representation  $D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2}) \oplus 6D(0, 0)$  of the Lie algebra of the group  $SU_2 \otimes SU_2$ . The exact form of the operators  $Q_A$ ,  $N_{kl}$ ,  $N_k$  in the original  $\Psi$ -representation may be obtained by the formulae

$$Q_A = \tilde{W}^{-1} Q_A \tilde{W}, \quad N_{kl} = \tilde{W}^{-1} N'_{kl} \tilde{W}, \quad B_k = \tilde{W}^{-1} B'_k \tilde{W}, \quad (17)$$

where  $\tilde{W} = \tilde{V}_1 \tilde{V}_2 \tilde{V}_3$  and  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3$  given in (11), (14). The theorem is proved.

**Remark 2.** The analogous theorem may be proved for the KDP equation, which describes the motion of a charged particle with anomalous moment in a constant homogeneous electric field  $E$ . Such an equation has the form (9), where

$$\pi_0 = p_0 - E x_3, \quad \pi_1 = p_1, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3, \quad S_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -2E S_{03}.$$

Let us consider the equation for a particle with an arbitrary spin [5]

$$H_s \Psi(t, \mathbf{x}) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{x}), \quad (18)$$

where  $\Psi(t, \mathbf{x})$  is a  $2(2s + 1)$ -component wave function,

$$H_s = \sigma_1 m + \sigma_3 p \sum_{\nu=-s}^s (-1)^{[\nu]} \Lambda_\nu + (1 + \sigma_1) \varphi(t, \mathbf{x}), \quad (19)$$

$$\Lambda_\nu = \prod_{\mu \neq \nu} \left( \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p} - \nu \right) (\mu - \nu)^{-1}, \quad p = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2},$$

$S_a$  are generators of the direct sum  $D(s) \oplus D(s)$  of the irreducible representation of the  $SU_2$  group,  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  are  $2(2s + 1) \times 2(2s + 1)$ -dimensional Pauli matrices, commuting with  $S_a$ ,  $\varphi(t, \mathbf{x})$  is an arbitrary potential. If  $\varphi(t, \mathbf{x}) = 0$  eq.(18) coincides with the one obtained in [5] and describes a free motion of a relativistic spin- $s$  particle.

**Theorem 4.** Equation (18) is invariant under  $SU_2$  algebra. The basis elements of this algebra have the form

$$\Sigma_a = O_{bc} = \sigma_1 S_a + (1 - \sigma_1) p_a \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} p^{-2}. \quad (20)$$

**Proof.** Using the transformation

$$H_s \rightarrow V H_s V^{-1} = \sigma_1 m + \sigma_3 p + (1 + \sigma_1) \varphi(t, \mathbf{x}),$$

$$\Sigma_a \rightarrow V \Sigma_a V^{-1} = S_a, \quad V = V^{-1} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sigma_1 + (1 - \sigma_1) \sum_{\nu=-s}^s (-1)^{[\nu]} \Lambda_\nu \right],$$

one reduces the Hamiltonian (19) and the operators (20) to such a form, that the theorem statements become obvious.

For  $s = \frac{1}{2}$  eq.(18) coincides with the Dirac equation with a semirelativistic potential  $(1 + \sigma_1) \varphi \equiv (1 + \gamma_0) \varphi$ . The  $SU_2$ -invariance of such equation has been established in [6].

**Theorem 5.** The Tamm-Sakata-Taketani equation with a semirelativistic potential

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[ \sigma_1 \left( m + \frac{p^2}{2m} \right) + i \sigma_3 \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m} \right) + (1 + \sigma_1) \varphi(t, \mathbf{x}) \right] \Psi, \quad (21)$$

is invariant under the Lie algebra of the  $SU_2$  group. The basis elements  $\lambda_A$  of this algebra have the form

$$\lambda_a = [O_{ab}, O_{ac}]_+, \quad \lambda_{3+a} = O_{bc}, \quad \lambda_7 = i(O_{23} O_{31} O_{12} - O_{12} O_{23} O_{31}),$$

$$\lambda_8 = -\frac{i}{\sqrt{3}} (O_{12} O_{23} O_{31} + O_{23} O_{31} O_{12} - 2O_{31} O_{12} O_{23}),$$

where  $O_{ab}$  are given in (20).

We do not give the proof here. The analogous theorem may be formulated for the KDP equation with the potential  $\beta_0(1 + \beta_0) \varphi(t, \mathbf{x})$ .

In conclusion we note that the obtained invariance algebras may be used for deriving of new solutions of the equations considered above, if certain partial solution of these equations is known.

1. Fushchych W.I., *Teor. Mat Fiz.*, 1971, **7**, 3 (in Russian); *Theor. Math. Phys.*, 1971, **7**, 323 (in English); Preprint of Institute of Theoretical Physics ITP-70-32, Kiev, 1970.
2. Fushchych W.I., *Lett. Nuovo Cimento*, 1973, **6**, 133; 1974, **11**, 508.
3. Nikitin A.G., Segeda Yu.N., Fushchych W.I., *Teor. Mat Fiz.*, 1976, **29**, 82 (in Russian); *Theor. Math. Phys.*, 1976, **29**, 943 (in English).
4. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, **19**, 347.
5. Fushchych W.I., Grishchenko A.L., Nikitin A.G., *Teor. Mat Fiz.*, 1971, **8**, 192 (in Russian); *Theor. Math. Phys.*, 1971, **8**, 766 (in English); Preprint ITP-70-89E, Kiev, 1970 (in English); Guertin R.F., *Ann. Phys.*, 1974, **88**, 504.
6. Smith G.B., Tassie L.I., *Ann. Phys.*, 1971, **65**, 352;  
Bell I.S., Ruegg H., *Nucl. Phys. B*, 1975, **98**, 151;  
Melnikoff M., Zimmerman A.H., *Lett. Nuovo Cimento*, 1977, **19**, 174.

# Conformal invariance of relativistic equations for arbitrary spin particles

W.I. FUSHCHYCH, A.G. NIKITIN

We show that any Poincaré-invariant equation for particles of zero mass and of discrete spin provide a unitary representation of the conformal group, and find an explicit expression of the conformal group generators in terms of Poincaré group generators.

It is well-known that the relativistic equations for massless particles are invariant under the conformal transformations. This was first established for the Maxwell equations [1] and then for the equations describing the massless particles of spin  $1/2$  [2] and of any spin [3].

L. Gross [4] has demonstrated that the solutions of the Maxwell and of the Rarita-Schwinger (with mass  $m = 0$ ) equations provide a unitary representation of the conformal group  $C_4$ . The proof given in [4] is rather tedious and in some sense non-constructive, since it does not give an algorithm to obtain an explicit form of Hermitian generators of the group  $C_4$  for any conformal invariant equation.

In this note, we shall formulate a theorem, which generalizes the results [1–4] and give a simple and constructive proof of it. Without restricting ourselves by any concrete form of equations for massless particles we show that any (generally speaking, reducible) representation of the Lie algebra of Poincaré group  $P(1,3)$ , which corresponds to zero mass and discrete spin, can be extended to provide a representation of the conformal group Lie algebra, and find the explicit expression of the generators of the group  $C_4$  through the generators of its subgroup  $P(1,3)$ .

**Theorem 1.** *Any Poincaré-invariant equation for particles of zero mass and of discrete spin is invariant under the conformal algebra  $C_4$ <sup>1</sup>, basis elements of which are given by the operators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  and*

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}[P_0 P_a / P^2, J_{0a}]_+, \quad a, b = 1, 2, 3, \\ K_0 &= \frac{1}{2}[P_0 / P^2, J_{0a} J_{0a} + \Lambda^2 - (1/2)]_+, \\ K_a &= \frac{1}{2}([P_0 / P^2, [J_{0b}, J_{ab}]_+]_+ - [P_a / P^2, J_{0b} J_{0b} + \Lambda^2 - (1/2)]_+), \end{aligned} \quad (1)$$

where  $P_\mu$  and  $J_{\mu\nu}$  are the basis elements of the Poincaré algebra  $P(1,3)$ ,  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $\Lambda = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc} J_{ab} P_c P_0^{-1}$ ;  $P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$ ;  $[A, B]_+ = AB + BA$  and  $D$ ,  $K_\mu$  are the operators, which extend the algebra  $P(1,3)$  to the algebra  $C_4$ .

**Proof.** Inasmuch as the operators  $P_\mu$  and  $J_{\mu\nu}$  satisfy, by definition, the algebra

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu]_- &= 0, \quad [J_{\mu\nu}, P_\lambda]_- = i(g_{\nu\lambda} P_\mu - g_{\mu\lambda} P_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]_- &= i(g_{\nu\lambda} J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\lambda}) \end{aligned} \quad (2)$$

Letters in Mathematical Physics, 1978, 2, P. 471–475.

<sup>1</sup>We use the same notation for the groups and for the corresponding Lie algebras.

the theorem proof is reduced to the verification of the correctness of the following commutation relations

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, K_\lambda]_- &= i(g_{\nu\lambda}K_\mu - g_{\mu\lambda}K_\nu), & [K_\mu, P_\nu]_- &= 2i(g_{\mu\nu}D - J_{\mu\nu}), \\ [D, P_\mu]_- &= iP_\mu, & [D, K_\mu]_- &= -iK_\mu, & [K_\mu, K_\nu]_- &= 0, & [J_{\mu\nu}, D]_- &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

which determine together with (2) the algebra  $C_4$  (see e.g. [5]). It is not difficult to realize such a verification, bearing in mind that, on the set of the solutions of any relativistic equation for a particle of zero mass and of discrete spin, the following relations are satisfied:

$$P_\mu P^\mu = 0, \quad W_\mu W^\mu = 0, \quad W_\mu = \Lambda P_\mu,$$

where  $W_\mu$  is the Lubanski–Pauli vector

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J_{\nu\rho}P_\sigma.$$

So the formulas (1) determine the explicit form of the conformal group generators by the given generators  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  of the group  $P(1, 3)$ . Let us note that the generators  $K_\mu$  and  $D$  are written in a transparently Hermitian form, from which follows that they generate together with  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  the unitary representation of the conformal group. The theorem is proved.

Let us demonstrate the constructive character of Theorem 1 by some examples. First consider the Weyl equation

$$\sigma_\mu p^\mu \varphi(x_0, \vec{x}) = 0, \quad p_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \quad (4)$$

On the set of solutions of equation (4) the Poincaré group generators have the form

$$\begin{aligned} P_0 &= \sigma_a p_a, & P_a &= p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \\ J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + \frac{i}{4}[\sigma_a, \sigma_b]_-, & J_{0a} &= x_0 p_a - \frac{1}{2}[x_a, P_0]_+, \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\sigma_a$  are the Pauli matrices. Substituting (5) into (1), one obtains the remaining generators of the conformal group in the form

$$D = \frac{1}{2}[x_\mu, P^\mu]_+, \quad K_\mu = -[J_{\mu\nu}, x^\nu]_+ + \frac{1}{2}[P_\mu, x_\nu x^\nu]_+. \quad (6)$$

On the set of solutions of Equation (4), the generators (5) and (6) may be written also in the usual differential form (see e.g. [5])

$$\begin{aligned} P_\mu &= p_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, & D &= x_\mu p^\mu + \frac{3}{2}i, \\ J_{\mu\nu} &= x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + \frac{i}{4}[\sigma_\mu, \sigma_\nu]_-, & K_\nu &= 2x_\nu D - x_\mu x^\mu p_\nu - \frac{1}{2}x^\mu [\sigma_\mu, \sigma_\nu]_-, \end{aligned}$$

which however is not manifestly Hermitian.

Taking  $P_\mu, J_{\mu\nu}$  in the Foldy–Shirokov form [6]

$$\begin{aligned} P_0 = p &= (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}, & P_a &= p_a, \\ J_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, & J_{0a} &= x_0 p_a - \frac{1}{2p} [x_a, P_0]_+ - (S_{ab} p_b / p), \end{aligned} \quad (7)$$

we obtain from (1)

$$D = \frac{1}{2} [x_\mu, P^\mu]_+, \quad K_\mu = -[J_{\mu\nu}, X^\nu]_+ + \frac{1}{2} \left[ P_\mu, X_\nu X^\nu + \frac{1}{2p} \left( \Lambda^2 + \frac{1}{4} \right) \right]_+, \quad (8)$$

where

$$X_0 = x_0, \quad X_a = x_a + (S_{ab} p_b) / p^2.$$

Using (1), it is not difficult to be convinced that (8) is a universal form of the generators  $K_\mu, D$  for any representation of the conformal group, in which  $P_a$  and  $J_{ab}$  have the structure (7).

Lastly, if  $P_\mu$  and  $J_{\mu\nu}$  are the generators of the irreducible representation of the Poincaré group in Lomont–Moses form [7], then the formulas (1) give the conformal group generators in the form of Bose and Parker [8].

In connection with the above results, the following question arises naturally: Do there exist Poincaré invariant equations, for particles with nonzero mass, which would be invariant under the conformal group? A positive answer to this question may be given only for equations describing particles with variable mass. As an example, one may consider the relativistic equations with proper time, conformal invariance of which has been established in [9].

It has been proposed in [10] to use the group of rotations and translations in five-dimensional Minkowski space for the description of physical systems with variable mass and spin. This group, which will be further denoted by the symbol  $P(1,4)$ , contains as subgroups both the Poincaré group  $P(1,3)$  and the Galilei group  $G(3)$ .

The main property of  $P(1,4)$ -invariant equations is that they are constant also under the conformal algebra  $C_4$ . More precisely, the following statement is valid:

**Theorem 2.** *Any  $P(1,4)$ -invariant equation is invariant under the Lie algebra of the group  $SO(1,5)$ .*

**Proof.** Using the method proposed in [11], we consider the operator

$$J_{\mu 5} = \frac{1}{2} (P_\mu P^\mu)^{-1/2} (P^\nu J_{\mu\nu} + J_{\mu\nu} P^\nu), \quad P_\mu P^\mu \neq 0,$$

where  $P_\mu$  and  $J_{\mu\nu}$  are the generators of the group  $P(1,4)$ ,  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$ . The set of the operators  $J_{\mu\nu}$  and  $J_{\mu 5}$  satisfy the commutation relations of the Lie algebra of the group  $SO(1,5)$  (which is locally isomorphic to the Euclidean conformal group)

$$\begin{aligned} [J_{\mu 5}, J_{\nu 5}]_- &= i J_{\mu\nu}, & [J_{\mu 5}, J_{\nu\lambda}]_- &= i (g_{\mu\nu} J_{\lambda 5} - g_{\mu\lambda} J_{\nu 5}), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]_- &= i (g_{\nu\lambda} J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\lambda}). \end{aligned}$$

In the case in which the Casimir operator  $P_\mu P^\mu = 0$ , the proof is reduced to that of Theorem 1.

1. Bateman H., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **7**, 70; 1910, **8**, 223, 469.  
Cunningham E., *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77.
2. Dirac P.A.M., *Ann. Math.*, 1936, **37**, 429.
3. McLennan A., *Nuovo Cim.*, 1956, **3**, 1360.  
Lomont J.S., *Nuovo Cim.*, 1961, **22**, 673.
4. Gross L., *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 687.
5. Flato M., Simon J., Sternheimer D., *Ann. Phys.*, 1970, **61**, 78.  
Mack G., Salam Abdus, *Ann. Phys.*, 1969, **53**, 174.
6. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.  
Shirokov Yu.M., *Soviet J. JETP*, 1957, **33**, 861.
7. Lomont J.S., Moses H.E., *J. Math. Phys.*, 1962, **3**, 405.
8. Bose S.K., Parker R., *J. Math. Phys.*, 1969, **10**, 862.
9. Fushchych W.I., Segeda Yu.N., *Soviet J. Ukrainian Math. J.*, 1976, **28**, 844.
10. Fushchych W.I., Krivsky I.Yu., *Nucl. Phys. B*, 1968, **7**, 79; 1969, **14**, 573; *Soviet. J. Theor. Math. Phys.*, 1970, **3**, 360.
11. Fushchych W.I., *Soviet J. Theor. Math. Phys.*, 1971, **1**, 3.

# Групповые свойства уравнений Максвелла

В.И. ФУЩИЧ, А.Г. НИКИТИН

A theorem on the invariance of the system of Maxwell's equations under the 23-dimensional Lie algebra, containing as subalgebras 15-dimensional conformal algebra and 8-dimensional Lie algebra of the group  $U(2) \otimes U(2)$  has been proved. An 8-parameter family of transformations acting on  $E$  and  $H$  which generate group  $U(2) \otimes U(2)$  is found in explicit form. It is established that every Poincaré-invariant equation of motion for mass-zero particle is invariant under the conformal group.

## Введение

В работе [1] сформулированы основные идеи нелиевского метода исследования групповых свойств дифференциальных уравнений. В данной статье мы применяем этот метод для нахождения новых групп инвариантности уравнений Максвелла.

Исследование симметрии уравнений Максвелла имеет долгую и славную историю (см. [1]). В связи с этим важно отметить, что нелиевский подход позволяет получить новые результаты даже для таких хорошо изученных уравнений.

Структура статьи такова. В первом параграфе обсуждается конформная инвариантность уравнений Максвелла и приводится в явном виде закон преобразований векторов напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей под действием конформной группы. Во втором и третьем параграфах дано простое доказательство того, что такие преобразования являются унитарными в соответствующем гильбертовом пространстве. Доказан аналогичный результат и для произвольного пуанкаре-инвариантного уравнения, описывающего свободное движение частицы с нулевой массой и дискретным спином.

Основной результат статьи содержится в параграфах 4, 5 и 6, где установлена инвариантность уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме относительно восьмипараметрических непрерывных преобразований:

$$\begin{aligned} \vec{E} \rightarrow \vec{E}' &= \vec{f} \left( \vec{E}, \vec{H}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial x_a}, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x_a \partial x_b}, \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x_a \partial x_b}, \dots \right), \\ \vec{H} \rightarrow \vec{H}' &= \vec{g} \left( \vec{E}, \vec{H}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial x_a}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial x_a}, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x_a \partial x_b}, \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x_a \partial x_b}, \dots \right), \end{aligned} \quad (0)$$

где вектор-функции  $\vec{f}$  и  $\vec{g}$  зависят в общем случае как от  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , так и от бесконечного числа производных от векторов напряженности полей. Это означает, что преобразования (0), вообще говоря, нелокальны. Совокупность найденных преобразований вида (0) образует компактную группу, содержащую, в частности, однопараметрическую подгруппу локальных преобразований Хевисайда–Лармора–Райнича (ХЛР) (см. [4–6]).

В § 6 доказана инвариантность уравнений Максвелла относительно 23-мерной алгебры Ли, содержащей в качестве подалгебр 15-мерную конформную алгебру и

8-мерную алгебру Ли группы  $U(2) \otimes U(2)$ . Этот результат можно рассматривать как объединение результатов [2–6] и [17].

В последнем параграфе установлена инвариантность уравнений Максвелла относительно 10-параметрических преобразований, при которых изменяются пространственные координаты  $x_1, x_2, x_3$ , но временная координата  $x_0$  остается инвариантной. При этом не сохраняется квадратичная форма

$$S(x^2) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2,$$

хотя решения уравнения преобразуются по представлению группы Пуанкаре.

### § 1. Инвариантность уравнений Максвелла относительно конформной группы

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме имеют вид

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1a)$$

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{H} = 0, \quad (16)$$

где  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  — векторы напряженности соответственно электрического и магнитного полей.

Уравнения (1) инвариантны относительно конформной группы. Конформную группу образуют преобразования координат  $x_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , и времени  $x_0 = t$  следующего вида:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \frac{\vec{\theta}(\vec{\theta} \cdot \vec{x})}{\theta^2}(\cos \theta - 1) + \frac{\vec{\theta} \cdot \vec{x}}{\theta} \sin \theta - \vec{a}, \quad (2a)$$

$$x_0 \rightarrow x'_0 = x_0 - b,$$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}'' = \vec{x} + \frac{\vec{\lambda}(\vec{\lambda} \cdot \vec{x})}{\lambda^2}(\text{ch } \lambda - 1) + \frac{\lambda_a}{\lambda} x_0 \text{ sh } \lambda - \vec{a}, \quad (26)$$

$$x_0 \rightarrow x''_0 = x_0 \text{ ch } \lambda + \frac{\vec{x} \cdot \vec{\lambda}}{\lambda} \text{ sh } \lambda - b,$$

$$x_\mu \rightarrow x'''_\mu = e^c x_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (2b)$$

$$x_\mu \rightarrow x^{IV}_\mu = \frac{x_\mu - d_\mu x_\nu x^\nu}{1 - 2d_\nu x^\nu + d_\lambda d^\lambda x_\nu x^\nu}, \quad (2g)$$

где

$$\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}, \quad \lambda = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{1/2},$$

$$x_\nu x^\nu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad d_\lambda d^\lambda = d_0^2 - d_1^2 - d_2^2 - d_3^2,$$

$\theta_a, \lambda_a, a_a, b, c, d_a$  — произвольные действительные параметры,  $a = 1, 2, 3$ .

Преобразования (2a), (26) оставляют инвариантной квадратичную форму

$$\begin{aligned} (x_{1\mu} - x_{2\mu})(x_1^\mu - x_2^\mu) &= (x'_{1\mu} - x'_{2\mu})(x_1'^\mu - x_2'^\mu) = \\ &= (x''_{1\mu} - x''_{2\mu})(x_1''^\mu - x_2''^\mu) = inv \end{aligned} \quad (3)$$

и называются неоднородными преобразованиями Лоренца. Формулы (2в), (2г) задают собственно конформные преобразования.

Инвариантность уравнений (1) относительно конформной группы означает, что преобразованиям (2) можно однозначно сопоставить такие преобразования векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}', \quad \vec{H} \rightarrow \vec{H}', \quad (4)$$

которые образуют представление конформной группы; при этом  $\vec{E}'$  и  $\vec{H}'$  удовлетворяют исходному уравнению (1).

Проблеме конформной симметрии уравнений Максвелла посвящено большое количество работ. Однако насколько нам известно явный вид всех преобразований (4), образующих конформную группу, нигде не приведен. Мы покажем ниже, что эти преобразования могут быть записаны в виде

$$\vec{E}(x) \rightarrow \vec{E}'(x) = \vec{E}(x') + \frac{\vec{\theta}(\vec{\theta} \cdot \vec{E}(x'))}{\theta^2}(\cos \theta - 1) - \frac{\vec{\theta} \times \vec{E}(x')}{\theta} \sin \theta, \quad (5а)$$

$$\vec{H}(x) \rightarrow \vec{H}'(x) = \vec{H}(x') + \frac{\vec{\theta}(\vec{\theta} \cdot \vec{H}(x'))}{\theta^2}(\cos \theta - 1) - \frac{\vec{\theta} \times \vec{H}(x')}{\theta} \sin \theta,$$

$$\vec{E}(x) \rightarrow \vec{E}''(x) = \vec{E}(x'') + \frac{\vec{\lambda}(\vec{\lambda} \cdot \vec{E}(x''))}{\lambda^2}(1 - \text{ch } \lambda) - \frac{\vec{\lambda} \times \vec{H}(x'')}{\lambda} \text{sh } \lambda, \quad (5б)$$

$$\vec{H}(x) \rightarrow \vec{H}''(x) = \vec{H}(x'') + \frac{\vec{\lambda}(\vec{\lambda} \cdot \vec{H}(x''))}{\lambda^2}(1 - \text{ch } \lambda) + \frac{\vec{\lambda} \times \vec{E}(x'')}{\lambda} \text{sh } \lambda,$$

$$\vec{E}(x) \rightarrow \vec{E}'''(x) = \vec{E}(x'''), \quad \vec{H}(x) \rightarrow \vec{H}'''(x) = \vec{H}(x'''), \quad (5в)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) \rightarrow \vec{E}^{IV}(x) &= \vec{E}(x^{IV})(1 + \exp(-4d_\mu x^\mu)) + \\ &+ \frac{\vec{\eta}\{\vec{\eta} \cdot [-i\vec{H}(x^{IV}) + \vec{E}(x^{IV})]\}}{\eta^2}(1 - \cos \eta) - \frac{\vec{\eta} \times [\vec{E}(x^{IV}) - i\vec{H}(x^{IV})]}{\eta} \sin \eta + \\ &+ \frac{\vec{\xi}\{\vec{\xi} \cdot [\vec{E}(x^{IV}) - i\vec{H}(x^{IV})]\}}{\xi^2}(1 - \cos \xi) - \frac{\vec{\xi} \times [\vec{E}(x^{IV}) - i\vec{H}(x^{IV})]}{\xi} \sin \xi, \end{aligned} \quad (5г)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(x) \rightarrow \vec{H}^{IV}(x) &= \vec{H}(x^{IV})(1 + \exp(-4d_\mu x^\mu)) + \\ &+ \frac{\vec{\eta}\{\vec{\eta} \cdot [\vec{H}(x^{IV}) + i\vec{E}(x^{IV})]\}}{\eta^2}(1 - \cos \eta) - \frac{\vec{\eta} \times [\vec{H}(x^{IV}) + i\vec{E}(x^{IV})]}{\eta} \sin \eta + \\ &+ \frac{\vec{\xi}\{\vec{\xi} \cdot [\vec{H}(x^{IV}) - i\vec{E}(x^{IV})]\}}{\xi^2}(1 - \cos \xi) - \frac{\vec{\xi} \times [\vec{H}(x^{IV}) - i\vec{E}(x^{IV})]}{\xi} \sin \xi, \end{aligned}$$

где

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad x' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3),$$

$$\eta = (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)^{1/2}, \quad \xi = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2},$$

$$\eta_a = \frac{1}{2} \left( a_0 x_a + \frac{i}{2} \varepsilon_{abc} a_b x_c \right), \quad \xi_a = \frac{1}{2} \left( a_0 x_a - \frac{i}{2} \varepsilon_{abc} a_b x_c \right),$$

а  $x'_\mu, x''_\mu, x'''_\mu$  и  $x_\mu^{IV}$  задаются формулами (2).

В работе [8] показано, что конформные преобразования множества решений уравнений Максвелла образуют унитарное представление конформной группы. В следующих параграфах приведем простое доказательство этого факта и обобщим результаты работы [8] на случай произвольного пуанкаре-инвариантного уравнения движения безмассовой частицы.

### § 2. Матричная форма уравнения Максвелла

Для дальнейшего нам будет удобно использовать запись уравнений Максвелла в следующей эквивалентной форме (см. [9–11])<sup>1</sup>

$$L_1 \Psi = 0, \quad L_1 = i \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \quad (6a)$$

$$L_2 \Psi = 0, \quad L_2 = S_{4a} p_a, \quad (6б)$$

где  $\Psi$  — восьмикомпонентная функция,

$$\Psi \text{ — столбец } (H_1, H_2, H_3, \varphi_1, E_1, E_2, E_3, \varphi_2), \quad (7)$$

а  $\alpha_a$  и  $S_{4a}$  — матрицы следующего вида:

$$\alpha_a = 2i \begin{pmatrix} \hat{0} & -\tau_a \\ \tau_a & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad S_{4a} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{4a} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{4a} \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{41} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\hat{S}_{42} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{43} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{0}$  — четырехрядные квадратные нулевые матрицы. Матрицы  $\hat{S}_{4a}$  и

$$\hat{S}_{ab} = \varepsilon_{abc}(2\tau_c - \hat{S}_{4c})$$

образуют представление  $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  алгебры  $O(4)$ . Расписав (6) покомпонентно, приходим к обычной форме уравнений Максвелла (1) и условиям для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\varphi_1 = C_1, \quad \varphi_2 = C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, которые, не умаляя общности, можно положить равными нулю.

<sup>1</sup>Подобная формулировка уравнений Максвелла (но с использованием четырехкомпонентной волновой функции и отличного от (6б) дополнительного условия) была предложена ранее в работах [12–13].

Покажем, что уравнения (6) инвариантны относительно неоднородных преобразования Лоренца (5а), (5б). Условие инвариантности этих уравнений может быть записано в виде (см. [1])

$$\begin{aligned} [L_1, Q_A]_- &= f_A^1 L_1 + f_A^2 L_2, \\ [L_2, Q_A]_- &= \tilde{f}_A^1 L_1 + \tilde{f}_A^2 L_2, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $Q_A$  — генераторы группы инвариантности,  $f_A^\alpha$  и  $\tilde{f}_A^\alpha$  — некоторые операторы, определенные в пространстве решений уравнений (6).

Генераторы (инфинитезимальные операторы) преобразований (5а), (5б) для функции  $\Psi$  (см. (7)) имеют вид

$$P_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = p_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix}, \quad S_{0a} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{S}_{bc} \\ -\hat{S}_{bc} & \hat{0} \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{S}_{31} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10')$$

Операторы  $P_0$  и  $P_a$  генерируют преобразования, характеризуемые параметрами  $b$  и  $a_a$ , а  $J_{ab}$  и  $J_{0a}$  — преобразования, задаваемые параметрами  $\varepsilon_{abc}\theta_c$  и  $\lambda_a$ .

Используя тождества (см. [11, 18])

$$i \frac{\vec{p} \times \vec{S}}{p} \left( \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p} \right)^2 = \left( \vec{S} - \frac{\vec{p}}{p} \cdot \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p} \right) \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{p},$$

где

$$S_a = S_{bc}, \quad p = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2},$$

нетрудно показать, что на множестве решений уравнений (6) генераторы (10) принимают следующий вид:

$$P_0 = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{0a} = tp_a - \frac{1}{2} [X_a, P_0]_+, \quad (11)$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab} \equiv X_a p_b - X_b p_a + \hat{p}_c \Lambda,$$

где

$$X_a = x_a - i \frac{p_a P_0}{p^2} + \frac{S_{ab} p_b}{p^2}, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{abc} p_a S_{bc}}{p}, \quad \hat{p}_c = \frac{p_c}{p}.$$

Операторы (11) удовлетворяют коммутационным соотношениям, определяющим алгебру Ли группы Пуанкаре:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu]_- &= 0, & [J_{\mu\nu}, P_\lambda]_- &= i(g_{\nu\lambda}P_\mu - g_{\mu\lambda}P_\nu), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]_- &= i(g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda}), \end{aligned} \quad (12)$$

и условиям инвариантности (9):

$$[L_1, Q_A]_- = 0, \quad [L_2, Q_A]_- = [p, Q_A]_- = \frac{1}{p}L_2, \quad (13)$$

где  $Q_A$  — любой из операторов (11). Генераторы (11) эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int \frac{d^3\vec{p}'}{2p'^2} \int d^3x \exp[i(\vec{p} - \vec{p}')\vec{x}] \Psi_1^\dagger \Psi_2. \quad (14)$$

Это означает, что преобразования (5а), (5б) унитарны. Ниже будет доказана унитарность остальных преобразований (5в), (5г) из конформной группы.

### § 3. Явно эрмитово представление конформной алгебры

Приведем простое и конструктивное доказательство того, что на множестве решений произвольного релятивистского уравнения для частицы с нулевой массой и дискретным спином реализуется унитарное представление конформной группы. Частным случаем таких уравнений являются уравнения Максвелла (1). Теорема, доказанная ниже, обобщает известный результат Гросса (см. [8]) и дает элементарное доказательство унитарности преобразований (5в), (5г).

**Определение.** Будем говорить, что уравнение пуанкаре-инвариантно и описывает движение частицы с нулевой массой и дискретным спином, если на множестве его решений можно задать унитарное (в общем случае приводимое) представление группы Пуанкаре, соответствующее нулевым значениям операторов Казимира:

$$P_\mu P^\mu = 0, \quad W_\mu W^\mu = 0, \quad (15)$$

где  $W_\mu$  — вектор Любанского–Паули (см. [14])

$$W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J_{\nu\rho} P_\sigma, \quad (16)$$

а  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  — генераторы группы  $P(1, 3)$ .

**Теорема 1.** Произвольное пуанкаре-инвариантное уравнение для безмассовой частицы дискретного спина инвариантно относительно алгебры Ли конформной группы  $S_4$ , базисные элементы которой задаются операторами  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  и

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{P_0 P_a}{P^2}, J_{0a} \right]_+, \\ K_\mu &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{P_0}{P^2}, [J_{0b}, J_{\mu b}]_+ \right]_+ - \left[ \frac{P_\mu}{P^2}, J_{0b} J_{0b} \right]_+ \right\} + g_{\mu\nu} \frac{P_\nu}{P^2} \left( \Lambda^2 - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

где символ  $[A, B]_+$  обозначает антикоммутатор,

$$[A, B]_+ \equiv AB + BA,$$

$\Lambda$  — инвариантный оператор спиральности,

$$\Lambda = \frac{1}{2p} \varepsilon_{abc} J_{ab} P_c,$$

$P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  — базисные элементы алгебры  $P(1, 3)^2$ , а  $D$  и  $K_\mu$  — операторы, дополняющие алгебру  $P(1, 3)$  до алгебры  $C_4$ .

**Доказательство.** Поскольку операторы  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  по определению удовлетворяют алгебре (12), доказательство теоремы сводится к проверке справедливости следующих соотношений:

$$\begin{aligned} [J_{\mu\nu}, K_\lambda]_- &= i(g_{\nu\lambda} K_\mu - g_{\mu\lambda} K_\nu), & [K_\mu, P_\nu]_- &= 2(ig_{\mu\nu} D - J_{\mu\nu}), \\ [D, P_\mu]_- &= iP_\mu, & [D, K_\mu]_- &= -iK_\mu, & [K_\mu, K_\nu]_- &= 0, & [J_{\mu\nu}, D]_- &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

которые определяют совместно с (12) алгебру  $C_4$ . Такую проверку нетрудно осуществить непосредственно, принимая во внимание, что генераторы  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  удовлетворяют соотношениям (см. [15])

$$W_\mu = \frac{P_0}{P} \Lambda P_\mu.$$

Таким образом, формулы (17) дают явное выражение генераторов конформной группы через генераторы ее подгруппы  $P(1, 3)$ . Отметим, что генераторы (18) имеют явно эрмитову форму и, следовательно, порождают совместно с  $P_\mu$  и  $J_{\mu\nu}$  унитарное представление конформной группы. Теорема доказана.

Продемонстрируем конструктивный характер доказанной теоремы на примере уравнений Максвелла. Эти уравнения пуанкаре-инвариантны, генераторы группы  $P(1, 3)$  задаются формулами (10) и, как нетрудно проверить, удовлетворяют условиям (15). Но тогда, согласно теореме 1, уравнения (6) инвариантны также относительно конформной группы. Подставив операторы (10) в (17), получаем генераторы  $D$  и  $K_\mu$  этой группы в виде

$$\begin{aligned} D &= -\frac{1}{2} [X_\mu, P^\mu]_+, \\ K_\mu &= -[J_{\mu\nu}, X^\nu]_+ + \frac{1}{2} [P_\mu, X_\nu X^\nu]_+ - \frac{P_\mu}{P^2} \left( \Lambda^2 + \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Генераторы (19) эрмитовы в скалярном произведении (14) и на множестве решений уравнений (15) могут быть представлены в обычной форме (см. [16]):

$$D = x_\mu p^\mu + 2i, \quad K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu + 2x^\nu S_{\mu\nu}. \quad (20)$$

Отсюда следует, что генераторы (20) также эрмитовы относительно (14), а это означает, что порождаемые ими преобразования (5б), (5г) унитарны.

<sup>2</sup>Мы используем одинаковые обозначения для групп и для соответствующих алгебр Ли.

### § 4. Инвариантность уравнений Максвелла относительно группы $U(2) \otimes U(2)$

Выше подробно обсуждалась инвариантность уравнений Максвелла относительно конформной группы. Хорошо известно, что эти уравнения инвариантны также относительно преобразований Хевисайда–Лармора [4, 5]

$$\vec{E} \rightarrow \vec{H}, \quad \vec{H} \rightarrow -\vec{E},$$

и относительно более общих преобразований (см. [6]):

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \vec{E}' = \vec{E} \cos \theta + \vec{H} \sin \theta, \\ \vec{H} &\rightarrow \vec{H}' = \vec{H} \cos \theta - \vec{E} \sin \theta. \end{aligned} \tag{21}$$

Покажем, что симметрия уравнений Максвелла еще шире, а именно, что уравнения (1) инвариантны относительно совокупности преобразований, образующих представление группы  $U(2) \otimes U(2)$  и включающих (21) как однопараметрическую подгруппу. Теорема о такой дополнительной симметрии уравнений Максвелла была сформулирована в работе [17], где показано, что эта группа порождается не преобразованиями координата  $x_\mu$ , а преобразованиями вида (0). Однако в работе [17] не был найден явный вид функций  $f_i$  и  $g_i$  из (0).

**Теорема 2.** *Уравнения Максвелла (1) инвариантны относительно преобразований:*

$$H_a \rightarrow H'_a = H_a \cos \frac{\theta}{2} + \left[ i\hat{F}_{ab}E_b\theta_1 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b(H_c\theta_3 + i\hat{F}_{cd}E_d\theta_2) \right] \frac{1}{\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \tag{22a}$$

$$E_a \rightarrow E'_a = E_a \cos \frac{\theta}{2} + \left[ -i\hat{F}_{ab}H_b\theta_1 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b(E_c\theta_3 + i\hat{F}_{cd}H_d\theta_2) \right] \frac{1}{\theta} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$H_a \rightarrow H''_a = H_a \cos \frac{\lambda}{2} - \left[ i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\hat{F}_{cd}H_d\lambda_1 + \hat{F}_{ab}H_b\lambda_2 - E_a\lambda_3 \right] \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{2}, \tag{22b}$$

$$E_a \rightarrow E''_a = E_a \cos \frac{\lambda}{2} + \left[ i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\hat{F}_{cd}E_d\lambda_1 - \hat{F}_{ab}E_b\lambda_2 - H_a\lambda_3 \right] \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{2},$$

$$H_a \rightarrow H'''_a = H_a \cos \varphi + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_bE_c \sin \varphi, \tag{22в}$$

$$E_a \rightarrow E'''_a = E_a \cos \varphi - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_bE_c \sin \varphi,$$

где

$$\lambda = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{1/2}, \quad \theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}, \quad \hat{p}_b = \frac{p_b}{p},$$

$\lambda_a, \theta_a$  и  $\varphi$  – произвольные действительные параметры,  $(a, b, c)$  – цикл  $(1, 2, 3)$ ,

$$\hat{F}_{ad} = \left[ (p_a^2 p_c^2 + p_a^2 p_b^2 - p_b^2 p_c^2) \delta_{ad} + p_1 p_2 p_3 (p_b \delta_{cd} + p_c \delta_{bd} - p_a \hat{p}_d) \right] L^{-1},$$

$$L = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ (p_1^2 - p_2^2)^2 p_3^4 + (p_1^2 - p_3^2)^2 p_2^4 + (p_2^2 - p_3^2)^2 p_1^4 \right]^{1/2}.$$

Преобразования (22) совместно с тривиальным фазовым преобразованием

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E} \exp(i\eta), \quad \vec{H} \rightarrow \vec{H} \exp(i\eta) \tag{23}$$

образуют представление группы  $U(2) \otimes U(2)$ .

**Доказательство.** Можно убедиться непосредственно проверкой, что  $\vec{E}'$ ,  $\vec{H}'$ ,  $\vec{E}''$ ,  $\vec{H}''$ ,  $\vec{E}'''$ ,  $\vec{H}'''$  удовлетворяют тем же уравнениям (1), что и непреобразованные  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , а инфинитезимальные операторы преобразований (22), (23) образуют алгебру Ли группы  $U(2) \otimes U(2)$ . Однако более конструктивный путь (позволяющий обобщить полученные результаты для других пуанкаре-инвариантных уравнений) состоит в том, чтобы привести уравнения (1) к такой эквивалентной форме, для которой утверждения теоремы становятся очевидными.

Будем исходить из матричной формы уравнений Максвелла (6). Эти уравнения могут быть приведены к канонической диагональной форме. Такую диагонализацию мы осуществим в два этапа. Сначала используем унитарный оператор

$$U_1 = \exp(\sigma_2 - 1)F\vec{S} \cdot \vec{p} \frac{\pi}{4}, \quad (24)$$

где  $\sigma_2$  и, далее,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  – матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I} \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = i \begin{pmatrix} \hat{0} & -\hat{I} \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{I} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$\hat{I}$  и  $\hat{0}$  – четырехрядные квадратные единичные и нулевые матрицы,

$$F = \left\{ \sum_{a \neq b \neq c} (p_a^2 p_c^2 + p_a^2 p_b^2 - p_b^2 p_c^2) (1 - S_a^2) + p_1 p_2 p_3 S_a S_b p_c - p_1 p_2 p_3 p \left[ 1 - (\vec{S} \cdot \hat{p})^2 \right] \right\} L^{-1}. \quad (26)$$

Принимая во внимание соотношения

$$F \cdot \vec{S} \cdot \hat{p} = -\vec{S} \cdot \hat{p} \cdot F, \quad F \cdot (\vec{S} \cdot \hat{p})^2 = F, \quad \vec{S} \cdot \hat{p} F^2 = \vec{S} \cdot \hat{p}, \quad \vec{S} \cdot \hat{p} \cdot S_{4a} p_a = 0,$$

получаем из (6) следующую эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} L'_1 \Psi' &= 0, & L'_1 &= U_1 L_1 U_1^+ = i \frac{\partial}{\partial t} - \vec{S} \cdot \vec{p}, & \Psi' &= U_1 \Psi, \\ L'_2 \Psi' &= 0, & L'_2 &= U_1 L_2 U_1^+ = S_{4a} p_a. \end{aligned} \quad (27)$$

Следующий этап состоит в приведении к матричной форме операторов  $\vec{S} \cdot \vec{p}$  и  $S_{4a} p_a$ . Это достигается посредством преобразования

$$\begin{aligned} \vec{S} \cdot \vec{p} &\rightarrow U_2 \vec{S} \cdot \vec{p} U_2^+ = \Lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}(S_1 + S_2 + S_3), \\ S_{4a} p_a &\rightarrow U_2 S_{4a} p_a U_2^+ = \Sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}(S_{41} + S_{42} + S_{43}), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} U_2 &= \exp \left( -i \frac{S_a \tilde{p}_a}{\tilde{p}} \operatorname{arctg} \frac{\tilde{p}}{p_1 + p_2 + p_3} \right), \\ \tilde{p}_a &= p_b - p_c, \quad (a, b, c) - \text{цикл } (1, 2, 3), \quad \tilde{p} = (\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + \tilde{p}_3^2). \end{aligned} \quad (29)$$

Из (26), (27) следует, что преобразование

$$\Psi \rightarrow \Phi = W\Psi, \quad W = U_2 U_1 \quad (30)$$

приводит уравнения (6) к квазидиагональной форме

$$\begin{aligned} L_1'' \Phi = 0, \quad L_1'' &= W L_1 W^+ = i \frac{\partial}{\partial t} - \Lambda p, \\ L_2'' \Phi = 0, \quad L_2'' &= W L_2 W^+ = \Sigma p, \end{aligned} \quad (31)$$

где коммутирующие между собой матрицы  $\Lambda$  и  $\Sigma$ , не умаляя общности, можно считать диагональными.

Условие инвариантности (9) для уравнений (31) принимает форму

$$\begin{aligned} [L_1'', Q'_A]_- &= f_A'^1 L_1'' + f_A'^2 L_2'', \\ [L_2'', Q'_A]_- &= \tilde{f}_A'^1 L_1'' + \tilde{f}_A'^2 L_2'', \end{aligned} \quad (32)$$

Нетрудно убедиться, что условиям (32) удовлетворяют матрицы

$$\begin{aligned} Q'_a &= \Sigma_{bc} = \frac{1}{2} \sigma_a \Lambda, \quad Q'_{3+a} = \Sigma_{4a} = \frac{1}{2} \sigma_a \Lambda^2, \\ Q'_7 &= \Sigma_7 = \Lambda, \quad Q'_8 = \Sigma_8 = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{I} \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя представление (8), (10), (25), для матриц  $\sigma_a$  и  $S_{ab}$  можно показать, что формулы (33) задают полный набор матриц, удовлетворяющих условиям (32); при этом

$$f_A'^1 = f_A'^2 = \tilde{f}_A'^1 = \tilde{f}_A'^2 = 0. \quad (34)$$

Операторы (33) удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\Sigma'_{kl}, \Sigma'_{mn}]_- &= i (\delta_{km} \Sigma'_{ln} + \delta_{ln} \Sigma'_{km} - \delta_{kn} \Sigma'_{lm} - \delta_{lm} \Sigma'_{kn}), \\ [\Sigma'_5, \Sigma'_{kl}]_- &= [\Sigma'_7, \Sigma'_{kl}]_- = [\Sigma'_8, \Sigma'_{kl}]_- = 0 \end{aligned} \quad (35a)$$

и условиям

$$\Sigma_{kl}^2 \Phi = \frac{1}{4} \Phi, \quad \Sigma_\alpha^2 \Phi = \Phi, \quad \alpha = 7, 8, \quad (35b)$$

т.е. операторы  $\Sigma'_{kl}$  образуют представление  $D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2})$  алгебры Ли группы  $O(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)$ , а  $\Sigma'_{kl}$  и  $\Sigma'_\alpha$  — соответствующее представление алгебры Ли группы  $U(2) \otimes U(2)$ . Отсюда следует, что уравнения (31) инвариантны относительно произвольных преобразований из группы  $U(2) \otimes U(2)$ :

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = \exp \left\{ \frac{i}{2} \Sigma'_{ab} \theta_c \varepsilon_{abc} \right\} \Phi = \left( \cos \theta + i \varepsilon_{abc} \Sigma'_{ab} \theta_c \frac{\sin \frac{1}{2} \theta}{\theta} \right) \Phi, \\ \Phi &\rightarrow \Phi'' = \exp \{ i \Sigma'_{4a} \lambda_a \} \Phi = \left( \cos \lambda + 2i \Sigma'_{4a} \lambda_a \frac{\sin \frac{1}{2} \lambda}{\lambda} \right) \Phi, \\ \Phi &\rightarrow \Phi''' = \exp(i \Sigma'_7 \varphi) \Phi = (\cos \varphi + i \Sigma'_7 \sin \varphi) \Phi, \\ \Phi &\rightarrow \Phi^{IV} = \exp(i \Sigma'_8 \eta) \Phi = \exp(i \eta) \Phi. \end{aligned} \quad (36)$$

Возвращаясь с помощью оператора, обратного (30), к исходному  $\Psi$ -представлению, получаем из (36) преобразования, оставляющие инвариантным уравнение (6):

$$\begin{aligned}\Psi &\rightarrow \Psi' = \left( \cos \theta + i\varepsilon_{abc}\Sigma_{ab}\theta_c \frac{\sin \frac{1}{2}\theta}{\theta} \right) \Psi, \\ \Psi &\rightarrow \Psi'' = \left( \cos \lambda + 2i\Sigma_{4a}\lambda_a \frac{\sin \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} \right) \Psi, \\ \Psi &\rightarrow \Psi''' = (\cos \varphi + i\Sigma_7 \sin \varphi)\Psi, \\ \Psi &\rightarrow \Psi^{IV} = (\cos \eta + i\Sigma_8 \sin \eta)\Psi,\end{aligned}\tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}\Sigma_{kl} &= u^+\Sigma'_{kl}u, \quad \Sigma_\alpha = u + \Sigma'_\alpha u, \quad \Sigma_{12} = \frac{1}{2}S_a\hat{p}_a, \quad \Sigma_{23} = \frac{1}{2}\sigma_1\hat{F}, \\ \Sigma_{31} &= \frac{i}{2}\sigma_1S_a\hat{p}_a\hat{F}, \quad \Sigma_{41} = \frac{i}{2}\sigma_3S_a\hat{p}_a\hat{F}, \quad \Sigma_{42} = -\frac{1}{2}\sigma_3\hat{F}(S_a\hat{p}_a)^2, \\ \Sigma_{43} &= -\frac{1}{2}\sigma_2(S_a\hat{p}_a)^2, \quad \Sigma_5 = \sigma_2S_a\hat{p}_a, \quad \Sigma_6 = 1.\end{aligned}\tag{38}$$

Подставив выражения (38), (7) в (37), приходим к формулам (22) и (23). Теорема доказана.

Таким образом, мы нашли новую восьмипараметрическую группу симметрии уравнений Максвелла, задаваемую преобразованиями (22), (23). Особенность этих преобразований состоит в том, что в отличие от (5) они являются нелокальными.

Преобразования (22), (23) унитарны как относительно метрики (14), так и относительно скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^+ \Psi_2.\tag{39}$$

Подставляя в формулу (39) явный вид функции  $\Psi$  (см. (7)) и налагая на  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  условие эрмитовости, приходим к выводу, что преобразования (22), (23) сохраняют величину

$$\varepsilon = \int d^3x (\vec{E}^2 + \vec{H}^2),\tag{40}$$

которая определяет энергию электромагнитного поля.

Подчеркнем еще раз, что преобразования (22), (23) не имеют ничего общего с неоднородными преобразованиями Лоренца (5а), (5б), поскольку они реализуют унитарное конечномерное представление компактной группы  $U(2) \times U(2)$ . В случае  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  формулы (226) задают преобразование Хевисайда–Лармора–Райнича (21).

Отметим также, что используя формализм, разработанный в [9–11], результаты теоремы 2 нетрудно обобщить на уравнения для безмассовых частиц с произвольным спином, инвариантные относительно группы Пуанкаре.

### § 5. Симметрия первой пары уравнений Максвелла

Исследуем инвариантность уравнений (1а):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (41)$$

без дополнительных условий (1б).

Нетрудно убедиться, что в отличие от системы (1) уравнения (41) неинвариантны относительно всех преобразований (5), (2), но инвариантны только относительно преобразований (1а), (1в), (5а), (5в), т.е. относительно группы поворотов и сдвигов трехмерного евклидова пространства  $E(3)$  и относительно масштабных преобразований.

Таким образом, отказ от дополнительных условий (1б) приводит к тому, что симметрия системы уравнений относительно локальных преобразований вида (2), (5) сужается. При этом, однако, как будет показано ниже, расширяется симметрия относительно интегро-дифференциальных преобразований (0).

**Теорема 3.** Система уравнений (41) инвариантна относительно совокупности преобразований, задаваемых формулами

$$\begin{aligned} H_a \rightarrow H'_a &= H_a \cos \frac{1}{2}\theta + i\hat{p}_a\hat{p}_b H_b \left(1 - \cos \frac{1}{2}\theta\right) + \\ &+ \left[i\hat{F}_{ab}E_b\theta_1 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b(H_c\theta_3 + i\hat{F}_{cd}E_d\theta_2)\right] \frac{1}{\theta} \sin \frac{1}{2}\theta, \end{aligned} \quad (42a)$$

$$\begin{aligned} E_a \rightarrow E'_a &= E_a \cos \frac{1}{2}\theta + i\hat{p}_a\hat{p}_b E_b \left(1 - \cos \frac{1}{2}\theta\right) + \\ &+ \left[-i\hat{F}_{ab}H_b\theta_1 - \varepsilon_{abc}\hat{p}_b(E_c\theta_3 + i\hat{F}_{cd}H_d\theta_2)\right] \frac{1}{\theta} \sin \frac{1}{2}\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_a \rightarrow H''_a &= H_a \cos \frac{1}{2}\lambda + \hat{p}_a\hat{p}_b H_b \left(1 - \cos \frac{1}{2}\lambda\right) + \\ &+ \left[(E_a - \hat{p}_a\hat{p}_b E_b)\lambda_3 - \hat{F}_{ab}H_b\lambda_2 - i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\hat{F}_{cd}H_d\lambda_1\right] \frac{1}{\lambda} \sin \frac{1}{2}\lambda, \end{aligned} \quad (42б)$$

$$\begin{aligned} E_a \rightarrow E''_a &= E_a \cos \frac{1}{2}\lambda + \hat{p}_a\hat{p}_b E_b \left(1 - \cos \frac{1}{2}\lambda\right) + \\ &+ \left[-(H_a - \hat{p}_a\hat{p}_b H_b)\lambda_3 - \hat{F}_{ab}E_b\lambda_2 + i\varepsilon_{abc}\hat{p}_b\hat{F}_{cd}E_d\lambda_1\right] \frac{1}{\lambda} \sin \frac{1}{2}\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_a \rightarrow E_a \cos \frac{1}{2}\xi + \hat{p}_a\hat{p}_b E_b \left(1 - \cos \frac{1}{2}\xi\right) + \\ + i\hat{p}_a\hat{p}_b [-E_b\xi_3 + H_b(\xi_1 + i\xi_2)] \frac{1}{\xi} \sin \frac{1}{2}\xi, \end{aligned} \quad (42в)$$

$$\begin{aligned} H_a \rightarrow H_a \cos \frac{1}{2}\xi + \hat{p}_a\hat{p}_b H_b \left(1 - \cos \frac{1}{2}\xi\right) + \\ + i\hat{p}_a\hat{p}_b [H_b\xi_3 + E_b(\xi_1 - i\xi_2)] \frac{1}{\xi} \sin \frac{1}{2}\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_a &\rightarrow E_a \cos \varkappa + \hat{p}_a \hat{p}_b E_b (1 - \cos \varkappa) + (H_a - \hat{p}_a \hat{p}_b H_b) \sin \varkappa, \\
H_a &\rightarrow H_a \cos \varkappa + \hat{p}_a \hat{p}_b H_b (1 - \cos \varkappa) - (E_a - \hat{p}_a \hat{p}_b E_b) \sin \varkappa, \\
E_a &\rightarrow E_a \cos \varphi + \hat{p}_a \hat{p}_b E_b (1 - \cos \varphi) - i \varepsilon_{abc} \hat{p}_b H_c \sin \varphi, \\
H_a &\rightarrow H_a \cos \varphi + \hat{p}_a \hat{p}_b H_b (1 - \cos \varphi) + i \varepsilon_{abc} \hat{p}_b E_c \sin \varphi, \\
E_a &\rightarrow E_a \exp(ic), \quad H_a \rightarrow H_a \exp(ic),
\end{aligned} \tag{42г}$$

где

$$\xi = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}, \quad \lambda = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{1/2}, \quad \theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2},$$

$\xi_a, \lambda_a, \theta_a, \varkappa, \varphi, c$  — произвольные действительные параметры. Преобразования (42) образуют представление группы  $U(2) \otimes U(2) \otimes U(2)$ .

**Доказательство.** Инвариантность уравнений (41) относительно преобразований (42) легко может быть проверена непосредственно. Менее очевидна групповая структура этих преобразований, которую проще всего установить, преобразуя уравнения (41) к диагональному виду.

Запишем уравнения (41) в матричной форме

$$L\tilde{\Psi} = 0, \quad L = i \frac{\partial}{\partial t} - \sigma_2 \tilde{S}_a \hat{p}_a, \tag{43}$$

где  $\tilde{\Psi}$  — шестикомпонентная функция:

$$\begin{aligned}
\Psi &\text{ — столбец } (H_1, H_2, H_3, E_1, E_2, E_3), \\
\sigma_2 &= i \begin{pmatrix} \tilde{0} & -\tilde{I} \\ \tilde{I} & \tilde{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S}_a = \begin{pmatrix} S_a & \tilde{0} \\ \tilde{0} & S_a \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{44}$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

$\tilde{I}$  и  $\tilde{0}$  — трехрядные квадратные единичные и нулевые матрицы.

Диагонализируем уравнение (43). Используя для этой цели унитарный оператор

$$\begin{aligned}
U &= U_1 U_2 U_3 U_4, \\
U_1 &= \exp \left( i [\tilde{S}_1, \tilde{S}_2]_+ \frac{\pi}{4} \right), \quad U_2 = \exp \left[ \frac{i}{\sqrt{2}} (\tilde{S}_2 - \tilde{S}_1) \arctg \sqrt{2} \right], \\
U_3 &= \exp \left( -i \frac{\tilde{S}_a \tilde{p}_a}{\tilde{p}} \arctg \frac{\tilde{p}}{p_1 + p_2 + p_3} \right), \quad U_4 = \exp \left[ (\tilde{\sigma}_2 - 1) \tilde{F} \vec{S} \cdot \vec{p} \frac{\pi}{4} \right],
\end{aligned} \tag{46}$$

где  $\tilde{F}$  — оператор, полученный из (26) заменой  $S_a \rightarrow \tilde{S}_a$ , приходим к уравнениям

$$L'\tilde{\Phi} = 0, \quad L' = ULU^{-1} = i(\tilde{S}_1 \tilde{S}_2 + \tilde{S}_2 \tilde{S}_1) \tilde{S}_3 p - i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \tilde{\Phi} = U\Psi. \tag{47}$$

Формулы (47) задают систему незацепляющихся уравнений, поскольку согласно (45)

$$i(\tilde{S}_1\tilde{S}_2 + \tilde{S}_2\tilde{S}_1)\tilde{S}_3 = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 0 & & \tilde{0} & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline & \tilde{0} & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \Gamma_0. \quad (48)$$

Из (47), (48) заключаем, что существует двенадцать линейно независимых матриц  $\tilde{Q}_A$ , коммутирующих с  $\Gamma_0$  и тем самым удовлетворяющих условию инвариантности уравнений (47):

$$[L'_1, \tilde{Q}_A]_- \Phi = 0. \quad (49)$$

Полный набор таких матриц выберем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{Q}'_a &= \tilde{\Sigma}'_{bc} = \frac{1}{2}\Gamma_0\tilde{\sigma}_a, & \tilde{Q}'_{3+a} &= \tilde{\Sigma}'_{4a} = \frac{1}{2}\Gamma_0^2\tilde{\sigma}_a, & \tilde{Q}'_7 &= \tilde{\Sigma}'_7 = \Gamma_0, \\ \tilde{Q}'_8 &= \tilde{\Sigma}'_8 = \tilde{\sigma}_0, & \tilde{Q}'_9 &= 1 - \Gamma_0^2, & \tilde{Q}'_{9+a} &= \frac{1}{2}(1 - \Gamma_0^2)\tilde{\sigma}_a, \quad a = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{I} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{I} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_1 = i \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{I} \\ \tilde{I} & \tilde{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} \tilde{I} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & -\tilde{I} \end{pmatrix},$$

Операторы  $\tilde{\Sigma}'_{ab}$ ,  $\tilde{\Sigma}'_\alpha$  удовлетворяют коммутационным соотношениям (35), т.е. реализуют представление алгебры Ли группы  $U(2) \otimes U(2)$ . Матрицы  $\tilde{Q}'_{8+l}$  ортогональны  $\tilde{\Sigma}'_{ab}$ ,  $\tilde{\Sigma}'_\alpha$  и образуют алгебру Ли группы  $U(2)$ . Отсюда заключаем, что уравнения (47) инвариантны относительно произвольных преобразований из группы  $U(2) \otimes U(2) \otimes U(2)$ :

$$\tilde{\Phi} \rightarrow \exp(i\tilde{Q}'_a\theta_a)\tilde{\Phi} = \left[ 1 + \left( \frac{2\tilde{Q}'_a\theta_a}{\theta} \right)^2 \left( \cos \frac{\theta}{2} - 1 \right) + i \frac{2\tilde{Q}'_a\theta_a}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \right] \tilde{\Phi}, \quad (51a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &\rightarrow \exp(i\tilde{Q}'_{3+a}\lambda_a)\tilde{\Phi} = \\ &= \left\{ 1 + \left( \frac{2\tilde{Q}'_{3+a}\lambda_a}{\lambda} \right)^2 \left( \cos \frac{\lambda}{2} - 1 \right) + i \frac{2\tilde{Q}'_{3+a}\lambda_a}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{2} \right\} \tilde{\Phi}, \end{aligned} \quad (51b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &\rightarrow \exp(i\tilde{Q}'_{9+a}\xi_a)\tilde{\Phi} = \\ &= \left\{ 1 + \left( \frac{2\tilde{Q}'_{9+a}\xi_a}{\xi} \right)^2 \left( \cos \frac{\xi}{2} - 1 \right) + i \frac{2\tilde{Q}'_{9+a}\xi_a}{\xi} \sin \frac{\xi}{2} \right\} \tilde{\Phi}, \end{aligned} \quad (51b)$$

$$\tilde{\Phi} \rightarrow \exp(i\tilde{Q}'_{6+a}\varphi_a)\tilde{\Phi} = \left\{ 1 + \left( \tilde{Q}'_{6+a} \right)^2 (\cos \varphi_a - 1) + i\tilde{Q}'_{6+a} \sin \varphi_a \right\} \tilde{\Phi}, \quad (51r)$$

$$\varphi_1 = \varkappa, \quad \varphi_2 = \varphi, \quad \varphi_3 = c.$$

Возвращаясь с помощью оператора, обратного (46), к исходному  $\Psi$ -представлению (44), получаем из (51) закон преобразования (42) для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Теорема доказана.

### § 6. Инвариантность уравнений Максвелла относительно 22-мерной алгебры Ли

Рассмотрим снова уравнения Максвелла (1), (6). Мы показали выше, что существуют два набора генераторов —  $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, K_\mu, D\}$  и  $\{\Sigma_{kl}, \Sigma_5, \Sigma_6\}$ , удовлетворяющих условиям инвариантности этих уравнений (9). При этом, однако, операторы (10), (11) и (38) не образуют замкнутой алгебры. Симметрия уравнений (6), (1) относительно 22-мерной алгебры Ли, включающей подалгебры  $C_4$  и  $U(2) \oplus U(2)$ , устанавливается следующей теоремой.

**Теорема 4.** Уравнения (6) инвариантны относительно 22-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой задаются операторами (38) и генераторами

$$\begin{aligned} \hat{P}_\mu &= p_\mu, & \hat{J}_{\mu\nu} &= x'_\mu p_\nu - x'_\nu p_\mu, \\ \hat{D} &= x'_\mu p^\mu + i, & \hat{K}_\mu &= -x'_\nu x'^\nu p_\mu + 2x'_\mu \hat{D}, \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$x'_a = W^+ x_a W,$$

$W$  — оператор, заданный формулой (30).

**Доказательство.** Утверждения теоремы легко проверить непосредственно в представлении, где уравнения (6) имеют форму (31). В таком представлении операторы (38) принимают вид (34), а для операторов (52) получаем с помощью преобразования (30)

$$\begin{aligned} \hat{P}'_\mu &= W \hat{P}_\mu W^+ = p_\mu, & \hat{J}'_{\mu\nu} &= W \hat{J}_{\mu\nu} W^+ = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \\ \hat{D}' &= W \hat{D} W^+ = x_\mu p^\mu + i, & \hat{K}'_\mu &= W \hat{K}_\mu W^+ = -x_\nu x^\nu p_\mu + 2x_\mu \hat{D}'. \end{aligned} \quad (53)$$

Прямой проверкой убеждаемся, что операторы  $L'_1$  и  $L'_2$  (31) и генераторы (34), (53) удовлетворяют условиям инвариантности (33):

$$\begin{aligned} [L'_1, P'_\mu]_- &= [L'_1, J'_{ab}]_- = [L'_1, \Sigma'_{kl}]_- = 0, \\ [L'_1, K'_0]_- &= 2i \left[ x_0 + (x_a p_a - i) \frac{\alpha_3}{p} \right] L'_1, \\ [L'_1, K'_a]_- &= 2i \left[ \frac{p_a}{p} x_0 \alpha_3 + x_a \right] L'_1, & [L'_\alpha, D']_- &= i L'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \\ [L'_1, J'_{0a}]_- &= -i \alpha_3 \hat{p}_a L'_1, & [L'_2, P'_\mu]_- &= [L'_2, J'_{ab}]_- = [L'_2, \Sigma'_{kl}]_- = 0, \\ [L'_2, Q'_A]_- &= [p, Q'_A]_- p^{-1} L'_2, & \{Q_A\} &= \{K'_\mu, J'_{0a}\}, & [L'_\alpha, \Sigma'_6]_- &= 0. \end{aligned}$$

Операторы  $\hat{P}'_\mu, \hat{J}'_{\mu\nu}, \hat{K}'_\mu, \hat{D}'$  удовлетворяют алгебре (12), (18) и коммутируют с  $\Sigma'_{kl}, \Sigma_5, \Sigma_6$ , т.е. образуют алгебру Ли группы  $U(2) \otimes U(2) \otimes U(2)$ . Теорема доказана.

Используя формализм, предложенный в работах [9–11], утверждения теоремы 4 можно обобщить на случай пуанкаре-инвариантных уравнений для безмассовых частиц произвольного спина.

Отметим, что генераторы (38), (52) являются нелокальными (интегро-дифференциальными) операторами. Это означает, что найденная алгебра инвариантности уравнений Максвелла в принципе не может быть получена в классическом подходе Ли (см. [7]), где, как известно, генераторы группы всегда принадлежат классу дифференциальных операторов первого порядка.

### § 7. Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований, не изменяющих времени

Хорошо известно, что уравнения Максвелла (1), (6) инвариантны относительно преобразований координат и времени вида (2а), (2б), образующих неоднородную группу Лоренца (группу Пуанкаре). Здесь мы покажем, что уравнения (6) остаются инвариантными и в том случае, когда волновая функция преобразуется по представлению группы Пуанкаре, а координаты  $x_\mu$  преобразуются по нелоренцевскому закону

$$x_a \rightarrow x'_a = x'_a(\lambda_b, \theta_b, x_b), \quad x_0 \rightarrow x'_0 = x_0, \quad (54)$$

где  $\lambda_b, \theta_b$  — некоторые параметры.

Инвариантность уравнений (6) относительно преобразований (54) по существу установлена ранее в параграфе 2, где показано, что генераторы группы  $P(1, 3)$  на множестве решений этих уравнений имеют вид (11). Действительно, нетрудно убедиться, что

$$[J_{\mu\nu}, x_0]_- = [P_\mu, x_0]_- = 0.$$

Здесь мы найдем в явном виде группу преобразований, порождаемых генераторами (11). Формально эти преобразования могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Psi \rightarrow \Psi' &= \hat{W}\Psi, & \hat{\Psi} &= \exp(iQ_A\lambda_A), \\ x_\mu \rightarrow x'_\mu &= \hat{W}x_\mu\hat{W}^+, \end{aligned} \quad (55)$$

где  $Q_A$  — произвольный генератор из (11),  $\lambda_A$  — действительные параметры,  $A = 1, 2, \dots, 10$ .

Поскольку генераторы  $J_{0a}$  (11) невозможно представить в виде суммы двух коммутирующих операторов, один из которых выражался бы только через числовые матрицы, а второй — через операторы дифференцирования и умножения на  $x_0$ , вычисление явного вида  $x'_a$  (55) представляет довольно сложную задачу. Для решения этой задачи преобразуем операторы  $\hat{W}$  к такой форме, чтобы они не содержали матриц под знаком экспоненты. Ограничимся нетривиальным случаем, когда  $\{Q_A\} = \{J_{0a}\}$ , т.е. рассмотрим только операторы преобразований вида

$$W = \exp(iJ_{0a}\lambda_a). \quad (56)$$

Используя тождество

$$iJ_{0a}\lambda_a = A_+P_+ + A_-P_-, \quad (57)$$

где

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \vec{\alpha} \cdot \vec{p}), \quad A_{\pm} = i(tp_a \mp \tilde{x}^{\pm} p + S_{0a})\lambda_a, \quad \tilde{x}_a^{\pm} = x_a \mp i\frac{p_a}{p^2},$$

и соотношения

$$\begin{aligned} A_{\pm} P_{\pm} A_{\pm} P_{\pm} &= A_{\pm}^2 P_{\pm}, & P_{\pm} P_{\pm} &= P_{\pm}, & P_{\pm} P_{\mp} &= 0, \\ P_{\pm} A_{\mp} P_{\mp} &= P_{\mp} A_{\pm} P_{\pm} = 0, \end{aligned} \quad (58)$$

приводим (54) к желаемой форме:

$$\begin{aligned} W &= \exp(iJ_{0a}\lambda_a) = N(\lambda) [\exp(iB_+)P_+ + \exp(iB_-)P_-], \\ W^{-1} &= \exp(-iJ_{0a}\lambda_a) = N(-\lambda) [\exp(-iB_+)P_+ + \exp(-iB_-)P_-], \end{aligned} \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \exp(iS_{0a}\lambda_a) = 1 + \frac{iS_{0a}\lambda_a}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda + \left(\frac{S_{0a}\lambda_a}{\lambda}\right)^2 (\operatorname{ch} - 1), \\ B_+ &= tp_a - \tilde{x}_a^+ p, & B_- &= tp_a + \tilde{x}_a^- p, & \lambda &= \sqrt{\lambda_a^2}. \end{aligned} \quad (60)$$

Формулы (59), (60) задают искомое представление операторов  $W$ , в котором не содержатся матрицы под знаком экспоненты. Подставив (59) в (55), получаем теперь прямым вычислением закон преобразования для  $x_{\mu}$ :

$$\begin{aligned} x'_0 &= Wx_0W^{-1} = x_0, \\ x'_a &= Wx_aW^{-1} = x_a + [W, x_a]_- W^{-1} = \left\{ [\exp(iB_+), x_a]_- P_+ + \right. \\ &\quad \left. + [\exp(iB_-), x_a]_- P_- + N(\lambda)[P_+, x_a]_- + N(\lambda)[P_-, x_a]_- \right\} \times \\ &\quad \times N(-\lambda) [\exp(-iB_+)P_+ + \exp(-iB_-)P_-] = x_a [1 - N(-\lambda)] + \\ &\quad + \sum_{\varepsilon=1, -1} \left\{ \frac{1}{p(\varepsilon\lambda)} \left[ tp_a(\varepsilon\lambda) + \frac{2ip_a(\varepsilon\lambda)}{p(\varepsilon\lambda)} - B_a^{\varepsilon}(\varepsilon\lambda) \right] N(-\lambda) P_{\varepsilon} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i p_a(\varepsilon\lambda) \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - i\alpha_0(\lambda)}{p(\varepsilon\lambda)} (P_{\varepsilon} + V_{\varepsilon} P_{-\varepsilon}) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p_a(\varepsilon\lambda) &= p_a + \frac{\lambda_a \lambda_b p_b}{\lambda^2} (\operatorname{ch} \lambda - 1) + \frac{\lambda_a}{\lambda} p \operatorname{sh}(\varepsilon\lambda), \\ B_a^{\varepsilon}(\varepsilon\lambda) &= B_a^{\varepsilon} \operatorname{ch} \lambda + \frac{\lambda_a B_b^{\varepsilon} \lambda_b}{\lambda^2} (\operatorname{ch} \lambda - 1) + \frac{M_{ab} \lambda_b}{\lambda} \operatorname{sh}(\varepsilon\lambda), \\ B_a^{\varepsilon} &= tp_a - \varepsilon x_a^{\varepsilon} E, & M_{ab} &= x_a p_b - x_b p_a, & p(\varepsilon\lambda) &= p \operatorname{ch} \lambda + \frac{p_a \lambda_a}{\lambda} \operatorname{sh}(\varepsilon\lambda), \\ \alpha_a(\varepsilon\lambda) &= \alpha_a \operatorname{ch} \lambda + \frac{\lambda_a \alpha_b \lambda_b}{\lambda^2} (\operatorname{ch} \lambda - 1) - \frac{i \lambda_a \alpha_b \lambda_b}{\lambda^2} \operatorname{sh} \lambda, \\ V_+ &= \exp(-2i\vec{x} \cdot \vec{\lambda} p) \exp[2itp(1 - \operatorname{ch} \lambda)], & V_- &= V^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили закон преобразования (61) для операторов  $x_\mu$ , порождаемых генераторами  $J_{0a}$  (11). Принципиальное отличие преобразований (61) от (2а), (2б) состоит в том, что преобразования (51) не сохраняют квадратичную форму (3) (и не изменяют времени,  $x'_0 = x_0$ ), хотя волновая функция  $\Psi$  при этом преобразуется по представлению группы Пуанкаре.

1. Фушич В.И., О новом методе исследования групповых свойств дифференциальных уравнений в частных производных, В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике, Киев, 1978, 5–44.
2. Bateman H., The transformation of the electron dynamical equations, *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 223–264.
3. Cunningham E., The principle of relativity in electrodinamics and an extention thereof, *Proc. London Math. Soc.*, 1909, **8**, 77–97.
4. Heaviside O., Some properties of Maxwell equations, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 1893, **183**, 423–430.
5. Larmor I., Collected Papers, London, Clarendon Press, 1928, 273 p.
6. Rainich G.I., On the symmetry of Maxwell equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, 1925, **27**, 106–109.
7. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978, 400 с.
8. Gross L., Norm invariance of mass-zero equations under conformal group, *J. Math. Phys.*, 1964, **5**, 687–695.
9. Фушич В.И., Никитин А.Г., Дифференциальные уравнения первого и второго порядка, инвариантные относительно группы Пуанкаре, Препринт 77.3, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1977, 48 с.
10. Никитин А.Г., Фушич В.И., Пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнения для частиц произвольного спина, *Теор. и мат. физика*, 1978, **34**, № 3, 319–333.
11. Фушич В.И., Никитин А.Г., Пуанкаре-инвариантные уравнения движения частиц произвольного спина, *Физика элементарных частиц и атомного ядра (ЭЧАЯ)*, 1978, **9**, вып. 3, 501–553.
12. Lomont I.S., Dirac-like wave equations for particles of zero rest mass and their quantization, *Physical Review*, 1958, **111**, № 6, 1710–1719.
13. Moses H.E., A spinor representation of Maxwell's equation, *Nuovo Cimento Suppl.*, 1958, **7**, № 1, 1–18.
14. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т., Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., Наука, 1969, 424 с.
15. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., Изд-во иностр. лит., 1963, 842 с.
16. Mack G., Salam A., Finite-component field representations of the conformal group, *Annals of Physics*, 1969, **53**, 174–202.
17. Fushchych W.I., On the additional invariance of the Dirac and Maxwell equations, *Lettere Nuovo Cimento*, 1974, **11**, № 10, 508–512.
18. Фушич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., О релятивистских уравнениях движения без “лишних” компонент, *Теор. и мат. физика*, 1971, **8**, № 2, 192–205.

# Пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнения для частиц произвольного спина

А.Г. НИКИТИН, В.И. ФУЩИЧ

The first and the second order differential equations have been deduced which describe the motion of relativistic particle with arbitrary spin. On the basis of these equations, the problem of the motion of the arbitrary spin particle in the homogeneous magnetic field has been solved exactly. The covariant position and spin operators have been obtained which are distinct from the Newton–Wigner and the Foldy–Wouthuysen operators. The approximate diagonalization of the Hamiltonian of the particle interacting with the external electromagnetic field has been carried out.

Выведены дифференциальные уравнения первого и второго порядка, описывающие движение релятивистской частицы с произвольным спином. На основе этих уравнений точно решена задача о движении частицы произвольного спина в однородном магнитном поле. Найдены ковариантные операторы координаты и спина частицы, отличные от известных операторов Ньютона–Вигнера и Фолди–Ваутхойзена. Осуществлена приближенная диагонализация гамильтониана частицы, взаимодействующей с внешним электромагнитным полем.

## Введение

Во всех явно ковариантных релятивистских уравнениях первого порядка, описывающих движение частиц со спином  $s > 1/2$ , волновая функция имеет больше компонент, чем число возможных  $2(2s + 1)$  состояний свободной системы частица–античастица. Это “излишество” является, видимо, одной из причин появления в уравнениях Кеммера–Дэффина [1] ( $s = 1$ ), Рариты–Швингера [2] ( $s = 3/2$ ), описывающих поведение частиц во внешних электромагнитных полях, решений, соответствующих движению частиц с ненулевой массой со скоростью большей, чем скорость света в вакууме. К настоящему времени только уравнение Дирака, не имеющее лишних компонент, не приводит к указанным нефизический следствиям.

Такое исключительное положение уравнения Дирака послужило стимулом для построения уравнений движения вида

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{x}) = H(\mathbf{p}, s) \Psi(t, \mathbf{x}), \quad p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a} \quad (0.1)$$

для частицы с произвольным спином, где волновая функция  $\Psi$  имеет только  $2(2s + 1)$  компонент [3, 4]. Особенность уравнений (0.1) состоит в том, что гамильтониан  $H(\mathbf{p}, s)$  при  $s > 1/2$  является интегродифференциальным оператором. Требование отсутствия лишних компонент у волновой функции и условие эрмитовости гамильтониана и других генераторов группы Пуанкаре относительно обычного скалярного произведения

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger(t, \mathbf{x}) \Psi_2(t, \mathbf{x}) \quad (0.2)$$

приводят к нелокальным уравнениям движения (0.1) в конфигурационном пространстве. Это обстоятельство (нелокальность соответствующих гамильтонианов) сильно затрудняет применение уравнений вида (0.1) для описания поведения частиц со спином  $s > 1/2$  во внешних электромагнитных полях. В [4] на основании уравнений (0.1) решена задача о взаимодействии частицы произвольного спина с внешним полем в предположении, что импульс частицы мал по сравнению с ее массой покоя, т.е. получено квазирелятивистское описание частицы во внешнем поле.

К аналогичным трудностям приводят уравнения, полученные Вивером, Хаммером, Гудом [6] и Мэтьюзом с сотрудниками [7]. Основное отличие этих уравнений от уравнений, полученных в [3, 4], состоит в том, что уравнения [6, 7] определены в пространстве со скалярным произведением

$$(\Psi_1, \Psi_2) = \int d^3x \Psi_1^\dagger(t, \mathbf{x}) M \Psi_2(t, \mathbf{x}), \quad (0.3)$$

где  $M$  — некоторый интегродифференциальный метрический оператор, зависящий от импульса и спиновых матриц.

Гуэртин [8], развивая подход [3, 4], вывел уравнения вида (0.1), используя индефинитную метрику. Эти уравнения для  $s > 1$  также являются интегродифференциальными.

Настоящая работа является продолжением статей [3, 4]. Исходя из требования, чтобы гамильтониан  $H(\mathbf{p}, s)$  в (0.1) был дифференциальным оператором первого или второго порядка, найдены все возможные (с точностью до преобразований эквивалентности) пуанкаре-инвариантные уравнения для релятивистской частицы произвольного спина, допускающие, как и уравнение Дирака, стандартное введение взаимодействия с внешним полем. Волновая функция в дифференциальных уравнениях второго порядка имеет только  $2(2s + 1)$  компонент. Для нижайших целых спинов ( $s = 0, 1$ ) эти уравнения совпадают с известными уравнениями Тамма–Сакаты–Такетани (ТСТ) [9]. При этом, как и в формализме ТСТ, гамильтониан  $H(\mathbf{p}, s)$  не эрмитов относительно (0.2), но эрмитов в пространстве с индефинитной метрикой. Таким образом, индефинитность метрики — это цена, которую приходится платить за то, что гамильтониан  $H(\mathbf{p}, s)$  в уравнении (0.1) является дифференциальным оператором, а волновая функция  $\Psi(t, \mathbf{x})$  не имеет лишних компонент.

С использованием полученных уравнений точно решена задача о движении релятивистской частицы произвольного спина в однородном магнитном поле. Показано, что найденные уравнения не приводят к парадоксу нарушения причинности, свойственному, например, уравнению Рариты–Швингера [2].

### 1. Постановка задачи

Дифференциальные уравнения движения частицы произвольного спина мы получим, исходя из следующего представления генераторов  $P_\mu$ ,  $J_{\mu\nu}$  группы  $P(1, 3)$  [5]:

$$P_0 = H_s, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad (1.1)$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \quad J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, H_s]_+ + \lambda_a, \quad x_0 = t,$$

где  $[A, B]_+ = AB + BA$ ,  $H_s$  — неизвестный пока дифференциальный оператор, включающий производные по  $\partial/\partial x_a$  не выше второго порядка,

$$S_{ab} = S_c = \begin{pmatrix} \hat{S}_c & 0 \\ 0 & \hat{S}_c \end{pmatrix}, \quad (a, b, c) \text{ цикл } (1, 2, 3), \quad (1.2)$$

$\hat{S}_c$  — генераторы неприводимого представления  $D(s)$  группы  $O(3)$ ,  $\lambda_\alpha$  — некоторые операторы, явный вид которых определяется требованием, чтобы генераторы (1.1) удовлетворяли алгебре Пуанкаре  $P(1, 3)$ .

Формулы (1.1) задают самый общий вид генераторов группы Пуанкаре, соответствующих локальным преобразованиям  $2(2s+1)$ -компонентной волновой функции системы “частица + античастица” при повороте системы координат. Представления вида (1.1), где  $H_s$  при  $s > 1$  принадлежит классу интегриродифференциальных операторов, рассматривались ранее в [8].

**Определение.** Будем говорить, что уравнение (0.1) пуанкаре-инвариантно и описывает свободное движение частицы с массой  $m$  и спином  $s$ , если операторы  $P_\alpha$ ,  $J_{\mu\nu}$  (1.1) и гамильтониан  $H_s$  удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры  $P(1, 3)$ :

$$[P_\mu, P_\nu]_- = 0, \quad [P_\mu, J_{\mu\nu}]_- = i(g_{\mu\nu}P_\lambda - g_{\mu\lambda}P_\nu), \quad (1.3a)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]_- = i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda}), \quad (1.3б)$$

$$P_\mu P^\mu \equiv H_s^2 - p_a^2 = m^2, \quad (1.3в)$$

$$W_\mu W^\mu \Psi = m^2 s(s+1) \Psi, \quad (1.3г)$$

где  $[A, B]_- = AB - BA$ ,  $g_{\mu\nu}$  — метрический тензор,  $g_{\nu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ ,  $W_\mu$  — вектор Любанского-Паули

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} J_{\nu\sigma} P_\lambda. \quad (1.4)$$

Из сказанного следует, что если мы найдем все такие операторы  $H_s$  и  $\lambda_\alpha$ , для которых будут удовлетворяться соотношения (1.3), то тем самым будет решена задача о построении пуанкаре-инвариантных уравнений вида (0.1). Действительно, если удовлетворяются соотношения (1.3), то выполняются условия инвариантности уравнения (0.1) относительно алгебры Пуанкаре  $P(1, 3)$

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - H_s, Q_A \right]_- \Psi = 0, \quad (1.5)$$

где  $Q_A$  — произвольный генератор группы  $P(1, 3)$ .

## 2. Дифференциальные операторы $H_s$ второго порядка

Решение нашей задачи приведем в виде следующей теоремы.

**Теорема.** Все возможные (с точностью до преобразований эквивалентности, осуществляемых числовыми матрицами) дифференциальные операторы второго порядка  $H_s$ , удовлетворяющие алгебре  $P(1, 3)$  (1.3), задаются формулами

$$H_s = \sigma_1 m + \sigma_3 k_1 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2m} (\sigma_1 - i\sigma_2) [p^2 - (k_1 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2], \quad (2.1)$$

$$H_1 = \sigma_1 \left( m + \frac{p^2}{2m} \right) - \frac{i}{2m} \sigma_2 [p^2 + 2k_2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2] + \frac{1}{m} \sigma_3 \sqrt{k_2(k_2 - 1)} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2, \quad (2.2)$$

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2,$$

$$H_1 = \sigma_1 \left[ m + \frac{p^2}{2m} - \frac{(k_3 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{2m} \right] + \sigma_3 k_3 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} - \frac{i}{2m} \sigma_2 [p^2 + (k_3 - 2)(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2], \quad (2.3)$$

$$H_{3/2} = \sigma_1 \left( m + \frac{p^2}{2m} \right) + \frac{ik_4}{2m} \sigma_2 \left[ (\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 - \frac{5}{4} p^2 \right] + \frac{1}{2m} \sqrt{k_4^2 - 1} \sigma_3 p^2, \quad (2.4)$$

$$H_{3/2} = \sigma_1 \left[ m + \frac{p^2}{2m} - \frac{(k_5 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{2m} \right] + \sigma_3 k_5 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} - \frac{i}{8m} \sigma_2 [(5k_5^2 - 4)(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 - (9k_5^2 - 5)p^2], \quad (2.5)$$

где  $\sigma_a - 2(2s+1)$ -рядные матрицы Паули, коммутирующие с  $S_a$ ,  $k_l$  ( $l = 1, 2, \dots, 5$ ) — произвольные комплексные параметры.

Доказательство может быть проведено по схеме, подробно описанной в [3–5]. Ради краткости мы его опускаем. Приведем только явный вид операторов  $\lambda_a$ , при которых генераторы (1.1), (2.1)–(2.5) удовлетворяют соотношениям (1.3) (в чем можно убедиться непосредственной проверкой).

В случае, когда гамильтониан  $H_s$  имеет вид (2.1),

$$\lambda_a = \left( 1 - \frac{k_1}{2} \right) \left[ i\sigma_3 S_a - \frac{1}{2m} (\sigma_1 - i\sigma_2) (\mathbf{p} \times \mathbf{S})_a \right]. \quad (2.6)$$

В случае, когда  $H_s$  задается одной из формул (2.2)–(2.5),

$$\lambda_a = \frac{i}{2EB_s} \left\{ p_a \left( 2 + \left[ \frac{H_s}{E}, \sigma_1 \right]_- \right) - 2\dot{x}_a H_s - E[\dot{x}_a, \sigma_1]_- \right\} + \frac{H_s}{E(E+m)} \left[ S_{ab} p_b - \frac{i}{EB_s} S_{ab} p_b (\sigma_1 E + H_s) \right], \quad (2.7)$$

где  $B_s = 2E + [H_s, \sigma_1]_+$ ,  $E = (p^2 + m^2)^{1/2}$ ,  $p = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}$ ,  $\dot{A} = i[H_s, A]_-$ .

**Замечание 1.** Из формул (2.1)–(2.5) видно, что соотношения (1.3) определяют гамильтонианы релятивистской частицы с точностью до постоянных комплексных чисел  $k_l$  ( $l = 1, 2, \dots, 5$ ). Уравнение (0.1) с такими гамильтонианами инвариантно относительно преобразования “сильного отражения”  $\Theta = CPT$ , но, вообще говоря, не инвариантно относительно  $P$ -,  $C$ -, и  $T$ -преобразований. Инвариантность уравнения (0.1) относительно любого из этих преобразований может быть обеспечена специальным выбором чисел  $k_i$ . Так, например, если в формуле (2.1) для спина  $s = 1/2$  положить  $k_1 = 1/s$ , в формулах (2.2)–(2.5) положить  $k_2 = 1$ ,  $k_3 = 0$ ,  $k_4 = 1$ ,  $k_5 = 0$ , то получим  $P$ -,  $C$ -,  $T$ -инвариантные гамильтонианы вида

$$H_0 = \sigma_1 \left( m + \frac{p^2}{2m} \right) - i\sigma_2 \frac{p^2}{2m}, \quad (2.8)$$

$$H_{1/2} = \sigma_1 m + 2\sigma_3 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}, \quad (2.9)$$

$$H_1 = \sigma_1 \left( m + \frac{p^2}{2m} \right) + i\sigma_2 \left( \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{m} - \frac{p^2}{2m} \right), \quad (2.10)$$

$$H_{3/2} = \sigma_1 \left( m + \frac{p^2}{2m} \right) + i\sigma_2 \left[ \frac{(\mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2}{2m} - \frac{5p^2}{8m} \right]. \quad (2.11)$$

Оператор (2.9) совпадает с гамильтонианом Дирака, а операторы (2.8), (2.10) — с гамильтонианами ТСТ [9] для частиц со спином  $s = 0, 1$ . Оператор (2.1) для спина  $s = 1/2$  рассматривался ранее в [10].

**Замечание 2.** Все генераторы группы  $P(1, 3)$ , определяемые формулами (1.1), (2.1), (2.6), принадлежат классу дифференциальных операторов. При  $k_1 = 2$  генераторы  $J_{0a}$  (1.1), (2.6) принимают особо простой вид [3, 4]

$$J_{0a} = x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, H_s]_+. \quad (2.12)$$

**Замечание 3.** Гамильтонианы (2.1)–(2.5) и остальные генераторы (1.1), (1.2), (2.6), (2.7) группы  $P(1, 3)$  могут быть приведены к канонической форме Фолди–Широкова [11, 12] и [3, 4]. Это достигается посредством изометрического преобразования

$$\begin{aligned} P_0 &\rightarrow P_0^k = V P_0 V^{-1} = \sigma_1 E, & P_a &\rightarrow P_a^k = V P_a V^{-1} = p_a, \\ J_{ab} &\rightarrow J_{ab}^k = V J_{ab} V^{-1} = x_a p_b - x_b p_a + S_{ab}, \\ J_{0a} &\rightarrow J_{0a}^k = V J_{0a} V^{-1} = x_0 p_a - \frac{1}{2} [x_a, P_0^k]_+ - \sigma_1 \frac{S_{ab} p_b}{E + m}, \\ E &= (m^2 + p^2)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где операторы  $V$  имеют вид

$$\begin{aligned} V &= V_1 V_2 V_3, & V_1 &= \exp \left( \sigma_1 \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{p} \operatorname{arth} \frac{p}{E} \right), \\ V_2 &= \frac{1}{2m} [E \lambda^+ + m \lambda^- - 2\sigma_1 \lambda^- \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}], \\ V_3 &= \exp \left[ \frac{1}{2m} \sigma_1 \lambda^+ (k_1 - 2) \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} \right], & \lambda^\pm &= \frac{1}{2} (1 \pm \sigma_3), \end{aligned}$$

для гамильтонианов (2.1) и

$$V = (E + \sigma_1 H_s) (2E^2 + E(H_s, \sigma_1)_+)^{1/2}$$

для гамильтонианов (2.2)–(2.5).

### 3. Дифференциальные гамильтоновы уравнения первого порядка

По аналогии с теорией Дирака для электрона постулируем, что в уравнении (0.1) гамильтониан  $\hat{H}_s$  релятивистской частицы с произвольным спином является дифференциальным оператором, включающим производные по пространственным переменным не выше первого порядка

$$\hat{H}_s = \hat{\Gamma}_a^{(s)} p_a + \hat{\Gamma}_0^{(s)} m, \quad (3.1)$$

где  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$  — некоторые числовые матрицы.

Генераторы представления группы Пуанкаре, которое реализуется на решениях уравнения (0.1) с гамильтонианом (2.1), выберем в виде

$$P_0 = \hat{H}_s, \quad P_a = p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

где  $S_{\mu\nu}$  — матрицы, образующие конечномерное представление (в общем случае приводимое) алгебры  $O(1, 3)$ . Формулы (3.2) задают самый общий вид генераторов группы  $P(1, 3)$ , соответствующий локальным преобразованиям волновой функции.

Определить все возможные гамильтонианы вида (3.1) означает найти все такие матрицы  $\hat{\Gamma}_\mu^{(s)}$  и  $S_{\mu\nu}$ , что операторы (3.1), (3.2) удовлетворяют алгебре Пуанкаре (1.3).

Покажем, что искомые уравнения движения частицы со спином  $s$  и массой  $m$  имеют вид

$$\hat{H}_s \Psi = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi, \quad \hat{H}_s = \Gamma_0^{(s)} \Gamma_a^{(s)} p_a + \Gamma_0^{(s)} m, \quad (3.3a)$$

$$\hat{P}_s \Psi = 0, \quad \hat{P}_s = P_s + \frac{1}{2m} \left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \left[ \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu, P_s \right]_-, \quad (3.3b)$$

$$P_s = \frac{1}{4s} \left[ S_{ab}^2 - 2s(s-1) \right], \quad S_{ab}^2 = \sum_{a,b} S_{ab} S_{ab}, \quad (3.3b)$$

где  $\Gamma_\mu^{(s)}$ ,  $S_{ab}$  —  $8s$ -рядные матрицы, задаваемые соотношениями

$$\begin{aligned} [\Gamma_\mu^{(s)}, \Gamma_\nu^{(s)}]_+ &= 2g_{\mu\nu}, & \Gamma_4^{(s)} &= i\Gamma_0^{(s)} \Gamma_1^{(s)} \Gamma_2^{(s)} \Gamma_3^{(s)}, & S_{\mu\nu} &= \tau_{\mu\nu} + j_{\mu\nu}, \\ [\tau_{\mu\nu}, j_{\lambda\sigma}]_- &= 0, & \tau_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \Gamma_\mu^{(s)} \Gamma_\nu^{(s)}, & j_{ab} &= j_c, & j_{0a} &= ij_a, \\ [j_a, j_b]_- &= ij_c, & \sum_a j_a^2 &= j(j+1) = s(s-1), \end{aligned} \quad (3.4)$$

т.е. матрицы  $\Gamma_\mu^{(s)}$ , как и в случае уравнения Дирака, удовлетворяют алгебре Клиффорда, а матрицы  $S_{\mu\nu}$  являются генераторами представления  $[D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2})] \oplus D(s - \frac{1}{2}, 0)$  группы  $O(1, 3)$ . Действительно, используя (3.4), нетрудно убедиться, что гамильтониан (3.3a) и генераторы (3.2) удовлетворяют условиям (1.3a), (1.3b). Что же касается условия (1.3g), то согласно (1.4), (3.2)–(3.4) его можно записать в виде (3.3b)

$$\frac{1}{2s} \left[ \frac{1}{m^2} W_\mu W^\mu - s(s-1) \right] \Psi \equiv \hat{P}_s \Psi = \Psi,$$

где  $\hat{P}_s$  — оператор проектирования на подпространство, соответствующее фиксированному спину  $s$  [5].

Используя тождество

$$\left( 1 + \Gamma_4^{(s)} \right) P_s = \frac{1}{8s} \left[ S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 4s(s-1) \right] \left( 1 + \Gamma_4^{(s)} \right),$$

уравнения (2.3) можно записать в явно ковариантной форме

$$\left( \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu - m \right) \Psi = 0, \quad (3.5a)$$

$$\left(\Gamma_{\mu}^{(s)} p^{\mu} + m\right) \left(1 + \Gamma_4^{(s)}\right) [S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 4s(s-1)]\Psi = 16ms\Psi. \quad (3.56)$$

В силу изложенного выше уравнения (3.5) пуанкаре-инвариантны и описывают свободное движение частицы с фиксированным спином  $s$  и массой  $m$ .

**Замечание 1.** Уравнения (2.5) определены и для случая  $m = 0$ . Налагая при этом на волновую функцию  $\Psi$  пуанкаре-инвариантное дополнительное условие  $(1 - \Gamma_4^{(s)})\Psi = 0$ , получаем из (3.5) уравнения движения для безмассовых частиц произвольного спина, которые при  $s = 1/2$  эквивалентны уравнению Вейля для нейтрино, а при  $s = 1$  — уравнениям Максвелла для электромагнитного поля в вакууме [13].

**Замечание 2.** Посредством преобразования  $\Psi \rightarrow \Phi = W\Psi$ , где

$$W = \exp\left(\frac{\Gamma_a^{(s)} p_a}{p} \operatorname{arctg} \frac{p}{m}\right) \exp\left(\Gamma_0^{(s)} \frac{j_a p_a}{p} \operatorname{arth} \frac{p}{E}\right),$$

уравнения (2.3), (3.5) могут быть приведены к диагональной форме

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \Gamma_0^{(s)} E \Phi, \quad P_s \Phi = \Phi.$$

На решениях уравнений (3.6) генераторы группы  $P(1,3)$  имеют каноническую форму (2.1).

Отметим, что в [14] также предлагались  $8s$ -компонентные дифференциальные уравнения первого порядка, описывающие движение свободной частицы с произвольным спином  $s$ . Эти уравнения, в отличие от (5.1), (5.2), становятся несовместными при учете взаимодействия частицы с внешним полем.

#### 4. Ковариантные операторы координаты и спина

При переходе к новой инерциальной системе отсчета операторы физических величин  $N_i$  (координаты, спина и т.д.) преобразуются следующим образом:

$$N_i \rightarrow N'_i = \exp(iQ_l \theta_l) N_i \exp(-iQ_l \theta_l),$$

где  $Q_l$  ( $l = 1, 2, \dots, 10$ ) — генераторы группы Пуанкаре,  $\theta_l$  — параметры преобразования.

Одна из трудностей, с которой приходится сталкиваться в представлениях типа (1.1) (когда генераторы  $J_{0a}$  нельзя записать в виде суммы коммутирующих “спиновой” и “орбитальной” частей), состоит в том, что оператор  $x_{\mu}$  имеет нековариантный закон преобразования, при котором не сохраняется величина интервала,  $x_0^2 - x_a^2 \neq (x'_0)^2 - (x'_a)^2$ . Следовательно,  $x_{\mu}$  нельзя интерпретировать как ковариантный оператор координаты.

Ниже мы определим ковариантный оператор координаты в представлении (1.1), (2.1). Тем самым в принципе будет решена задача для произвольного представления (1.1), (2.6), поскольку генераторы  $J_{0a}$  (2.12) и (1.1), (2.6) связаны преобразованием эквивалентности  $J_{0a} \rightarrow V J_{0a} V^{-1}$ , где

$$V = \exp\left[(\sigma_1 - i\sigma_2)(2 - k_1) \frac{1}{2m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}\right].$$

Перейдем к представлению, в котором генераторы  $J_{0a}$  (2.12) имеют локально-ковариантную форму

$$\hat{J}_{0a} = x_0 p_a - x_a p_0 + S_{0a}, \quad S_{0a} = i\sigma_3 S_a, \quad p_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}. \quad (4.1)$$

Это достигается посредством преобразования

$$\hat{J}_{0a} = V J_{0a} V^{-1}, \quad V = \exp \left[ -\frac{i}{2m} (\sigma_2 + i\sigma_2) (2\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} - p_0) \right]. \quad (4.2)$$

В представлении (4.1) ковариантный оператор координаты  $\hat{X}_\mu$  можно выбрать в виде  $\hat{X}_\mu = x_\mu$ . С помощью преобразования, обратного (3.2), получаем явный вид этих операторов в исходном представлении (2.12)

$$\hat{X}_\mu = \hat{V}^{-1} X_\mu \hat{V} = x_\mu + \frac{1}{m} (i\sigma_1 + \sigma_2) \xi_\mu, \quad \xi_a = S_a, \quad \xi_0 = \frac{1}{2} \sigma_3. \quad (4.3)$$

При переходе к новой инерциальной системе координат операторы  $X_\mu$  преобразуются как компоненты четырехвектора и удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям

$$[p_\mu, X_\nu]_- = ig_{\mu\nu}, \quad [X_\mu, X_\nu]_- = 0. \quad (4.4)$$

Все это позволяет сделать вывод, что  $X_\mu$  (4.3) можно интерпретировать как ковариантный оператор координаты частицы.

В случае  $s = 1/2$  операторы (4.3) принимают явно ковариантную форму

$$X_\mu = x_\mu + \frac{i}{2m} (1 + \gamma_4) \gamma_\mu, \quad (4.5)$$

где  $\gamma_4 = \sigma_3$ ,  $\gamma_0 = \sigma_1$ ,  $\gamma_a = -2i\sigma_2 S_a$  — матрицы Дирака. В силу изложенного выше оператор (4.5) может быть выбран в качестве ковариантного оператора координаты дираковской частицы. Интересно отметить, что при таком определении координаты оператор скорости

$$\dot{X}_a = -i[H_{1/2}, X_a]_- = (1 + \gamma_4) \gamma_0 \frac{p_a}{m}$$

(где  $H_{1/2}$  — гамильтониан Дирака (2.9)) имеет сплошной спектр и удовлетворяет соотношению  $[\dot{X}_a, \dot{X}_b] = 0$ . При этом, однако,  $[H_{1/2}, \dot{X}_a]_- \neq 0$ .

Подчеркнем, что оператор (4.5) существенно отличается от операторов координаты, предложенных ранее Ньютоном и Вигнером [15], Фолди и Ваутхойзенем [16] и многими другими [17]. Это отличие состоит в том, что оператор (4.5) локализован и преобразуется как ковариантный четырехвектор, в то время как операторы координаты, предложенные в [15–17], принадлежат классу нелокальных интегродифференциальных операторов с нековариантным законом преобразования.

Приведем явный вид ковариантного оператора спина  $\Sigma_{\mu\nu}$  частицы, описываемой уравнением (0.1) с гамильтонианом (2.1):

$$\Sigma_{ab} = S_{ab} + \frac{1}{2m} (i\sigma_1 + \sigma_2) S_{cd} p_d, \quad (a, b, c) = (1, 2, 3),$$

$$\Sigma_{0a} = i\sigma_3 S_{bc} - \frac{1}{m} (i\sigma_1 + \sigma_2) [2\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} - p_0, S_{bc}]_+.$$

По аналогии с (4.1)–(4.3) можно показать, что операторы  $\Sigma_{\mu\nu}$  преобразуются как ковариантный тензор второго ранга, а оператор  $\Sigma_{ab}$  коммутирует с гамильтонианом и является интегралом движения.

Отметим еще, что оператор координаты частицы, описываемой уравнениями (3.5), может быть получен из (4.5) с помощью замены  $\gamma_k \rightarrow \Gamma_k^{(s)}$ .

### 5. Уравнение для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле

Можно показать, что введение минимального электромагнитного взаимодействия непосредственно в уравнения (3.3) или (3.5) приводит к тому, что как уравнения (3.3), так и уравнения (3.5) становятся несовместными. Чтобы преодолеть эту трудность, запишем (3.3) в виде одного уравнения

$$\left[ \hat{P}_s \left( i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_s \right) + \varkappa (1 - \hat{P}_s) \right] \Psi = 0, \quad (5.1)$$

где  $\varkappa$  — произвольный параметр. Эквивалентность (5.1) и (3.3) следует из соотношений

$$\left[ i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_s, \hat{P}_s \right]_- = 0, \quad \hat{P}_s \hat{P}_s = \hat{P}_s.$$

Явно ковариантная система (3.5), в свою очередь, может быть записана в виде

$$\left[ B_s \left( \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu - m \right) - \varkappa (1 - B_s) \right] \Psi = 0, \quad (5.2)$$

$$B_s = \frac{1}{16ms} \left( \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu + m \right) \left( 1 + \Gamma_4^{(s)} \right) [S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 2s(s-1)],$$

поскольку

$$\left[ B_s, \Gamma_\mu^{(s)} p^\mu - m \right]_- \Psi = 0, \quad B_s B_s = B_s.$$

Сделаем в (5.1), (5.2) замену  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$ , где  $A_\mu$  — вектор-потенциал электромагнитного поля, и покажем, что в результате (5.1) и (5.2) сводятся к системе явно ковариантных дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих причинное движение заряженной частицы произвольного спина во внешнем поле. Поскольку уравнения (5.1) и (5.2) в конечном итоге приводят к одинаковым результатам, мы рассмотрим только уравнение (5.1), которое принимает вид

$$\left\{ \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) [\pi_0 - \hat{H}_s(\boldsymbol{\pi})] + \varkappa [1 - \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})] \right\} \Psi = 0, \quad (5.3)$$

$$\hat{H}_s(\boldsymbol{\pi}) = \Gamma_0^{(s)} \Gamma_a^{(s)} \pi_a + \Gamma_0^{(s)} m, \quad \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) = P_s + \frac{1}{2m} \left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \left[ \Gamma_\mu^{(s)} \pi^\mu, P_s \right]_- . \quad (5.4)$$

Умножив (5.3) на  $\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})$  и  $[1 - \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})]$  и используя тождества

$$\left[ \pi_0 - \hat{H}_s(\boldsymbol{\pi}), \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \right]_- \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \equiv \frac{1}{4m} \Gamma_0^{(s)} \left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \left( \frac{1}{s} S_{\mu\nu} - i \Gamma_\mu^{(s)} \Gamma_\nu^{(s)} \right) F_{\mu\nu} \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}),$$

$$\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) = \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}), \quad F_{\mu\nu} = -[\pi_\mu, \pi_\nu]_- .$$

приходим к системе уравнений

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{x}) = \hat{H}_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) \Psi(t, \mathbf{x}),$$

$$\hat{H}_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \Gamma_0^{(s)} \Gamma_a^{(s)} \pi_a + \Gamma_0^{(s)} m + e A_0 + \frac{1}{4m} \Gamma_0^{(s)} \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \left[ \frac{1}{s} S_{\mu\nu} - i \Gamma_\mu^{(s)} \Gamma_\nu^{(s)} \right] F_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

$$\left\{ P_s + \frac{1}{2m} \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \left[ \Gamma_\mu^{(s)} \pi^\mu, P_s \right]_- \right\} \Psi = 0, \quad (5.6)$$

которая, как и (3.3), может быть записана в явно ковариантной форме

$$\left[ \left( \Gamma_\mu^{(s)} \pi^\mu - m \right) + \frac{1}{4m} \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \left( \frac{1}{s} S_{\mu\nu} - i \Gamma_\mu^{(s)} \Gamma_\nu^{(s)} \right) F_{\mu\nu} \right] \Psi = 0, \quad (5.7)$$

$$\left( m + \Gamma_\mu^{(s)} \pi^\mu \right) \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) [S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} - 4s(s-1)] \Psi = 16ms\Psi. \quad (5.8)$$

Покажем, что уравнения (5.7), (5.8) не приводят к нарушению причинности. Для этого сделаем замену

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = V \Psi(t, \mathbf{x}), \quad V = \exp \left[ \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right) \frac{1}{2m} \Gamma_\mu^{(s)} \pi^\mu \right]. \quad (5.9)$$

Подставив (5.9) в (5.7) и умножив результат слева на оператор

$$F = m + \frac{1}{2} \left( \Gamma_\mu^{(s)} \pi^\mu - \frac{1}{sm} \tilde{S}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} \pi_\mu \pi^\mu \right) \left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right),$$

где  $\tilde{S}_{ab} = S_{ab}$ ,  $\tilde{S}_{0a} = iS_{bc}$ , приходим к уравнению

$$\left( \pi_\mu \pi^\mu - m^2 - \frac{1}{2s} \tilde{S}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \Phi(t, \mathbf{x}) = 0. \quad (5.10)$$

Из (5.8), (5.9) получаем дополнительное условие для  $\Phi$  в виде

$$P_s \Phi = \Phi \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} S_{ab}^2 \Phi = s(s+1) \Phi. \quad (5.11)$$

Формулы (5.10)–(5.11) обобщают уравнение Зайцева–Фейнмана–Гелл-Манна [18] для  $s = 1/2$  на случай частицы произвольного спина. Решения  $\Phi(t, \mathbf{x})$  этого уравнения, как известно [19], описывают причинное распространение волн (с досветовой скоростью). Таковы же, очевидно, и свойства решений  $\Psi(t, \mathbf{x})$  уравнений (5.7), (5.8), связанных с  $\Phi(t, \mathbf{x})$  преобразованием эквивалентности (5.9).

Таким образом, мы показали, что уравнения (5.7), (5.8) описывают движение заряженной релятивистской частицы с произвольным спином во внешнем электромагнитном поле и не приводят к нарушению принципа причинности. Отметим еще, что уравнения (5.7), (5.8) допускают лагранжеву формулировку. Действительно, выберем плотность лагранжиана  $L(x)$  в виде

$$L(x) = \left( m \bar{\Psi}' + i \frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial x_\mu} \check{\Gamma}_\mu^{(s)} \right) \left( 1 + \check{\Gamma}_4^{(s)} \right) \times \\ \times [S_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \Psi - 4s(s-1)] \bar{\Psi} i \check{\Gamma}_\lambda^{(s)} \frac{\partial \Psi'}{\partial x_\lambda} + 16ms \bar{\Psi}' \Psi', \quad (5.12)$$

где

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}' = \Psi'^{\dagger} \check{\Gamma}_0^{(s)} \check{\Gamma}_5^{(s)},$$

$\Psi$  и  $\chi$  —  $8s$ -компонентные функции, а  $\check{\Gamma}_\mu^{(s)}$ ,  $\check{S}_{\mu\nu}$  — матрицы размерности  $16s \times 16s$

$$\check{\Gamma}_k^{(s)} = \begin{pmatrix} \Gamma_k^{(s)} & 0 \\ 0 & \Gamma_k^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \check{\Gamma}_0^{(s)} = \begin{pmatrix} \Gamma_0^{(s)} & 0 \\ 0 & -\Gamma_0^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\check{\Gamma}_5^{(s)} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_0^{(s)} \\ \Gamma_0^{(s)} & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{S}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & S_{\mu\nu} \end{pmatrix},$$

Используя принцип минимального действия, получаем из (5.12) уравнения (3.5) для функции  $\Psi$  и уравнения, комплексно-сопряженные (3.5) для функции  $\chi$ . Сделав в (5.12) минимальную замену  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu$ , приходим к уравнениям (5.7), (5.8).

### 6. Разложение по степеням $1/m$

Гамильтониан (5.5) может иметь как положительные, так и отрицательные собственные значения. С помощью серии последовательных преобразований мы получим из (5.5) уравнение для состояний с положительной энергией подобно тому, как это было сделано Фолди и Ваутхойзенем [16] для уравнения Дирака. При этом оператор  $\hat{H}_s(\pi, A_0)$  будет представлен в виде ряда по степеням  $1/m$ , удобном для вычислений по теории возмущений.

Основная трудность при диагонализации уравнений (5.5), (5.6) состоит в том, что необходимо найти преобразования, одновременно приводящие к диагональной форме два различных уравнения. Мы диагоналируем сначала дополнительное условие (5.6), а затем, используя операторы, коммутирующие с преобразованным уравнением (5.6), приведем к диагональной форме уравнение (5.7).

Подвергнем волновую функцию  $\Psi(t, \mathbf{x})$  преобразованию  $\Psi \rightarrow \tilde{\Psi} = V\Psi$ , где

$$V = \exp \left[ \frac{1}{2m} \left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \left( \Gamma_a^{(s)} \pi_a - k_1 \Gamma_0^{(s)} S_a \pi_a \right) \right]. \quad (6.1)$$

Подействовав оператором (6.1) слева на (5.5), (5.6), получаем уравнение для  $\tilde{\Psi}$

$$H_s(\pi, A_0) \tilde{\Psi} = i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi},$$

$$H_s(\pi, A_0) = \Gamma_0^{(s)} m + k_1 \Gamma_4^{(s)} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{2m} \Gamma_0^{(s)} \left( 1 - \Gamma_4^{(s)} \right) \left[ \pi^2 - (k_1 \mathbf{S} \cdot \mathbf{p})^2 + \frac{1}{s} \mathbf{S} (\mathbf{H} - i\mathbf{E} + ik_1 \mathbf{E}) \right], \quad (6.2)$$

$$P_s \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} S_{ab} \tilde{\Psi} = s(s+1) \tilde{\Psi}, \quad (6.3)$$

где  $H_a = -i[\pi_b, \pi_c]_-$  и  $E_a = -[\pi_0, \pi_a]_-$  — напряженности магнитного и электрического полей,  $P_s$  — проектор (3.3с).

Из (6.3), (3.4) заключаем, что волновая функция  $\tilde{\Psi}$  имеет  $2(2s+1)$  отличных от нуля компонент. Матрицы  $S_{ab}$  и коммутирующие с ними матрицы  $\Gamma_0^{(s)}$ ,  $\Gamma_4^{(s)}$  на множестве таких функций можно представить в виде

$$S_{ab} \sim S_c = \begin{pmatrix} s_c & 0 \\ 0 & s_c \end{pmatrix}, \Gamma_0^{(s)} \sim \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_4^{(s)} \sim \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

где  $s_c$  — генераторы представления  $D(s)$  группы  $O(3)$ ,  $I$  и  $0$  —  $(2s+1)$ -рядные единичная и нулевая матрицы. Подставив (6.4) в (6.2), получаем гамильтониан  $H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0)$  в форме

$$H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) = \sigma_1 m + k_1 \sigma_3 \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2m} (\sigma_1 - i\sigma_2) \left\{ \pi^2 - (k_1 \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 + \frac{e}{s} \mathbf{S} [\mathbf{H} - i(1 - k_1 s) \mathbf{E}] \right\} + e A_0. \quad (6.5)$$

Формула (6.5) обобщает гамильтониан свободной частицы произвольного спина (2.1) на случай взаимодействия с внешним электромагнитным полем. Таким образом, исходя из явно ковариантных уравнений (5.7), (5.8), мы получили рецепт введения взаимодействия в пуанкаре-инвариантные уравнения без лишних компонент, найденные в разделе 1.

Преобразуем (6.5) к диагональной форме. Как и в случае уравнения Дирака [16], это можно осуществить только приближенно для  $\pi_\mu \ll m$ . Совершая серию последовательных преобразований

$$\begin{aligned} H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) &\rightarrow V_3 V_2 V_1 H_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) V_1^{-1} V_2^{-1} V_3^{-1} = H'_s(\boldsymbol{\pi}, A_0), \\ V_1 &= \exp \left( -i\sigma_2 \frac{k_1 \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi}}{m} \right), \\ V_2 &= \exp \left\{ \frac{1}{4m^2} \sigma_3 \left[ \pi^2 - (k_1 \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{s} \mathbf{S} \cdot \mathbf{H} + ie \left( \frac{1}{s} - k_1 \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \right] \right\}, \\ V_3 &= \exp \left\{ -\frac{i}{m^3} \left[ \frac{1}{12} (k_1 \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{8} \left[ \pi^2 - (k_1 \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 - \frac{e}{s} \mathbf{S} \cdot \mathbf{H} + \frac{ie}{s} (1 - sk_1) \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}, \pi_0 \right] \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

и пренебрегая членами порядка  $1/m^3$ , получаем

$$\begin{aligned} H'_s(\boldsymbol{\pi}, A_0) &= \sigma_1 \left( m + \frac{\pi^2}{2m} - \frac{e \mathbf{S} \cdot \mathbf{H}}{2sm} \right) + e A_0 - \frac{e}{16m^2 s^2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \times \boldsymbol{\pi} - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{E}) - \\ &\quad - \frac{e}{24m^2 s^2} \left[ \frac{1}{2} Q_{ab} \frac{\partial E_a}{\partial x_b} + s(s+1) \operatorname{div} \mathbf{E} \right] + \\ &\quad + \frac{ie(2s-1)}{8m^2 s^2} (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{H} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{H} \times \boldsymbol{\pi}) + \frac{e}{24m^2 s^2} Q_{ab} \frac{\partial H_a}{\partial x_b}, \\ Q_{ab} &= 3[S_a, S_b]_+ - 2\delta_{ab}s(s+1). \end{aligned} \quad (6.7)$$

На множестве функций, удовлетворяющих дополнительному условию  $\sigma_1 \Phi = \Phi$ , гамильтониан (6.7) положительно-определен и содержит слагаемые соответствующим

щие дипольному  $\left(-\frac{e}{2sm}\mathbf{S}\cdot\mathbf{H}\right)$ , квадрупольному  $\left(-\frac{e}{48s^2m^2}Q_{ab}\frac{\partial E_a}{\partial x_b}\right)$ , спин-орбитальному  $\left(-\frac{e}{16m^2s^2}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}\times\boldsymbol{\pi}-\mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{E})\right)$ , дарвиновскому  $\left(-\frac{e(s+1)}{24sm^2}\operatorname{div}\mathbf{E}\right)$  взаимодействиям частицы с полем. Два последних члена в (6.7) можно интерпретировать как магнитное спин-орбитальное и магнитное квадрупольное взаимодействия.

Приближенный гамильтониан (6.6) совпадает с полученным в работе [20], в которой в качестве исходного использовалось уравнение Зайцева–Фейнмана–Гелл-Манна (5.10). В случае  $s = 1/2$  (6.7) совпадает с гамильтонианом Фолди и Ваухойзена [16], полученным из уравнения Дирака.

### 7. Точное решение уравнений движения частиц произвольного спина в однородном магнитном поле

Рассмотрим систему уравнений (5.5), (5.6) для случая частицы в однородном магнитном поле. Не умаляя общности, можно считать, что вектор напряженности этого поля  $\mathbf{H}$  параллелен третьей проекции импульса частицы  $p_3$ . Тогда компоненты тензора электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$  равны

$$F_{0a} = E_a = 0, \quad F_{23} = H_1 = 0, \quad F_{31} = H_2 = 0, \quad F_{12} = H_3 = H. \quad (7.1)$$

Из (7.1) следует, что  $\pi_\mu$  можно выбрать в виде

$$\pi_1 = p_1 - eHx_2, \quad \pi_2 = p_2, \quad \pi_3 = p_3, \quad \pi_0 = i\frac{\partial}{\partial t}. \quad (7.2)$$

Подставив (7.1), (7.2) в (5.8), получаем  $H_s(\boldsymbol{\pi})$  в форме

$$H_s(\boldsymbol{\pi}) = \Gamma_0^{(s)}\Gamma_a^{(s)}\pi_a + \Gamma_0^{(s)}m + \frac{H}{2m}\Gamma_0^{(s)}\left(1 - \Gamma_4^{(s)}\right)\left(i\Gamma_1^{(s)}\Gamma_2^{(s)} - \frac{1}{s}S_{12}\right). \quad (7.3)$$

Преобразуем  $H_s(\boldsymbol{\pi})$  к такому виду, чтобы он содержал только коммутирующие величины. Это позволит нам, не решая уравнений движения (5.5), (5.6), определить спектр собственных значений гамильтониана (7.3). Действительно, в результате преобразования

$$H_s(\boldsymbol{\pi}) \rightarrow H'_s(\boldsymbol{\pi}) = VH_sV^{-1}, \quad \hat{P}_s(\boldsymbol{\pi}) \rightarrow \hat{P}'_s(\boldsymbol{\pi}) = V\hat{P}_s(\boldsymbol{\pi})V^{-1}, \quad (7.4)$$

где

$$V = \lambda^+ + \mathcal{E}^{-1}\lambda^{-1}\Gamma_0^{(s)}H_s(\boldsymbol{\pi}), \quad \mathcal{E} = \left(\pi^2 - \frac{1}{s}S_{12}H + m^2\right)^{1/2},$$

$$V^{-1} = \frac{1}{m}\left(\lambda^-\mathcal{E} + H_s(\boldsymbol{\pi})\lambda^-\Gamma_0^{(s)}\right), \quad \lambda^\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm \Gamma_4^{(s)}\right),$$

получаем

$$H'_s(\boldsymbol{\pi}) = \Gamma_0^{(s)}\left(m^2 + \pi^2 - \frac{1}{s}S_{12}H\right)^{1/2}, \quad (7.5)$$

$$P_s\Phi = \Phi \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}S_{ab}^2\Phi = s(s+1)\Phi, \quad \Phi = V\Psi. \quad (7.6)$$

Операторы  $\Gamma_0^{(s)}$ ,  $S_{12}$  и  $\pi^2$  коммутируют друг с другом и имеют следующие собственные значения:

$$\Gamma_0^{(s)}\Phi = \varepsilon\Phi, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad S_{12}\Phi = s_3\Phi, \quad s_3 = -s, -s + 1, \dots, s, \quad (7.7)$$

$$\pi^2\Phi = [(2n + 1)H + p_3^2]\Phi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.8)$$

Формулы (7.7) следуют непосредственно из (3.4), (7.6), а соотношение (7.8) приведено, например, в [21].

Квадрат гамильтониана (7.5) и операторы (7.7), (7.8) имеют общую систему собственных функций  $\Phi_{\varepsilon n s_3 p_3}$ . Отсюда и из (7.7), (7.8) заключаем, что собственные значения гамильтониана (7.5) равны

$$E_{\varepsilon n s_3 p_3} = \varepsilon [m^2 + (2n + 1 - s_3/s)eH + p_3^2]^{1/2}. \quad (7.9)$$

Соотношение (7.9) обобщает известную формулу [21] для уровней энергии электрона в однородном магнитном поле на случай частицы с произвольным спином  $s$ . Как видно из (7.9), значения энергии такой частицы действительны при любых  $s$ , в то время как уравнения Рариты–Швингера для  $s = 3/2$  при решении аналогичной задачи приводят к комплексным значениям энергии [2].

Приведем для полноты вид собственных функций  $\Phi_{\varepsilon n s_3 p_3}$

$$\Phi_{\varepsilon n s_3 p_3} = \Phi_\varepsilon \Phi_{s_3} \Phi_{n p_3}, \quad (7.10)$$

где  $\Phi_{n p_3}$  — собственные функции оператора  $\pi^2$  [21]

$$\Phi_{n p_3} = \exp(ip_1 x_1 + ip_3 x_3) \exp\left[-\frac{H}{2}\left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)\right] H_n\left[\sqrt{H}\left(x_2 + \frac{p_1}{H}\right)\right], \quad (7.11)$$

$H_n$  — полиномы Эрмита, а  $\Phi_\varepsilon$ ,  $\Phi_{s_3}$  — собственные функции операторов  $\Gamma_0^{(s)}$  и  $S_{12}$ , явный вид которых может быть легко найден для любого конкретного представления матриц  $\Gamma_0^{(s)}$  и  $S_{12}$ .

1. Tsai W., Yildis A., *Phys. Rev. D*, 1971, **4**, 3643.
2. Velo G., Zwanzinger D., *Phys. Rev.*, 1969, **186**, 2218;  
Seetharaman M., Prabhakaran I., Mathews P.M., *Phys. Rev. D*, 1975, **12**, 458.
3. Фушич В.И., Грищенко А.Л., Никитин А.Г., *ТМФ*, 1971, **8**, 192; Preprint ITF-70-89E, Kiev, 1970.
4. Fushchych W.I., Nikitin A.G., *Rep. Math. Phys.*, 1975, **8**, 33;  
Никитин А.Г., *УФЖ*, 1973, **18**, 1605; 1974, **19**, 1000.
5. Фушич В.И., Никитин А.Г., Дифференциальные уравнения движения первого и второго порядка для частиц с произвольным спином, Препринт ИМ-77-3, Институт математики АН УССР, Киев, 1977, 48 с.
6. Weaver D.L., Hammer C.L., Good R.H., *Phys. Rev. B*, 1964, **135**, 241.
7. Mathews P.M., *Phys. Rev.*, 1966, **143**, 978;  
Jayaraman I., *Nuovo Cim. A*, 1973, **13**, 877; 1973, **14**, 343.
8. Guertin R.F., *Ann. Phys.*, 1974, **88**, 504; 1975, **91**, 386.
9. Тамм И.Е., *ДАН СССР*, 1940, **29**, 551;  
Taketani M., Sakata S., *Proc. Phys. Math. Soc. (Japan)*, 1940, **22**, 757.
10. Guertin R.F., Preprint Rice University, Houston, 1975.
11. Foldy L.L., *Phys. Rev.*, 1956, **102**, 568.

12. Широков Ю.М., *ЖЭТФ*, 1957, **33**, 1196.
13. Lomont I.S., *Phys. Rev.*, 1958, **111**, 1710;  
Moses H.E., *Nuovo Cim. Suppl.*, 1958, **7**, 1.
14. Lomont I.S., Moses H.E., *Phys. Rev.*, 1960, **118**, 337;  
Dowker I.S., *Proc. Roy. Soc. A*, 1967, **293**, 351.
15. Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963, С. 69.
16. Foldy L.L., Wouthuysen S.A., *Phys. Rev.*, 1950, **78**, 29.
17. Durand B., *Phys. Rev. D*, 1976, **14**, 1554.
18. Зайцев Г.А., *ЖЭТФ*, 1955, **28**, 524; *ДАН СССР*, 1957, **113**, 1248;  
Feynman R.P., Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, 1958, **109**, 193.
19. Hurley W.I., *Phys. Rev. D*, 1971, **4**, 3605.
20. James K.R., *Proc. Phys. Soc. (London)*, 1968, **1**, 334.
21. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б., Квантовая электродинамика, Наука, 1969, С. 142.

# Contents

<i>Ю.М. Ломсадзе, В.И. Лендъел, И.Ю. Кривский, В.И. Фуцич, И.В. Химич, Л.П. Лукин, Б.М. Эрнст, О применении модифицированного метода возмущений к интерпретации нуклон-нуклонных рассеяний</i> .....	1
<i>И.Ю. Кривський, Ю.М. Ломсадзе, В.І. Фуцич, І.В. Хіміч, До проблеми радіаційного розпаду <math>\pi^-</math>-мезона</i> .....	6
<i>И. Кривский, Ю. Ломсадзе, В. Фуцич, И. Химич, О двухнейтринной аннигиляции электрона с позитроном</i> .....	9
<i>В.И. Фуцич, Аналитические свойства амплитуд рождения в одночастичном приближении как функции двух переменных</i> .....	11
<i>В.І. Фуцич, Аналітичні властивості узагальнених петльових діаграм</i> .....	17
<i>В.І. Фуцич, Про полюси амплітуди народження для процесу <math>\pi + d \rightarrow d + \pi + \pi</math></i> .....	20
<i>В.І. Фуцич, Аналітичні властивості амплітуд народження і метод Чу–Лоу</i> ....	25
<i>В.И. Коломыцев, В.И. Фуцич, Аналитические свойства амплитуды рассеяния, соответствующей одному классу диаграмм Фейнмана</i> .....	31
<i>В.И. Фуцич, Об аналитических свойствах некоторых вершинных амплитуд в теории возмущений</i> .....	46
<i>В.И. Фуцич, Унитарная симметрия и группа Пуанкаре</i> .....	51
<i>В.І. Фуцич, Про представлення групи де Сіттера</i> .....	53
<i>В.И. Фуцич, О вложении алгебры Пуанкаре</i> .....	55
<i>В.И. Фуцич, Об операторах взаимодействия</i> .....	61
<i>W.I. Fushchych, A relativistically invariant mass operator</i> .....	68
<i>W.I. Fushchych, Yu.I. Krivsky, On a possible approach to the variable-mass problem</i> .....	79
<i>В.И. Фуцич, И.Ю. Кривский, О волновых уравнениях в 5-пространстве Минковского</i> .....	83
<i>W.I. Fushchych, Equations of motion in odd-dimensional spaces and <math>T</math>-, <math>C</math>-invariance</i> .....	107
<i>W.I. Fushchych, Yu.I. Krivsky, On representations of the inhomogeneous de Sitter group and equations in five-dimensional Minkowski space</i> .....	114
<i>W.I. Fushchych, Yu.I. Krivsky, On representations of the inhomogeneous de Sitter group and on equations of the Schrödinger–Foldy type</i> .....	126
<i>В.И. Фуцич, Л.П. Сокур, Уравнения Баргмана–Вигнера на неоднородной группе де Ситтера</i> .....	139
<i>І.І. Костирко, В.І. Фуцич, Про динамічну алгебру осцилятора в просторі з індефінітною метрикою</i> .....	164
<i>И.Ю. Кривский, Г.Д. Романенко, В.И. Фуцич, Уравнения типа Кеммера–Дэффина в пятимерном пространстве Минковского</i> .....	167
<i>В.И. Фуцич, Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I</i> .....	176

<i>W.I. Fushchych</i> , On the $P$ - and $T$ -non-invariant two-component equation for the neutrino .....	199
<i>W.I. Fushchych, A.L. Grishchenko</i> , On the $CP$ -noninvariant equations for the particle with zero mass and spin $s = \frac{1}{2}$ .....	207
<i>W.I. Fushchych, A.L. Grishchenko</i> , On two-component equations for zero mass particles .....	209
<i>В.И. Фуцич</i> , О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения .....	221
<i>В.И. Фуцич</i> , О $PTC$ -неинвариантных лагранжианах .....	231
<i>В.И. Фуцич, А.Л. Грищенко, А.Г. Никитин</i> , О релятивистских уравнениях движения без “лишних” компонент .....	234
<i>Л.П. Сокур, В.И. Фуцич</i> , Об уравнениях движения, инвариантных относительно группы $P(1, n)$ . II .....	248
<i>W.I. Fushchych</i> , On the three types of relativistic equations for particles with nonzero mass .....	263
<i>W.I. Fushchych</i> , $P$ , $T$ , $C$ properties of the Poincaré invariant equations for massive particles .....	265
<i>W.I. Fushchych, A.G. Nikitin</i> , On the possible types of equations for zero-mass particles .....	270
<i>W.I. Fushchych</i> , On the additional invariance of the Dirac and Maxwell equations .....	274
<i>W.I. Fushchych</i> , On a motion equation for two particles in relativistics quantum mechanics .....	278
<i>W.I. Fushchych</i> , Poincaré-invariant equations with a rising mass spectrum .....	282
<i>W.I. Fushchych, A.G. Nikitin</i> , On the Poincaré-invariant equations for particles with variable spin and mass .....	286
<i>W.I. Fushchych, A.G. Nikitin, V.A. Salogub</i> , On the equations of motion for particles with arbitrary spin in nonrelativistic mechanics .....	301
<i>В.И. Фуцич</i> , О дополнительной инвариантности уравнения Клейна–Гордона–Фока .....	306
<i>W.I. Fushchych, A.G. Nikitin</i> , On the Galilean-invariant equations for particles with arbitrary spin .....	310
<i>В.И. Фуцич, Ю.Н. Сегеда</i> , О группах инвариантности некоторых уравнений релятивистской квантовой механики .....	315
<i>С.А. Владіміров, В.І. Фуцич</i> , Максимальна та мінімальна групи симетрії атома водню .....	321
<i>А.Г. Никитин, В.И. Фуцич, И.И. Юрик</i> , Редукция неприводимых унитарных представлений обобщенных групп Пуанкаре по их подгруппам ..	324
<i>А.Г. Никитин, Ю.Н. Сегеда, В.И. Фуцич</i> , О инвариантности уравнений Кеммера–Дэффина и Рариты–Швингера .....	339
<i>В.И. Фуцич</i> , Групповые свойства дифференциальных уравнений квантовой механики .....	351

<i>В.И. Фущич, А.Г. Никитин</i> , Дифференциальные уравнения движения первого и второго порядка для частиц с произвольным спином .....	359
<i>W.I. Fushchych, A.G. Nikitin</i> , On the new invariance groups of the Dirac and Kemmer–Duffin–Petiau equations .....	393
<i>В.И. Фущич, С.П. Онуфрийчук</i> , О группах инвариантности одного класса счетной системы уравнений первого порядка с частными производными ...	398
<i>В.И. Фущич, Ю.Н. Сегеда</i> , О новой алгебре инвариантности свободного уравнения Шредингера .....	402
<i>В.И. Фущич</i> , О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных .....	404
<i>В.И. Фущич, А.Г. Никитин</i> , О группе инвариантности квазирелятивистского уравнения движения .....	427
<i>W.I. Fushchych, A.G. Nikitin, V.A. Salogub</i> , On the non-relativistic motion equations in the Hamiltonian form .....	431
<i>В.И. Фущич, А.Г. Никитин</i> , Пуанкаре-инвариантные уравнения движения частиц произвольного спина .....	442
<i>W.I. Fushchych, A.G. Nikitin</i> , On the invariance groups of relativistic equations for the spinning particles interacting with external fields .....	488
<i>W.I. Fushchych, A.G. Nikitin</i> , Conformal invariance of relativistic equations for arbitrary spin particles .....	494
<i>В.И. Фущич, А.Г. Никитин</i> , Групповые свойства уравнений Максвелла .....	498
<i>А.Г. Никитин, В.И. Фущич</i> , Пуанкаре-инвариантные дифференциальные уравнения для частиц произвольного спина .....	516